MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

66. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

66. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956/57

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 66. Bandes

Seite

BAER, R., Noethersche Gruppen 269

BAER, R., Lokal Noethersche Gruppen 341

BOSE, S. K., A note concerning some properties of the Maximum Function of a Meromorphic Function 487

CARLESON, L., Representations of continuous functions 447

CHEN, YUNG-MING, On the integrability of functions defined by trigonometrical series 9

DINGHAS, A., Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen 173

DINGHAS, A., Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität 389

DJERASIMOVIĆ, B., Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen 228

DJERASIMOVIĆ, B., Über die binären quadratischen Formen 328

FAULHABER, G., Äquivalenzsätze für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie . . 34

FOSTER, A. L., The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras; subdirect factorization 452

HADWIGER, H., und D. OHMANN, Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie . . 1

HELLWIG, G., Über die Anwendung der Laplace-Transformation auf Randwertprobleme 371

HODGES, J. H., Weighted partitions for symmetric matrices in a finite field 13

KARRASS, A., and D. SOLITAR, Some Remarks on the Infinite Symmetric Groups . . 64

KASCH, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen. III 164

KNESER, M., Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen 88

KRICKEBERG, K., Stochastische Konvergenz von Semimartingalen 470

LANDSBERG, M., Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokalkonvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω) 58

LEPTIN, H., Linear kompakte Moduln und Ringe. II 289

LINGENBERG, W., Zur Differentialgeometrie der Flächen, die eine eingliedrige projektive Gruppe in sich gestatten und über Allgemeine Projektivrotationsflächen 409

LOMNICKI, Z. A., and S. K. ZAREMBA, A further instance of the Central Limit Theorem for dependent random variables 490

MAHLER, K., Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen 25

MESCHKOWSKI, H., Rekursive reelle Zahlen 189

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER, Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit . . 203

MORGENSTERN, D., Eine Verschärfung der Ostrowskischen Determinantenabschätzung 143

Seite

Nef, W., Über die Fortsetzung monotoner Linearformen 129

Ostrowski, A., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung . 70

Paasche, I., Bemerkung zu einem Desideratum von Perron 117

Petersen, G. M., Almost Convergence and two Matrix Limitation Methods 225

Petersson, H., Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul 241

Schaefer, H., Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen 147

Schröder, J., Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff 111

Schubart, H., und H. Wittich, Über die Lösungen der beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen 364

Scott, W. R., On a result of B. H. Neumann 240

Taylor, A. E., Extensions of a Theorem of Hellinger and Toeplitz 53

Vidav, I., Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren 121

HADWIGER, H., u. D. OHMANN
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 1—8 (1956)

Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie

Von

H. HADWIGER und **D. OHMANN**

Das Ziel der vorliegenden Note ist es, für die BRUNN-MINKOWSKISCHE Ungleichung und für die damit im engsten Zusammenhang stehende isoperimetrische Ungleichung unter Einschluß der Festlegung geeigneter Gleichheitsbedingungen einen kurzen, mit einfachen Hilfsmitteln der direkten Mengengeometrie auskommenden Beweis zu geben[1]). Die Betrachtungen erstrecken sich auf beschränkte, abgeschlossene und nichtleere Punktmengen des k-dimensionalen euklidischen Raumes.

1. Wir formulieren zunächst die Ergebnisse. Es bezeichne $C = A \times B$ die MINKOWSKISCHE Summe der Mengen A und B, d.h. die Menge der Punkte $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,[\mathfrak{a} \in A, \mathfrak{b} \in B]$[2]). Mit A und B ist auch C abgeschlossen. Weiter bedeute $V(A)$ das LEBESGUESCHE Maß von A. Es gilt dann der folgende

Satz I (BRUNN-MINKOWSKI*scher Satz*). *Es besteht die Ungleichung*

$$V(A \times B)^{1/k} \geq V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k}, \tag{1}$$

wobei für Mengen positiven Maßes Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn A und B homothetische konvexe Körper sind.

Wir betrachten weiter die durch den Ansatz

$$F(A; B) = \liminf [V(A \times \tau B) - V(A)]/\tau \qquad [\tau \to 0]$$

definierte (untere) MINKOWSKISCHE Relativoberfläche von A bezüglich B. Hierbei bezeichnet τB die durch Dilatation mit $\tau > 0$ aus B hervorgehende Menge, d.h. die Menge der Punkte $\tau\mathfrak{b}\,[\mathfrak{b} \in B]$. Eine einfach formulierbare und befriedigende Abklärung der Frage, unter welchen Bedingungen in der isoperimetrischen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, läßt sich mit Hilfe des von E. SCHMIDT[3]) herangezogenen Begriffs der schleierlosen Menge erzielen. Ein Punkt $\mathfrak{a}$ einer meßbaren Menge A heißt volumfremd, wenn eine Kugel K von positivem Radius um $\mathfrak{a}$ als Mittelpunkt so existiert, daß $V(A \cap K) = 0$ ist. Die Menge der volumfremden Punkte einer Menge ist ihr

[1]) Die mengengeometrische Arbeitsmethode knüpft unmittelbar an die Grundtatsachen der Elementargeometrie, der Punktmengenlehre und der niederen Analysis der reellen Zahlen an und meidet insbesondere die Hilfsmittel der Differential- und Integralanalysis.

[2]) Für Punkte und ihre Ortsvektoren sind die gleichen Symbole verwendet.

[3]) SCHMIDT, E.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. I, II. Math. Nachr. **1**, 81—157 (1948); **2**, 171—244 (1949), insb. II 223, 232

Schleier; ist diese Menge leer, so wollen wir A schleierlos nennen. Die Menge der nicht-volumfremden, also der volumverbundenen Punkte ist der Volumkern A^0 von A. Es gilt nun der folgende

Satz II *(Isoperimetrischer Satz). Es besteht die Ungleichung*

$$F(A;B) \geq k\, V(A)^{(k-1)/k}\, V(B)^{1/k}, \tag{2}$$

wobei für schleierlose Mengen positiven Maßes Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn A und B homothetische konvexe Körper sind.

Die Ungleichungen (1) und (2) sind schon oft in dieser Allgemeinheit bewiesen worden[4]). Die Bedingungen für Gleichheit sind bei (1) bekannt[5]); dagegen sind solche bei (2) nur im Sonderfall, daß B eine Kugel ist, nachgewiesen worden[6]).

2. Nachfolgend erklären wir eine für die Beweisführung benötigte Hilfsoperation, nämlich die volumtreue Parallelzerlegung zweier Mengen. Es sollen E_a und E_b zwei orientierte und parallele, $(k-1)$-dimensionale Ebenen, H_a' bzw. H_b' und H_a'' bzw. H_b'' die beiden durch sie erzeugten positiven und negativen abgeschlossenen Halbräume bezeichnen. Die Ebenen E_a und E_b erzeugen eine Zerlegung der Mengen A und B $[V(A), V(B) > 0]$ in die abgeschlossenen Teile $A' = A \cap H_a'$, $A'' = A \cap H_a''$, $B' = B \cap H_b'$, $B'' = B \cap H_b''$. Dabei setzen wir voraus, daß die Bedingung

$$V(A')/V(A) = V(B')/V(B) \tag{3}$$

erfüllt sei. Offenbar ist

$$V(A) = V(A') + V(A''); \quad V(B) = V(B') + V(B''). \tag{4}$$

Da einerseits $A \times B \supset (A' \times B') \cup (A'' \times B'')$ gilt, andererseits aber der Durchschnitt $(A' \times B') \cap (A'' \times B'')$ ganz in der Ebene $E_a \times E_b$ enthalten sein muß und daher eine Nullmenge ist, besteht weiter die Beziehung

$$V(A \times B) \geq V(A' \times B') + V(A'' \times B''). \tag{5}$$

---

[4]) BUSEMANN, H.: The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). — HADWIGER, H.: Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. Math. Z. **53**, 210—218 (1950). — HENSTOCK, R., u. A. M. MACBEATH: On the measure of sum-sets. (I) The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. London Math. Soc. **3**, 182—194 (1953).

[5]) LUSTERNIK, L.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. **3** (8), No. 2 (62) 55—58 (1935). Es handelt sich hier wohl um die erste Abhandlung, welche sich mit dem Problem in dieser Allgemeinheit befaßt; jedoch sind die Beweise fehlerhaft. Vgl. hierzu R. HENSTOCK-A. M. MACBEATH, loc. cit.[4]).

[6]) DINGHAS, A., u. E. SCHMIDT: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. Nr. 7 (1943). — SCHMIDT, E.: loc. cit. — DINGHAS, A.: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr. **2**, 107—113 (1949).

Ersetzt man hier B durch τB und subtrahiert $V(A)$ mit Verwendung von (4), so ergibt sich durch Grenzbetrachtung $\tau \to 0$

$$F(A; B) \geq F(A'; B') + F(A''; B''). \tag{6}$$

Man beachte hier, daß $(\tau B)' = \tau B'$ und $(\tau B)'' = \tau B''$ ist, falls das Dilatationszentrum in der Ebene E_b angenommen wird. Die Bedingung (3) bleibt dann auch erhalten.

3. Wir führen jetzt die beiden BRUNN-MINKOWSKIschen Defizite

$$\mathfrak{p}(A; B) = V(A \times B) - [V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k}]^k \tag{7}$$

und

$$q(A; B) = F(A; B) - k\, V(A)^{(k-1)/k}\, V(B)^{1/k} \tag{8}$$

ein. Ausgehend von (5) und (6) bestätigt man durch direkte Ausrechnung, daß bezüglich einer volumtreuen Parallelzerlegung von A und B die Funktionalungleichungen

$$\mathfrak{p}(A; B) \geq \mathfrak{p}(A'; B') + \mathfrak{p}(A''; B'') \tag{9}$$

und

$$q(A; B) \geq q(A'; B') + q(A''; B'') \tag{10}$$

gelten; hierbei sind die Bedingungen (3) der Volumtreue wesentlich.

4. Nun weisen wir die Gültigkeit der Ungleichungen (1) und (2) nach, d.h. wir zeigen, daß die oben eingeführten Defizite nichtnegativ sind, so daß also

$$\mathfrak{p}(A; B) \geq 0; \qquad \text{(11b)} \qquad q(A; B) \geq 0 \tag{11a}$$

gilt. In der Tat: Zunächst ist (11a) richtig für den Fall, daß A und B zwei parallel liegende gerade Parallelotope sind. Bezeichnen a_i und b_i $(i = 1, \ldots, k)$ die Kantenlängen von A und B, so sind diejenigen von $C = A \times B$ durch $c_i = a_i + b_i$ gegeben. Das Defizit $\mathfrak{p}$ läßt sich durch passende Umformung in die Gestalt

$$\mathfrak{p} = V(C)\left\{1 - [(\alpha_1 \ldots \alpha_k)^{1/k} + (\beta_1 \ldots \beta_k)^{1/k}]^k\right\}$$

bringen, wobei die Hilfszahlen α_i und β_i durch

$$\alpha_i = a_i/(a_i + b_i), \quad \beta_i = b_i/(a_i + b_i) \qquad [\alpha_i + \beta_i = 1]$$

gegeben sind. Die erzielte Form gestattet, die Definitheit $\mathfrak{p} \geq 0$ auf Grund des klassischen Satzes über das geometrische und das arithmetische Mittel von k positiven Zahlen direkt abzulesen. Wir bemerken noch, daß (11a) damit auch für Mengen A, B gilt, die sich von den eben beschriebenen Parallelotopen nur um Nullmengen unterscheiden.

Es seien nun A und B zwei parallel orientierte Intervallpolyeder, die sich also im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele, parallel liegende, gerade Parallelotope zerlegen lassen. Ist $n(A)$ bzw. $n(B)$ die Anzahl der Parallelotope positiven Volumens, die bei einer individuellen Zerlegung von

A bzw. von B erhalten wird, so ist (11a) richtig, wenn $n = n(A) + n(B) = 2$ ist. Es sei $m > 2$. Wir treffen die Induktionsvoraussetzung, daß (11a) richtig ist für alle Polyederpaare mit $n < m$, und es liege nun ein Fall mit $n = m$ vor. Auf Grund elementarer Erwägungen sieht man ein, daß A und B durch eine volumtreue Zerlegung in Intervallpolyeder A', A'', B', B'' so zerlegt werden können, daß $n' = n(A') + n(B') < m$ und $n'' = n(A'') + n(B'') < m$ ausfällt. Ein Blick auf (9) zeigt, daß vermöge der Induktionsvoraussetzung wieder auf $p \geq 0$ geschlossen werden kann. (11a) ist also für alle Intervallpolyeder richtig.

Bedeuten A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zwei monoton fallende Folgen abgeschlossener Mengen, so daß also $A_\nu \supset A_{\nu+1}$ und $B_\nu \supset B_{\nu+1}$ gilt, und ist weiter $C_\nu = A_\nu \times B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so gilt natürlich auch $C_\nu \supset C_{\nu+1}$ und falls $A = \bigcap A_\nu$, $B = \bigcap B_\nu$ und $C = \bigcap C_\nu$ gesetzt wird, gilt $C = A \times B$, wie sich leicht mit geläufigen Schlüssen ergibt.

Da nun eine abgeschlossene Menge der Durchschnitt einer monoton fallenden Folge von Intervallpolyedern mit frei wählbarer Orientierung ist, folgt aus der obigen Feststellung in Verbindung mit den geläufigen Stetigkeitseigenschaften des LEBESGUEschen Maßes, daß (11a) auch für beliebige abgeschlossene Mengen A und B richtig ist. — Die Ungleichung (11b) gewinnen wir nun in der bekannten Weise durch Betrachtung von $(1/\tau)\, p(A; \tau B)$ mit Grenzübergang $\tau \to 0$. Damit ist der Beweis der Ungleichungen (1) und (2) vollständig.

5. Mit den unten folgenden Hilfsaussagen wird der Beweis für die behaupteten Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in den Ungleichungen (1) und (2) vorbereitet. Es wird hierbei $V(A)$, $V(B) > 0$ vorausgesetzt.

Eine Menge A soll hier kurz separierbar heißen, wenn eine Ebene E so existiert, daß einerseits $E \cap A = 0$ und andererseits $A = A' \cup A''$ mit $A' \subset H'$, $A'' \subset H''$, $A' \neq 0$, $A'' \neq 0$ gilt, wo H' und H'' die durch E begrenzten, abgeschlossenen Halbräume bezeichnen. Ist $V(A') > 0$ und $V(A'') > 0$, so nennen wir A verschärfend V-separierbar.

Die Hilfsaussagen lauten:

(A) Ist A separierbar, $V(B) > 0$, so gilt $p(A; B) > 0$.

(B) Ist A V-separierbar, $V(B) > 0$, so gilt $q(A; B) > 0$.

(C) Ist A konvex, $V(B) > 0$, so gilt mit $q(A; B) = 0$ auch $q(B; A) = 0$.

(D) Sind A und B konvex, so gilt mit $p(A; B) = 0$ auch $q(A; B) = 0$.

(E) Sind A und B konvex und gilt $q(A; B) = 0$, so sind A und B homothetisch.

(F) Sind A und B konvex und gilt $p(A; B) = 0$, so sind A und B homothetisch.

Es folgen die Beweise:

(A) Durch die durch das Dilatationszentrum hindurchgehende separierende Ebene E werde A in A' und A'' zerlegt. Wegen $E \cap A = 0$ gilt auch $A' \cap A'' = 0$ und mit A sind auch A' und A'' abgeschlossen. Es gibt dann einen von zwei zu E parallel liegenden Stützebenen E' (an A') und E'' (an A'') begrenzten

Parallelstreifen der Dicke $2\sigma > 0$, der im Innern keinen Punkt von A enthält. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß die den Streifen halbierende Symmetrieebene mit E zusammenfällt, daß weiter $E \cap B^0 \neq 0$ [B^0 = Volumkern von B] und daß durch E eine volumtreue Parallelzerlegung von A und B erzeugt wird. Durch eine passende Verschiebung von B im Raum läßt sich dies erzielen. Mit S' bzw. S'' wollen wir den durch E und E' bzw. den durch E und E'' begrenzten Parallelstreifen bezeichnen. Weiter sei K' bzw. K'' der durch E' bzw. E'' begrenzte Halbraum, in dem A' bzw. A'' liegt. Sind B' und B'' die beiden durch E erzeugten Teilmengen von B, so führen wir weiter noch die Mengen $B^* = B' \cap S'$ und $B^{**} = B'' \cap S''$ ein. Sind P' und P'' noch zwei Punkte, die den beiden Stützmengen $E' \cap A'$ und $E'' \cap A''$ angehören, so gilt offensichtlich $P' \times B^{**} \subset S'$ und $P'' \times B^* \subset S''$, da diese MINKOWSKIschen Additionen nur die passenden Translationen von B^{**} und B^* bewirken. Ferner gilt $A' \times B' \subset K'$ und $A'' \times B'' \subset K''$. Die vier Mengen $A' \times B'$, $A'' \times B''$, $P' \times B^{**}$, $P'' \times B^*$ sind Teilmengen von $A \times B$; ihre Durchschnitte liegen aber in Ebenen und sind demnach Nullmengen. Deshalb gilt die Relation

$$V(A \times B) \geq V(A' \times B') + V(A'' \times B'') + V(B^*) + V(B^{**})$$

und mit der gleichen Rechnung, die von (5) zu (9) führte, folgert man

$$p(A; B) \geq p(A'; B') + p(A''; B'') + V(B^*) + V(B^{**}).$$

Da $E \cap B^0 \neq 0$ ist, können nicht beide Mengen B^* und B^{**} Nullmengen sein und mit (11) folgt $p(A; B) > 0$, w. z. b. w.

(B) Die Bezeichnungen für Teilmengen, Streifen und Halbräume wie beim obenstehenden Beweis. Wählen wir das Dilatationszentrum in E, so kann B durch τB ersetzt werden. Ist τ ausreichend klein, so daß die Breite von τB in der zu E orthogonalen Richtung kleiner als 2σ ist, so gilt

$$(A' \times \tau B) \cap (A'' \times \tau B) = 0$$

und da

$$A \times \tau B = (A' \times \tau B) \cup (A'' \times \tau B)$$

ist, folgt die Relation $V(A \times \tau B) = V(A' \times \tau B) + V(A'' \times \tau B)$ und hieraus leicht $F(A; B) \geq F(A'; B) + F(A''; B)$; ebenso folgt mit passender Umrechnung $q(A; B) \geq q(A'; B) + q(A''; B) + R$, wobei die Restgröße durch

$$R = k\, V(B)^{1/k} \left\{ V(A')^{(k-1)/k} + V(A'')^{(k-1)/k} - V(A)^{(k-1)/k} \right\}$$

gegeben ist. Da A V-separiert ist, sind A' und A'' von positivem Maß; das nämliche trifft für B zu. Mit Rücksicht auf die elementare Ungleichung $u^\vartheta + v^\vartheta - (u+v)^\vartheta > 0$ [$0 < \vartheta < 1$, $u > 0$, $v > 0$] ist $R > 0$. Mit (11) folgt so $q(A; B) > 0$, w. z. b. w.

(C) Wir führen hier die Quotienten

$$r = r(\varrho) = [V(A \times \varrho B) - V(A)]/\varrho \qquad [0 < \varrho < 1]$$

$$s = s(\sigma) = [V(B \times \sigma A) - V(B)]/\sigma \qquad [0 < \sigma < 1]$$

ein. Da A konvex ist, gilt $A=(1-\varrho\sigma)A\times\varrho\sigma A$ und demnach ist

$$A\times\varrho B=(1-\varrho\sigma)A\times(\varrho\sigma A\times\varrho B).$$

Hieraus folgt mit Anwendung von (1) die Relation

$$V(A\times\varrho B)^{1/k}\geq(1-\varrho\sigma)\,V(A)^{1/k}+\varrho\,V(B\times\sigma A)^{1/k}.$$

Verwenden wir dies in der Darstellung $V(A\times\varrho B)=V(A)+\varrho r$, so läßt sich die Relation

$$V(B\times\sigma A)\leq\left\{[V(A)+\varrho r]^{1/k}-(1-\varrho\sigma)\,V(A)^{1/k}\right\}^k\varrho^{-k}$$

gewinnen. Dies führt zu einer Abschätzung für s, nämlich

$$s\leq\left(\left\{[V(A)+\varrho r]^{1/k}-(1-\varrho\sigma)\,V(A)^{1/k}\right\}^k-\varrho^k V(B)\right)\varrho^{-k}\sigma^{-1}.$$

Lassen wir hier σ fest und bedenken wir, daß nach Voraussetzung $\liminf\limits_{\varrho\to 0} r(\varrho)=k\,V(A)^{(k-1)/k}V(B)^{1/k}$ ist, so läßt sich

$$s\leq\left(V(A)\,[V(A)^{-1/k}\,V(B)^{1/k}+\sigma]^k-V(B)\right)\sigma^{-1}$$

folgern; es resultiert weiter

$$F(B;A)=\liminf_{\sigma\to 0}s(\sigma)\leq k\,V(B)^{(k-1)/k}\,V(A)^{1/k}.$$

Nach (2) kommt hier nur Gleichheit in Frage. Dies bedeutet aber, daß $q(B;A)=0$ ist; w. z. b. w.

(D) Es gilt $A\times B=A\times\alpha B\times\beta B$, $[\alpha,\beta\geq 0,\ \alpha+\beta=1]$. Nach (1) resultiert zunächst $V(A\times B)^{1/k}\geq V(A\times\alpha B)^{1/k}+\beta V(B)^{1/k}$ und mit gleichem Grunde $V(A\times\alpha B)^{1/k}\geq V(A)^{1/k}+\alpha V(B)^{1/k}$, so daß sich zusammen $V(A\times B)^{1/k}\geq V(A)^{1/k}+V(B)^{1/k}$ ergibt. Nach Voraussetzung kommt hier nur das Gleichheitszeichen in Frage. Dann muß aber auch weiter oben Gleichheit bestehen, so daß auch $p(A;\alpha B)=0$ ist. Hieraus folgt $q(A;B)=0$ auf triviale Weise.

(E) (*a*). Es sei zunächst A ein Simplex. Der Ursprung Z sei innerer Punkt von B, und mit $h_\nu(B)$ $(\nu=0,1,\ldots,k)$ wollen wir die $k+1$ Stützgrößen von B bezüglich Z in den Richtungen der $k+1$ Seitenflächen des Simplex A bezeichnen. Sind $f_\nu(A)$ $(\nu=0,1,\ldots,k)$ die $(k-1)$-dimensionalen Flächeninhalte der Seitenflächen von A, so erhellt eine einfache Betrachtung, daß

$$V(A\times\varrho B)\geq V(A)+\varrho\sum f_\nu(A)\,h_\nu(B)$$

sein muß. Hieraus resultiert $F(A;B)\geq\sum f_\nu(A)\,h_\nu(B)$. Bedeutet jetzt C das dem konvexen Körper B umschriebene, zu A homothetische Simplex, so daß $C=\lambda A$ und $C>B$ gilt, so ist $h_\nu(B)=h_\nu(C)=\lambda\,h_\nu(A)$; hierbei ist angenommen, daß A und C relativ zum Ursprung Z ähnlich liegen. Bedenkt man, daß $\sum f_\nu(A)\,h_\nu(A)=k\,V(A)$ gilt, so ergibt sich die Relation $F(A;B)\geq\lambda\,k\,V(A)$. Nach Voraussetzung ist aber $F(A;B)=k\,V(A)^{(k-1)/k}V(B)^{1/k}$ und so folgt $V(B)\geq\lambda^k V(A)=V(C)$. Wegen $C>B$ schließt man, daß $B=C$, also $B=\lambda A$ sein muß, w. z. b. w.

(*b*). Ist B ein Simplex, so ergibt sich aus (*a*) mit Rücksicht auf (C), daß dann A ein homothetisches Simplex darstellt.

(*c*). Es sei nun A ein beliebiger konvexer Körper. Mit $q(A;B)=0$ ist $q(A;\lambda B)=0$ $(\lambda>0)$. Wir wählen λ so, daß $V(A)=V(\lambda B)$ wird. Für die durch volumtreue Parallelzerlegungen von A und λB entstehenden Teilkörper $A'\subset A$ und $\lambda B'\subset\lambda B$ gilt mit Rücksicht auf (10) und (11b) wiederum $q(A';\lambda B')=0$ und außerdem bleibt die Volumgleichheit $V(A')=V(\lambda B')$ bestehen. Ist P ein eigentliches Teilsimplex von A, so läßt sich durch höchstens $k+1$ hintereinander ausgeführte volumtreue Parallelzerlegungen von A und λB ein konvexer Teilkörper Q von λB so gewinnen, daß $q(P;Q)=0$ und $V(P)=V(Q)$ ausfällt. Nach dem in (*a*) gewonnenen Ergebnis muß Q ein mit P translationsgleiches Simplex sein. Ist umgekehrt Q ein eigentliches Teilsimplex von λB, so folgt aus (*b*), daß A ein mit Q translationsgleiches Simplex P enthalten muß. Die beiden Körper A und λB enthalten also bis auf Translationen genau dieselben Teilsimplexe. Da sich eine Teilstrecke eines eigentlichen konvexen Körpers stets zu einem eigentlichen Teilsimplex ergänzen läßt, enthalten A und B auch bis auf Translationen die gleichen Teilstrecken. Insbesondere weisen die beiden Körper zwei parallele Durchmessersehnen auf. Wir verschieben B so, daß diese Durchmessersehnen zur Deckung kommen. Wählen wir einen Punkt $a\in A$ beliebig, und betrachten das von a mit der Durchmessersehne gebildete Dreieck, so muß auch λB ein translationsgleiches Dreieck enthalten. Da aber ein konvexer Körper nicht zwei verschiedene parallele Durchmessersehnen aufweisen kann, muß dieses Dreieck mit dem in A liegenden Ausgangsdreieck zusammenfallen. So folgt, daß $a\in\lambda B$ gilt. Demnach muß $A\subset\lambda B$, und wegen der Symmetrie auch $\lambda B\subset A$, oder also $A=\lambda B$ gelten. Also sind A und B homothetisch, w. z. b. w.

(F) Mit $p(A;B)=0$ folgt nach (D) auch $q(A;B)=0$ und mit (E) die Behauptung.

6. Es folgten die Beweise für die in Satz I und Satz II behaupteten Gleichheitsbedingungen. Es handelt sich um die beiden Aussagen:

I. Ist $p(A;B)=0$, $V(A)>0$, $V(B)>0$, so sind A und B homothetische konvexe Körper.

II. Ist $q(A;B)=0$, $V(A)>0$, $V(B)>0$ und $A=A^0$, $B=B^0$ [$A^0, B^0=$ Volumkerne von A, B], so sind A und B homothetische konvexe Körper.

Beweis I. Da A und B positives Maß haben, besitzen sie nichtleere Volumkerne A^0 und B^0 und da $V(A)=V(A^0)$, $V(B)=V(B^0)$, aber $V(A\times B)\geq V(A^0\times B^0)$ ist, folgt, daß mit $p(A;B)=0$ auch $p(A^0;B^0)=0$ gelten muß. Wir zeigen nun, daß A^0 konvex ist. In der Tat: Wir treffen die Gegenannahme, daß A^0 zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ enthält, nicht aber einen zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gelegenen Punkt $\mathfrak{r}$ der Verbindungsgeraden G. Damit bleibt auch eine Umgebung von $\mathfrak{r}$ zu A punktfremd. Durch k sukzessive ausgeführte volumtreue Parallelzerlegungen von A und B, erzeugt durch k passend gewählte, zur Geraden G in hinreichend kleinem positiven Abstand parallel gelegte Ebenen, läßt sich daher ein Teilmengenpaar A^{00} und B^{00} so gewinnen, daß A^{00} durch die in $\mathfrak{r}$ orthogonal zu G gelegte Ebene separiert wird und $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ enthält. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ volumverbunden sind, ist A^{00} sogar V-separiert. Da $V(A^{00})>0$,

folgt mit der Volumtreue der Zerlegung auch $V(B^{00})>0$. Aus (9) und (11) folgert man wie früher, daß auch $\mathfrak{p}(A^{00}; B^{00})=0$ gilt. Dies steht im Widerspruch zur Hilfsaussage (A). Also ist A^0 konvex und wegen der Symmetrie $\mathfrak{p}(A; B)=\mathfrak{p}(B; A)$ ist auch B^0 konvex. Nach Hilfsaussage (F) sind A^0 und B^0 homothetisch. Wir zeigen jetzt, daß $A=A^0$ ist. Andernfalls sei $\mathfrak{p}$ ein Punkt des Schleiers von A und es sei $A^1=A^0\cup\mathfrak{p}$. Mit $\mathfrak{p}(A; B)=0$ folgt trivial auch $\mathfrak{p}(A^1; B^0)=0$ und nun ist A^1 separierbar, da $\mathfrak{p}$ nicht zu A^0 gehört und A^0 konvex ist. Mit $V(B^0)>0$ folgt aus Hilfsaussage (A) ein Widerspruch. Wegen der Symmetrie gilt auch $B=B^0$ und damit ist der Nachweis der Behauptung I erbracht.

Beweis II. Wir zeigen, daß A^0 konvex ist. Ausgehend von der Gegenannahme erzeugen wir durch die gleichen volumtreuen Parallelzerlegungen, wie sie beim Beweis I erörtert wurden, das Teilmengenpaar A^{00} und B^{00} und schließen jetzt wieder aus (10) und (11), daß mit $q(A^0; B^0)=0$ auch $q(A^{00}; B^{00})=0$ sein muß. Da aber A^{00} V-separierbar und $V(B^{00})>0$ ist, haben wir einen Widerspruch mit Hilfsaussage (B). Da also A^0 konvex ist, folgt mit Hilfsaussage (C) auch $q(B^0; A^0)=0$ und hieraus wieder, daß auch B^0 konvex ist. Nach Hilfsaussage (E) sind A^0 und B^0, also A und B homothetisch. Damit ist auch die Behauptung II bewiesen.

7. Noch eine Schlußbemerkung zur Entstehung der vorliegenden Abhandlung: Die gesamte Planung, insbesondere die induktive Konstruktion mit den beiden BRUNN-MINKOWSKIschen Defiziten [(7) und (8)] und ihr Einsatz zum Nachweis der Gleichheitsbedingungen stammt vom zweiten Verfasser. Der erste Verfasser hat lediglich verschiedene Kürzungen und methodische Bereinigungen vorgenommen und den Symmetriesatz (Hilfsaussage C) eingebaut, der gestattet, sich bei der Formulierung der Gleichheitsbedingung im isoperimetrischen Satz (Satz II) von einer zusätzlichen Voraussetzung über die Konvexität der zweiten Menge zu befreien.

Mathematisches Seminar der Universität Bern
Scuola Germanica Milano

(Eingegangen am 26. November 1955)

CHEN, YUNG-MING
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 9—12 (1956)

On the integrability of functions defined by trigonometrical series

By
CHEN YUNG-MING

1. This note is concerned with some integrability properties with trigonometric series with monotone coefficients. Suppose λ_n is positive and decreases steadily to zero as $n \to \infty$, then in any interval $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ the series

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos n x, \tag{1.1}$$

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin n x \tag{1.2}$$

converge uniformly ([5], § 1.23).

The aim of this note is to establish some necessary and sufficient conditions of the integrability of $x^{-Y}\{f(x)\}^p$, $x^{-Y}\{g(x)\}^p$ for $p > 0$; while $p = 1$ had been completed previously by BOAS [1] and HEYWOOD ([4] (I), (II)). I shall now prove that if $p > 1$, $0 < Y < 1$; $x^{-Y}\{f(x)\}^p$, $x^{-Y}\{g(x)\}^p$ are integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$\sum_1^\infty n^{Y+p-2}\lambda_n^p \tag{1.3}$$

is convergent (Theorem 1, Theorem 2). These theorems had previously been proved for $Y = 0$ by HARDY and LITTLEWOOD [2], [3]. If $0 < p < 1$, $Y > 0$, and if λ_n decreases steadily to zero, and $\{\lambda_n\}$ is a convex sequence such that $n\lambda_n$ is non-decreasing; $x^{-Y}\{g(x)\}^p$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if (1.3) is convergent (Theorem 3). In the following theorems, I shall denote C_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ positive constants depending only on p and Y.

2. LEMMA 1. If a trigonometric series converges except for an enumerable number of points, to an integrable function $f(x)$, the series is the FOURIER series of $f(x)$ ([5], § 11.32).

LEMMA 2 ([5], § 4.17). Let (i) $p > 1$, (ii) $Y > 1 - p$, $f(x) \in L(0, \infty)$, $F(x) = \int_0^x |f(x)|\, dx$, and if $x^{-Y}\{f(x)\}^p \in L(0, \infty)$, then

$$\int_0^\infty \left\{\frac{F(x)}{x}\right\}^p x^{-Y}\, dx \leq C_1 \int_0^\infty x^{-Y}|f(x)|^p\, dx. \tag{2.1}$$

THEOREM 1. Suppose that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \to 0$,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos n x. \tag{2.2}$$

Then for: (i) $p>1$, (ii) $0<Y<1$; $x^{-Y}\{f(x)\}^p \in L(0,\pi)$ if and only if the series

$$\sum_1^\infty n^{Y+p-2}\lambda_n^p \tag{2.3}$$

is convergent.

THEOREM 2. If $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \to 0$,

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx. \tag{2.4}$$

Then for: (i) $p>1$, (ii) $0<Y<1$; $x^{-Y}\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$ if and only if the series (2.3) is convergent.

Proof of Theorem 1 and Theorem 2.

The proofs of Theorem 1, Theorem 2 are similar to a proof given in ([5], p. 212/3); except some changes should be added. I shall now present an exampling proof of Theorem 2:

(a) To show that the condition is necessary, suppose that $\int_0^\pi x^{-Y}|g(x)|^p dx$ is finite, it follows that $g(x)\in L^p(0,\pi)$; the series (2.4) is $L(0,\pi)$. By Lemma 1, $\sum_1^\infty \lambda_n \sin nx$ is the FOURIER series of $g(x)$. The series can be term by term integrated. Let $G(x)=\int_0^x g(x)\,dx$, $H(x)=\int_0^x |g(x)|\,dx$. Then

$$\begin{cases} G(x) = \sum_1^\infty (\lambda_n/n)(1-\cos nx) \\ \quad = 2\sum_1^\infty (\lambda_n/n)\sin^2(nx/2). \end{cases} \tag{2.5}$$

Since $\sin u \geq u/\pi$ $(0<u<\pi/2)$, we have

$$\begin{cases} G(\pi/2n) \geq 2 \sum_{m=[n/3+1]}^{[2n/3]} \left(\frac{\lambda_m}{m} + \frac{\lambda_{m+n}}{m+n} + \cdots\right)\sin^2(m\pi/2n) \\ \quad \geq C_2 \lambda_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

But since $0<Y<1$, $Y+p-2<p-1$, $H(x)$ is a non decreasing function of x. By Lemma 2,

$$\begin{cases} \sum_2^\infty n^{Y+p-2}\lambda_n^p \leq C_3 \sum_2^\infty n^{Y+p-2}\{G(\pi/2n)\}^p \\ \quad \leq C_3 \sum_2^\infty n^{Y+p-2}\{H(\pi/2n)\}^p \\ \quad \leq C_4 \sum_2^\infty \int_{\pi/n}^{\pi/(n-1)} x^{-Y}\left\{\frac{H(x/2)}{x}\right\}^p dx \\ \quad \leq C_5 \sum_2^\infty \int_{\pi/2n}^{\pi/2(n-1)} x^{-Y}\left\{\frac{H(x)}{x}\right\}^p dx \\ \quad \leq C_5 \int_0^\pi x^{-Y}\left\{\frac{H(x)}{x}\right\}^p dx \\ \quad \leq C_6 \int_0^\pi x^{-Y}|g(x)|^p dx. \end{cases} \tag{2.7}$$

(b) To show that the condition is sufficient, consider the partial sums $q_n(x)$ of the series $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots$

$$q_n(x) = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = O(x^{-1}). \tag{2.8}$$

By a corollary of ABEL's formula ([5], § 1.22),

$$|g(x)| \leq \sum_1^n |\lambda_\nu| + \left| \sum_{n+1}^\infty \lambda_\nu \sin \nu x \right| \leq L_n + \pi \lambda_n / x, \tag{2.9}$$

$$L_n = \sum_1^n \lambda_\nu \geq n \lambda_n. \tag{2.10}$$

We have then

$$|g(x)| \leq C_7 L_n \quad (\pi/(n+1) \leq x \leq \pi/n) \tag{2.11}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi x^{-Y} |g(x)|^p \, dx &= \sum_1^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} x^{-Y} |g(x)|^p \, dx \\ &\leq C_8 \sum_1^\infty L_n^p \{n^{Y-1} - (n+1)^{Y-1}\} \\ &\leq C_9 \sum_1^\infty n^{Y-2} L_n^p. \end{aligned} \right. \tag{2.12}$$

It remains to show that (2.12) is convergent if (2.3) is convergent. Let $l(x) = \lambda_n$, $n-1 \leq x < n$; $L(x) = \int_0^\infty l(x)\, dx \sim L_{[x]}$, as x tends to infinity. Since $Y + p - 2 > -1$, $\sum_1^\infty n^{Y+p-2} \lambda_n^p < \infty$ implies $\{l(x)\}^p x^{Y+p-2} \in L(0, \infty)$, where $0 < Y < 1$, $Y + p - 2 < p - 1$. By Lemma 2,

$$\int_0^\infty x^{Y+p-2} \{L(x)/x\}^p \, dx < \infty. \tag{2.13}$$

It follows that

$$[x]^{Y-2} L_{[x]}^p \in L(1, \infty). \tag{2.14}$$

The right of (2.12) is convergent. This completes the proof of Theorem 2.

REMARK 1. If λ_n is ultimately positive, and decreases steadily to zero as n tends to infinity; Theorem 1, Theorem 2 remain true. It is sufficient to consider an exampling proof for Theorem 1. Suppose that, if $n \geq N$,

$$\lambda_n \geq \lambda_{n+1} \geq \cdots \to 0.$$

Then $f(x) = \Phi(x) - P_N(x)$, where $\Phi(x)$ satisfying the conditions of Theorem 1 and $P_N(x)$ is a trigonometric polynomial of order N.

$$|P_N(x)| < C_{10}, \tag{2.15}$$

$$|f(x)| \leq 2 \max\{\Phi, C_{10}\}, \tag{2.16}$$

$$|f(x)|^p \leq C_{11} |\Phi(x)|^p + C_{12}. \tag{2.17}$$

But since $0<Y<1$, we have

$$\int_0^{\pi} x^{-Y}|f(x)|^p\,dx \leq C_{11}\int_0^{\pi} x^{-Y}|\Phi(x)|^p\,dx + C_{13}, \tag{2.18}$$

so that if N is finite, the result of Theorem 1 remains true.

3. THEOREM 3. If (i) $0<p<1$, (ii) $Y>0$, (iii) $\{\lambda_n\}$ is convex, and decreases steadily to zero, such that $n\lambda_n$ is non-decreasing;

$$g(x)=\sum_1^{\infty}\lambda_n \sin nx.$$

Then $x^{-Y}\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$ if and only if the series (1.3) is convergent.

For the proof, it may be seen that Theorem 3 is a nearly trivial consequence of the following lemma:

LEMMA 3 ([5], § 5.211). If λ_n is a convex sequence and decreases steadily to zero such that $n\lambda_n$ is non-decreasing, the sum of the series

$$g(x)=\sum_1^{\infty}\lambda_n \sin nx \sim x^{-1}\lambda_n, \tag{3.1}$$

when $\pi/2n \leq x \leq \pi/2(n-1)$, $n\to\infty$.

REMARK 2. (a) In case λ_n is ultimately decreasing to zero, Theorem 3 remains true. The proof is nearly the same as in Remark 1.

(b) If $\sum_1^{\infty} n^{Y+p-2}\lambda_n^p$ is convergent, on account of $n\lambda_n$ is non-decreasing, we conclude that $0<Y<1$.

My thanks are due to the referee for some improvements in the presentation of this note.

References

[1] BOAS, R. P.: Integrability of trigonometric series (III). Quat. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217—221 (1952). — [2] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. Math. Annalen **97**, 159—209 (1926). — [3] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. **6**, 3—9 (1931). — [4] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. (I) Quart. J. Math. (Oxford) (5) **17**, 71—76 (1954); (II) ibid. (6) **21**, 77—79 (1955). — [5] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series (Warszawa-Lwów, 1935).

Department of Mathematics, Nanyang University, Jurong Road, Singapore

(Eingegangen am 18. Februar 1956)

HODGES, J. H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 13—24 (1956)

Weighted partitions for symmetric matrices in a finite field

By
JOHN H. HODGES

1. *Introduction.* For $\alpha \in GF(q)$, where $q = p^f$ is odd, put

$$e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}, \quad t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \cdots + \alpha^{p^{f-1}}. \tag{1.1}$$

If $A = (\alpha_{ij})$ is a square matrix with elements in $GF(q)$, define $\sigma(A) = \sum_i \alpha_{ii}$. In this paper we consider the sum

$$S = S(B, U, A) = \sum_{X'AX = B} e\{\sigma(U'X + X'U)\}, \tag{1.2}$$

where A is a non-singular symmetric matrix of order m, B is a symmetric matrix of order t, U is an arbitrary $m \times t$ matrix and the summation is over all $m \times t$ matrices X satisfying the equation $X'AX = B$, all matrices having elements in $GF(q)$. If $U = 0$, S is the number of solutions X of $X'AX = B$, which is given in [3]. In [2], L. CARLITZ has treated the problem for $t = 1$, finding explicit values for this S in all except one case and in all cases expressing this S in terms of certain Kloosterman sums over $GF(q)$. In the present paper it is shown that the general sum (1.2) can be expressed in terms of generalized Kloosterman sums defined for symmetric matrices over $GF(q)$. A number of properties of these Kloosterman sums are also given.

2. *Notation and preliminaries.* Let $q = p^f$, p odd. Numbers of $GF(q)$ will be denoted by lower case Greek letters $\alpha, \beta, \ldots$ except as indicated. Italic capitals $A, B, \ldots$ will denote matrices with elements in $GF(q)$. $A(m, n)$ will denote a matrix of m rows and n columns; the transpose of A will be denoted by A'. If A is a symmetric matrix of order m and rank r, there exists a non-singular matrix T such that $T'AT = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ where $\alpha_i \neq 0$. The number $\lambda(A) = \psi(\delta(A))$, where $\delta(A) = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$ and $\psi(\alpha) = 0, 1, -1$ according as α is zero, a square or a non-square of $GF(q)$, is called the *invariant* of A.

If $A = (\alpha_{ij})$, then $\sigma(A) = \sum_i \alpha_{ii}$ is the *trace* of A. If $A = (\alpha_{ij})$ and $B = (\beta_{ij})$ are symmetric, then $\sigma(AB) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij}$.

For $\alpha \in GF(q)$ we define

$$e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}, \quad t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \cdots + \alpha^{p^{f-1}} \tag{2.1}$$

from which it follows that $e(\alpha + \beta) = e(\alpha)\, e(\beta)$ and

$$\sum_\xi e(\alpha \xi) = \begin{cases} q & (\alpha = 0) \\ 0 & (\alpha \neq 0), \end{cases} \tag{2.2}$$

where the summation is over all $\xi \in GF(q)$. We define the Gauss sum [1; § 3]

$$G(\alpha) = \sum_{\xi} e(\alpha \xi^2). \tag{2.3}$$

Then we have

$$G(\alpha) = \psi(\alpha)\, G(1) \qquad (\alpha \neq 0); \tag{2.4}$$

moreover

$$G^2(1) = \psi(-1)\, q. \tag{2.5}$$

If A is a symmetric matrix of order m then using (2.2) we may show that

$$\sum_{B} e\{\sigma(AB)\} = \begin{cases} q^{\frac{1}{2}m(m+1)} & (A = 0) \\ 0 & (A \neq 0), \end{cases} \tag{2.6}$$

where the summation is over all symmetric matrices B of order m.

We will also need the well-known formula for the number of non-singular matrices of order m, namely

$$g_m = \prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i) = q^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (1 - q^{-i}). \tag{2.7}$$

3. *The sum* $S(B, U, A)$. Let A be a non-singular symmetric matrix of order m, B a symmetric matrix of order t and U an arbitrary $m \times t$ matrix. Then we define

$$S = S(B, U, A) = \sum_{X} e\{\sigma(U'X + X'U)\}, \tag{3.1}$$

where the summation is over all $m \times t$ matrices X satisfying the equation $X'AX = B$. In view of (2.6) we may write

$$\begin{cases} q^{\frac{1}{2}t(t+1)} S = \sum_{X} e\{\sigma(U'X + X'U)\} \sum_{C} e\{\sigma((X'AX - B)C)\} \\ \qquad = \sum_{C} e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\}, \end{cases} \tag{3.2}$$

where the summations are over all $X = X(m, t)$ and all symmetric C of order t. In order to proceed further we divide the C's in the right member of (3.2) into three classes: $C = 0$, $|C| = 0$ but $C \neq 0$, and $|C| \neq 0$. If we group together all C's in the same class, the right member of (3.2) breaks up into three sums, which we label S_1, S_2, S_3 and consider separately.

Corresponding to $C = 0$ on the right of (3.2) we consider

$$S_1 = \sum_{X\,(m,t)} e\{\sigma(U'X + X'U)\} = \sum_{X\,(m,t)} e\{\sigma(2U'X)\}. \tag{3.3}$$

With $U = (\mu_{ij})$ and $X = (\xi_{ij})$, (3.3) becomes

$$S_1 = \sum_{X\,(m,t)} e\left\{2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t} \mu_{ij} \xi_{ij}\right\} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{t} \sum_{\xi} e(2\mu_{ij}\xi), \tag{3.4}$$

where the inner sum on the right is over all $\xi \in GF(q)$. In view of (2.2), (3.4) gives

THEOREM 1. *If S_1 is the sum defined by* (3.3), *then*

$$S_1 = \begin{cases} q^{mt} & (U = 0) \\ 0 & (U \neq 0). \end{cases} \tag{3.5}$$

4. *The sum* S_3. Corresponding to the C's on the right of (3.2) for which $|C| \neq 0$ we consider the sum

$$S_3 = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X(m,t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\}, \tag{4.1}$$

where A is symmetric and non-singular of order m, B is symmetric of order t, and C runs through all non-singular symmetric matrices of order t. For a fixed C, if we put

$$Y = X + A^{-1}UC^{-1},$$

it is clear that as X runs through all $m \times t$ matrices, Y does likewise. Putting $W = U'A^{-1}U$ we have

$$\sigma(CX'AX + U'X + X'U) = \sigma(CY'AY - WC^{-1}).$$

Therefore

$$\sum_{X(m,t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\} = e\{-\sigma(WC^{-1})\} \sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(CY'AY)\}. \tag{4.2}$$

From [3; § 5] we have

$$\sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(CY'AY)\} = \lambda^m(C)\,\lambda^t(A)\,G^{mt}(1), \tag{4.3}$$

where $\lambda(C)$ and $G(1)$ are defined in **2**. If we use the value (4.3) for the inner sum in the right member of (4.2), substitute the resulting expression into (4.1), and simplify we get

$$S_3 = \lambda^t(A)\,G^{mt}(1) \sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C)\, e\{\sigma(BC + WC^{-1})\}. \tag{4.4}$$

5. *Generalized Kloosterman sums.* If B and W are symmetric matrices of order n we define the generalized Kloosterman sums

$$K_n(B, W) = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\}, \quad K_n(B) = K_n(B, I), \tag{5.1}$$

and

$$L_n(B, W) = \sum_{|C| \neq 0} \lambda(C)\, e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\}, \quad L_n(B) = L_n(B, I), \tag{5.2}$$

where the summations are over all non-singular symmetric matrices C of order n. In [3; § 7] L. CARLITZ has defined the sum

$$H(B, r, \lambda) = \sum_{C} e\{-\sigma(BC)\},$$

where the summation is over all symmetric C of order n, rank r and invariant λ. Using the definitions (5.1) and (5.2) we can easily show that

$$K_n(B,0) = K_n(0,B) = H(B,n,1) + H(B,n,-1) \tag{5.3}$$

and

$$L_n(B,0) = L_n(0,B) = H(B,n,1) - H(B,n,-1). \tag{5.4}$$

If V is a non-singular symmetric matrix of order n, we have

$$K_n(VB, WV^{-1}) = K_n(B,W) \quad \text{and} \quad K_n(BV) = K_n(B,V), \tag{5.5}$$

and

$$L_n(VB, WV^{-1}) = \lambda(V)\, L_n(B,W) \quad \text{and} \quad L_n(BV) = \lambda(V)\, L_n(B,V). \tag{5.6}$$

6. *S_3 in terms of Kloosterman sums.* If C is a non-singular symmetric matrix of order t then $\lambda(C) = \pm 1$. If B and W are symmetric matrices of order t, then for m even, since $\lambda^m(C) = 1$, we have using the definition (5.1)

$$\sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C)\, e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} = K_t(B,W). \tag{6.1}$$

For m odd, since $\lambda^m(C) = \lambda(C)$, using (5.2) we have

$$\sum_{|C| \neq 0} \lambda^m(C)\, e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} = L_t(B,W). \tag{6.2}$$

Since $G^2(1) = \psi(-1)q$, (6.1) and (6.2) together with (4.4) give

THEOREM 2. *If A is non-singular and symmetric of order m, B is symmetric of order t, and S_3 is the sum defined by* (4.1), *then*

$$S_3 = \begin{cases} \lambda^t(A)\, \psi^{nt}(-1)\, q^{nt} K_t(B,W), & (m = 2n), \\ \lambda^t(A)\, \psi^{nt}(-1)\, q^{nt} G^t(1)\, L_t(B,W), & (m = 2n+1), \end{cases} \tag{6.3}$$

where $W = U'A^{-1}U$.

7. *The sum S_2.* Corresponding to the C's on the right of (3.2) for which $|C| = 0$ but $C \neq 0$ we consider the sum

$$S_2 = \sum_C e\{-\sigma(BC)\} \sum_{X\,(m,t)} e\{\sigma(CX'AX + U'X + X'U)\}, \tag{7.1}$$

where the outer summation is over all symmetric C of order t such that $|C| = 0$ but $C \neq 0$.

For fixed r, $0 < r < t$, let C_r denote a symmetric matrix of order t having a non-singular array of order r in its upper left-hand corner and zero's elsewhere. Let $C_r(\lambda)$ denote a C_r having invariant λ. The number of such $C_r(\lambda)$ is clearly $N(r,r,\lambda)$, where $N(m,r,\lambda)$ is the number of symmetric matrices of order m, rank r and invariant λ. From [3; Theorem 3] we have

$$N(r,r,\lambda) = \frac{g_r}{E(r,\lambda)}, \tag{7.2}$$

where $E(m,\lambda)$, the number of non-singular V of order m such that $V'AV = A$ with A non-singular and symmetric of order m and invariant λ, is given by

[3; Theorem 2]. In [3; § 4] CARLITZ shows that as V runs through all non-singular matrices of order t the form $VC_r(\lambda)\,V'$ runs through all matrices of order t, rank r and invariant λ, each such matrix appearing the same number of times, namely

$$h_t(r,\lambda) = q^{r(t-r)} g_{t-r} E(r,\lambda). \tag{7.3}$$

Therefore, if $f(x)$ is a function defined for symmetric matrices of order t and rank r we have

$$\sum_C f(C) = \sum_{|V|\neq 0} \sum_{\lambda} \frac{1}{N(r,r,\lambda)} \sum_{C_r(\lambda)} \frac{1}{h_t(r,\lambda)} f[VC_r(\lambda)\,V'], \tag{7.4}$$

where the summations are over all symmetric C of order t and rank r, all non-singular V of order t, $\lambda = \pm 1$ and all $C_r(\lambda)$ as defined above. In view of (7.2) and (7.3), (7.4) simplifies to give

$$\sum_C f(C) = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V|\neq 0} \sum_{C_r} f(VC_rV'), \tag{7.5}$$

where the inner sum on the right is over all symmetric C_r as defined above.

For fixed C_r and non-singular V of order t, if we put $X = TYV^{-1}$ and $U^* = T'U(V^{-1})'$, where $X = X(m,t)$ and $U = U(m,t)$, we can write

$$\sum_{X(m,t)} e\{\sigma(VC_rV'X'AX + U'X + X'U)\} = \sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(C_rY'NY + U^{*\prime}Y + Y'U^*)\}, \tag{7.6}$$

where A is symmetric and non-singular of order m and the summations are over all $m \times t$ matrices X and Y, and $T'AT = N = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

If we put $C_r = (\gamma_{ij})$ with $\gamma_{ij} = 0$ for $i > r$ or $j > r$, $Y = (\xi_{ki})$, $U^* = (\mu_{ij})$ we have

$$\begin{aligned}\sigma(C_rY'NY + U^{*\prime}Y + Y'U^*) &= \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi_{ki}\xi_{kj} + 2\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} \mu_{ki}\xi_{ki} \\ &= \Big\{\sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi_{ki}\xi_{kj} + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} \mu_{ki}\xi_{ki}\Big\} + 2\sum_{i=r+1}^{t}\sum_{k=1}^{m} \mu_{ki}\xi_{ki}.\end{aligned}$$

Then, with $Y_1 = (\xi_{ki})$ for $1 \le i \le r$, $Y_2 = (\xi_{ki})$ for $r+1 \le i \le t$, $U_1^* = (\mu_{ij})$ for $1 \le j \le r$, $U_2^* = (\mu_{ij})$ for $r+1 \le j \le t$, and $C_0 = (\gamma_{ij})$ for $1 \le i \le r$, $1 \le j \le r$, it is clear that we can write

$$\begin{aligned}&\sum_{Y(m,t)} e\{\sigma(C_rY'NY + U^{*\prime}Y + Y'U^*)\} \\ &= \sum_{Y_1(m,r)} e\{\sigma(C_0Y_1'NY_1 + U_1^{*\prime}Y_1 + Y_1'U_1^*)\} \cdot \sum_{Y_2(m,t-r)} \prod_{i=r+1}^{t}\prod_{k=1}^{m} e(2\mu_{ki}\xi_{ki}).\end{aligned} \tag{7.7}$$

If we use (2.2), we see that the inner sum in the right member of (7.7) becomes

$$(7.8)\qquad f_r(U^*) = \prod_{i=r+1}^{t} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\xi} e(2\mu_{ki}\xi) = \begin{cases} q^{m(t-r)} & (\mu_{ki}=0,\ r+1\le i\le t) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

where ξ runs through all numbers of $GF(q)$. Since $f_r(U^*)$ is independent of Y_1, (7.7) becomes

$$(7.9)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{Y(m,t)} e\{\sigma(C_r Y'NY + U^{*\prime}Y + Y'U^*)\} \\ \qquad = f_r(U^*) \sum\limits_{Y_1(m,r)} e\{\sigma(C_0 Y_1' N Y_1 + U_1^{*\prime} Y_1 + Y_1' U_1^*)\}. \end{cases}$$

If B is symmetric of order t and V is non-singular of order t, let $B^*=V'BV=(\beta_{ij})$ and $B_0^*=(\beta_{ij})$ for $1\le i\le r$, $1\le j\le r$. Then with C_r and C_0 defined as above we can show that

$$(7.10)\qquad e\{\sigma(-BVC_rV')\} = e\{\sigma(-B_0^*C_0)\}.$$

Now, in view of (7.5), we can write for $0<r<t$,

$$(7.11)\qquad \begin{cases} S_2(r) = \sum\limits_{C} e\{-\sigma(BC)\} \sum\limits_{X(m,t)} e\{\sigma(CX'NX + U'X + X'U)\} \\ \qquad = \dfrac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum\limits_{|V|\neq 0} \sum\limits_{C_r} e\{-\sigma(BVC_rV')\} \times \\ \qquad\quad \times \sum\limits_{X(m,t)} e\{\sigma(VC_rV'X'NX + U'X + X'U)\}, \end{cases}$$

where A is symmetric and non-singular of order m, B is symmetric of order t, and the summations are over all symmetric C of order t and rank r, all non-singular V of order t, and all symmetric C_r as defined above. If we use (7.6), (7.9) and (7.10) on the right side of (7.11) we get

$$(7.12)\qquad \begin{cases} S_2(r) = \dfrac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum\limits_{|V|\neq 0} f_r(U^*) \sum\limits_{|C_0|\neq 0} e\{-\sigma(B_0^*C_0)\} \times \\ \qquad\quad \times \sum\limits_{Y_1(m,r)} e\{\sigma(C_0 Y_1' N Y_1 + U_1^{*\prime} Y + Y' U_1^*)\}, \end{cases}$$

where C_0 runs through all non-singular symmetric matrices of order r, $U^*=T'U(V^{-1})'=(\mu_{ij})$ and $U_1^*=(\mu_{ij})$ for $1\le j\le r$, $B^*=V'BV=(\beta_{ij})$ and $B_0^*=(\beta_{ij})$ for $1\le i\le r$, $1\le j\le r$. Taken together, the two inner sums in the right member of (7.12) correspond to the sum S_3 defined by (4.1). Consequently, with $W_0^*=(U_1^*)'N^{-1}U_1^*$, if we apply Theorem 2 to these inner sums, (7.12) becomes

$$(7.13)\ S_2(r) = \frac{1}{q^{r(t-r)} g_r g_{t-r}} \sum_{|V|\neq 0} f_r(U^*) \begin{cases} \lambda^r(A)\psi^{nr}(-1)\, q^{nr} K_r(B_0^*, W_0^*) & (m=2n) \\ \lambda^r(A)\psi^{nr}(-1)\, q^{nr} G^r(1)\, L_r(B_0^*, W_0^*) & (m=2n+1). \end{cases}$$

In view of the definition (7.11) of $S_2(r)$ it is clear that S_2 as defined by (7.1) is the sum of all $S_2(r)$ for $0<r<t$. Thus, we have proved

9254 – 66

THEOREM 3. *If A is non-singular and symmetric of order m and B is symmetric of order t, and S_2 is the sum defined by (7.1), then*

$$(7.14)\qquad \begin{cases} S_2 = \sum_{r=1}^{t-1} \dfrac{\lambda^r(A)\,\psi^{nr}(-1)\,q^{r(n-t+r)}}{g_r g_{t-r}} \times \\ \qquad \times \begin{cases} \sum\limits_{|V|\neq 0} f_r(U^*)\,K_r(B_0^*, W_0^*) & (m=2n) \\ G^r(1) \sum\limits_{|V|\neq 0} f_r(U^*)\,L_r(B_0^*, W_0^*) & (m=2n+1), \end{cases} \end{cases}$$

where the summations in (7.14) are over all non-singular V of order t; $U^* = T'U(V^{-1})' = (\mu_{ij})$, $U_1^* = (\mu_{ij})$ for $1 \le j \le r$, and $W_0^* = (U_1^*)'N^{-1}U_1^*$; $B^* = V'BV = (\beta_{ij})$ and $B_0^* = (\beta_{ij})$ for $1 \le i \le r$, $1 \le j \le r$; and $f_r(U)$, $K_r(B,W)$ and $L_r(B,W)$ are defined by (7.8), (5.1) and (5.2) respectively and $T'AT = N$ is the normal form of A.

8. *The main result.* We are now able to sum up the results we have obtained in the

MAIN THEOREM. *Let A be a non-singular symmetric matrix of order m, B a symmetric matrix of order t and U an arbitrary $m \times t$ matrix. Then if $S = S(B, U, A)$ is the sum defined by (3.1), we have*

$$(8.1)\qquad S = q^{-\frac{1}{2}t(t+1)}(S_1 + S_2 + S_3),$$

where S_1, S_2 and S_3 are given by Theorems 1, 3, 2, respectively.

It is of interest to perform a check on S_2. Let us define $f_t(U) = 1$ where U is an $m \times t$ matrix and consider (7.13) for $r = t$. In this case $U_1^* = U^*$, $W_0^* = V^{-1}W(V^{-1})'$ and $B_0^* = B^* = V'BV$ so that (7.13) becomes

$$(8.2)\qquad S_2(t) = \frac{\lambda^t(A)\,\psi^{nt}(-1)\,q^{nt}}{g_t} \begin{cases} \sum\limits_{|V|\neq 0} K_t\big(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})'\big) & (m=2n) \\ G^t(1) \sum\limits_{|V|\neq 0} L_t\big(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})'\big) & (m=2n+1). \end{cases}$$

Since, for $|V| \neq 0$, by (5.5) and (5.6) we have

$$K_t\big(V'BV, (V^{-1})'\big) = K_t\big(V'B, W(V^{-1})'\big) = K_t(B, W)$$

and

$$L_t\big(V'BV, V^{-1}W(V^{-1})'\big) = \lambda(V)\,L_t\big(V'B, W(V^{-1})'\big) = L_t(B, W),$$

it is clear that the summands in (8.2) are independent of V. Since the number of non-singular V of order t is g_t, (8.2) reduces to

$$(8.3)\qquad S_2(t) = \lambda^t(A)\,\psi^{nt}(-1)\,q^{nt} \begin{cases} K_t(B, W) & (m=2n) \\ G^t(1)\,L_t(B, W) & (m=2n+1), \end{cases}$$

which coincides with the value of S_3 given by Theorem 2.

9. *Further properties of the Kloosterman sums.* In the definition (5.1) of $K_n(B;W)$ replace B by $B - X'AX$, where A is symmetric and non-singular

of order m and $X = X(m, n)$. Then summing over all $X(m, n)$ we get

$$(9.1)\quad \sum_{X(m,n)} K_n(B - X'AX, W) = \sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\} \sum_{X(m,n)} e\{\sigma(CX'AX)\},$$

where C runs through all non-singular symmetric matrices of order n. Using (4.3) the right member of (9.1) becomes

$$\sum_{|C| \neq 0} e\{-\sigma(BC + WC^{-1})\}\, \lambda^m(C)\, \lambda^n(A)\, G^{mn}(1).$$

Therefore, in view of the definitions of $K_n(B,W)$ and $L_n(B,W)$, this proves (compare [3; equation (7.5)])

THEOREM 4. *If B is symmetric of order n and A is non-singular and symmetric of order m, then*

$$(9.2)\quad \sum_{X(m,n)} K_n(B - X'AX, W) = \lambda^n(A)\, G^{mn}(1) \begin{cases} K_n(B,W) & (m \text{ even}) \\ L_n(B,W) & (m \text{ odd}), \end{cases}$$

where $K_n(B,W)$ and $L_n(B,W)$ are defined by (5.1) and (5.2).

In similar fashion we may prove

THEOREM 5. *If B is symmetric of order n and A is non-singular and symmetric of order m, then*

$$(9.3)\quad \sum_{X(m,n)} L_n(B - X'AX, W) = \lambda^n(A)\, G^{mn}(1) \begin{cases} L_n(B,W) & (m \text{ even}) \\ K_n(B,W) & (m \text{ odd}). \end{cases}$$

If we multiply $K_n(B,W)$ by $e\{\sigma(BS)\}$ and sum over all symmetric B of order n we get (compare [3; equation (7.6)])

$$(9.4)\quad \sum_B K_n(B,W)\, e\{\sigma(BS)\} = \begin{cases} 0 & (|S| = 0) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)} e\{-\sigma(WS^{-1})\} & (|S| \neq 0). \end{cases}$$

Similarly

$$(9.5)\quad \sum_B L_n(B,W)\, e\{\sigma(B,S)\} = \begin{cases} 0 & (|S| = 0) \\ \lambda(S)\, q^{\frac{1}{2}n(n+1)} e\{-\sigma(WS^{-1})\} & (|S| \neq 0). \end{cases}$$

We may easily prove (compare [3; equation (7.8)])

THEOREM 6. *If B_1, B_2, W_1, W_2 are fixed symmetric matrices of order n, then*

$$(9.6)\quad \sum_B K_n(B_1 + B, W_1)\, K_n(B_2 - B, W_2) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} K_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

$$(9.7)\quad \sum_B L_n(B_1 + B, W_1)\, L_n(B_2 - B, W_2) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} K_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

$$(9.8)\quad \sum_B K_n(B_1 + B, W_1)\, L_n(B_2 - B, W_1) = q^{\frac{1}{2}n(n+1)} L_n(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

where the sums are over all symmetric B of order n.

We will give the proof of (9.7). The proofs of (9.6) and (9.8) are similar. We have

$$L_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_1-B,W_2)$$

$$=\sum_{|C|\neq 0}\lambda(C)\,e\{-\sigma((B_1+B)C+W_1C^{-1})\}\cdot\sum_{|D|\neq 0}\lambda(D)\,e\{-\sigma((B_2-B)D+W_2D^{-1})\}$$

$$=\sum_{|C|\neq 0}\sum_{|D|\neq 0}\lambda(C)\,\lambda(D)\,e\{-\sigma(B_1C+B_2D+W_1C^{-1}+W_2D^{-1})\}\,e\{-\sigma(B(C-D))\}.$$

If we sum over all symmetric B of order n, by (2.6) the inner sum vanishes except for $C=D$ when it has the value $q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. Therefore, since $\lambda^2(C)=1$ for $|C|\neq 0$,

$$\sum_B L_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_2-B,W_2)=q^{\frac{1}{2}n(n+1)}\sum_{|C|\neq 0}e\{-\sigma((B_1+B_2)C+(W_1+W_2)C^{-1})\},$$

which by definition of $K_n(B,W)$ is (9.7).

Noting that $K_n(-B,-W)$ and $L_n(-B,-W)$ are the complex conjugates of $K_n(B,W)$ and $L_n(B,W)$, if we take $B_1=B_2=0$ and $W_2=-W_1=-W$ in (9.6) and (9.7), and use the fact that $K_n(0,0)=g_n$ as defined by (2.7) we have

THEOREM 7. *If B and W are symmetric matrices of order n and $K_n(B,W)$ and $L_n(B,W)$ are the generalized Kloosterman sums defined by* (5.1) *and* (5.2), *then*

$$\sum_B|K_n(B,W)|^2=\sum_B|L_n(B,W)|^2=q^{\frac{1}{2}n(n+1)}g_n, \tag{9.9}$$

where g_n is given by (2.7).

If we sum the products $K_n(B_1+B,W_1)\,K_n(B_2-B,W_2)$, $L_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_2-B,W_2)$ and $K_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_2-B,W_2)$ over all symmetric B of order n and rank r we get

THEOREM 8. *If B_1, B_2, W_1, W_2 are fixed symmetric matrices of order n, then*

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\text{rank }B=r}K_n(B_1+B,W_1)\,K_n(B_2-B,W_2)\\ \quad=\displaystyle\sum_{|E|\neq 0}\{H(I-E,r,1)+H(I-E,r,-1)\}\,K_n(B_1+EB_2,W_1+E^{-1}W_2),\end{cases} \tag{9.10}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\text{rank }B=r}L_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_2-B,W_2)\\ \quad=\displaystyle\sum_{|E|\neq 0}\lambda(E)\,\{H(I-E,r,1)+H(I-E,r,-1)\}\,K_n(B_1+EB_2,W_1+E^{-1}W_2),\end{cases} \tag{9.11}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\text{rank }B=r}K_n(B_1+B,W_1)\,L_n(B_2-B,W_2)\\ \quad=\displaystyle\sum_{|E|\neq 0}\lambda(E)\,\{H(I-E,r,1)+H(I-E,r,-1)\}\,L_n(B_1-EB_2,W_1+E^{-1}W_2),\end{cases} \tag{9.12}$$

where the sums are over all symmetric B of order n and rank r and all non-singular, symmetric E of order n.

For, if B_1, B_2, W_1, W_2 and B are symmetric matrices of order n, then

$$K_n(B_1+B, W_1)\,K_n(B_2-B, W_2) = \sum_{|C|\neq 0}\sum_{|D|\neq 0} e\{-\sigma(B_1C+W_1C^{-1}+B_2D+W_2D^{-1})\}\,e\{-\sigma(B(C-D))\}.$$

If we put $D=CE$, where $|E|\neq 0$, and sum the above product over all B of rank r we can write

$$\begin{cases} \sum\limits_{\text{rank } B=r} K_n(B_1+B, W_1)\,K_n(B_2-B, W_2) \\ \quad = \sum\limits_{|C|\neq 0}\sum\limits_{|E|\neq 0} e\{-\sigma(B_1C+W_1C^{-1}+B_2CE+W_2C^{-1}E^{-1})\}\times \\ \qquad\qquad \times \sum\limits_{\text{rank } B=r} e\{-\sigma(BC(I-E))\}. \end{cases} \tag{9.13}$$

In view of the definition of $H(B, r, \lambda)$ in **5**, the inner sum is equal to

$$H(I-E, r, 1)+H(I-E, r, -1),$$

so that using the definition of $K_n(B, W)$, (9.13) gives (9.10). The proofs of (9.11) and (9.12) are similar.

Two more relationships of this same sort are given by

THEOREM 9. *If B_1, B_2 and W are symmetric matrices of order n, then*

$$\begin{cases} \sum\limits_{B} K_n(B_1+B, W)\,\{H(B_2-B, S, 1)+H(B_2-B, s, -1)\} \\ \qquad = \begin{cases} 0 & (s<n) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)}K_n(B_1+B_2, W) & (s=n) \end{cases} \end{cases} \tag{9.14}$$

and

$$\begin{cases} \sum\limits_{B} L_n(B_1+B, W)\,\{H(B_2-B, s, 1)+H(B_2-B, s, -1)\} \\ \qquad = \begin{cases} 0 & (s<n) \\ q^{\frac{1}{2}n(n+1)}L_n(B_1+B_2, W) & (s=n), \end{cases} \end{cases} \tag{9.15}$$

where the sums are over all symmetric B of order n.

We remark that for $s=n$, in view of (5.3), (9.14) and (9.15) are (9.6) and (9.8) respectively, with $W_1=W$ and $W_2=0$.

10. *Explicit values of $K_n(B, 0)$ and $L_n(B, 0)$.* The explicit values of

$$\begin{cases} S(B, z)=H(B, z, 1)+H(B, z, -1) \\ D(B, z)=H(B, z, 1)-H(B, z, -1) \end{cases} \tag{10.1}$$

are given in [4]. Since, by (5.3) and (5.4),

$$K_n(B, 0)=S(B, n) \quad \text{and} \quad L_n(B, 0)=D(B, n), \tag{10.2}$$

we are able to give explicit values for the Kloosterman sums (10.2). Using [4] we may state

THEOREM 10. *If B is a symmetric matrix of order n and rank r, then the Kloosterman sum $K_n(B, 0)$ defined by (5.1) is equal to*

$$(-1)^{\frac{1}{2}r}\lambda(B)\psi^{\frac{1}{2}r}(-1)\,q^{\frac{1}{4}r(2n-r-8)+4}\frac{\prod_{i=0}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ even}, r \text{ even}),$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(r+1)}q^{\frac{1}{4}(r-1)(2n-r-7)}\frac{\prod_{i=0}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ odd}, r \text{ odd}),$$

$$0 \qquad (n \text{ even}, r \text{ odd}),$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}r}q^{\frac{1}{4}(r-2)(2n-r-6)}\frac{\prod_{i=-1}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r+1)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ odd}, r \text{ even}),$$

and the Kloosterman sum $L_n(B, 0)$ defined by (5.2) is equal to

$$(-1)^{\frac{1}{2}r}\psi^{\frac{1}{2}n}(-1)\,q^{\frac{1}{4}r(2n-r+2)-\frac{1}{2}t}\frac{\prod_{i=0}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ even}, r \text{ even}),$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}\lambda(B)\psi^{\frac{1}{2}(n+r-2)}(-1)\,q^{\frac{1}{4}(r-1)(2n-r-1)+\frac{1}{2}(n+1)}\frac{\prod_{i=0}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ odd}, r \text{ odd}),$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}\psi^{\frac{1}{2}n}(-1)\,q^{\frac{1}{4}(r-1)(2n-r+3)-\frac{1}{2}t}\frac{\prod_{i=-1}^{n-r-1}(1-q^{n-r-i})}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-r+1)}(1-q^{-2i})} \qquad (n \text{ even}, r \text{ odd}),$$

$$0 \qquad (n \text{ odd}, r \text{ even}).$$

11. *Another weighted sum.* Finally we consider the sum

$$H^* = H^*(B, U, A, r, \lambda) = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\}\,H(X'AX - B, r, \lambda), \tag{11.1}$$

where A is non-singular and symmetric of order m, B is symmetric of order t, U is an arbitrary $m \times t$ matrix, the summation is over all $m \times t$ matrices X, and $H(B, r, \lambda)$ is defined in § 5. The relationship between H^* and the sum S defined in (3.1) is given by

THEOREM 11. *If $H^*(B, U, A, r, \lambda)$ is the sum defined by (11.1) and $S(B, U, A)$ is defined in (3.1), then*

$$H^*(B, U, A, r, \lambda) = \sum_D H(D, r, \lambda)\,S(B + D, U, A), \tag{11.2}$$

where the summation is over all symmetric D of order t.

To prove Theorem 11 we use the definition of $H(B, r, \lambda)$ to write (11.1) as

$$H^* = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_{C(t,r,\lambda)} e\{-\sigma((X'AX - B)C)\}. \tag{11.3}$$

Using [3; equation (7.5)]

$$\sum_D H(D, r, \lambda)\, e\{\sigma(DC)\} = \begin{cases} 0 & (C \neq C(t, r, \lambda)) \\ q^{\frac{1}{2}t(t+1)} & (C = C(t, r, \lambda)), \end{cases}$$

where the summation is over all symmetric D of order t, (11.3) gives

$$\begin{cases} q^{\frac{1}{2}t(t+1)} H^* = \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_C e\{-\sigma((X'AX - B)C)\} \sum_D H(D, r, \lambda)\, e\{\sigma(DC)\}, \\ \qquad = \sum_D H(D, r, \lambda) \sum_X e\{\sigma(2U'X)\} \sum_C e\{-\sigma((X'AX - B - D)C)\}, \end{cases} \tag{11.4}$$

where C and D run through all symmetric matrices of order t and X through all $m \times t$ matrices. By (2.6), the inner sum in (11.4) vanishes except for $X'AX = B + D$ when its value is $q^{\frac{1}{2}t(t+1)}$. Thus (11.4) reduces to

$$H^* = \sum_D H(D, r, \lambda) \sum_{X'AX = B+D} e\{\sigma(2U'X)\}. \tag{11.5}$$

Since $\sigma(2U'X) = \sigma(U'X + X'U)$, in view of the definition of the sum S, (11.5) gives (11.2).

We may show in similar fashion that

$$q^{\frac{1}{2}t(t+1)} S(B, U, A) = f_0(U) + \sum_{r=1}^{t} \{H^*(B, U, A, r, 1) + H^*(B, U, A, r, -1)\}, \tag{11.6}$$

where $f_r(U)$ is defined by (7.8).

Using (11.2) we may prove the two formulas [compare with (11.2) using the definition of H^* in (11.1)]

$$\sum_X e\{\sigma(2U'X)\}\, K_t(X'AX - B, 0) = \sum_D K_t(D, 0)\, S(B + D, U, A) \tag{11.7}$$

and

$$\sum_X e\{\sigma(2U'X)\}\, L_t(X'AX - B, 0) = \sum_D L_t(D, 0)\, S(B + D, U, A), \tag{11.8}$$

where A is non-singular and symmetric of order t, B is symmetric of order t, U is an arbitrary $m \times t$ matrix, X runs through all $m \times t$ matrices, and D runs through all symmetric matrices of order t.

References

[1] CARLITZ, L.: The singular series for sums of squares of polynomials. Duke Math. J. **14**, 1105—1120 (1947). — [2] CARLITZ, L.: Weighted quadratic partitions over a finite field. Canad. J. Math. **5**, 317—323 (1953). — [3] CARLITZ, L.: Representations by quadratic forms in a finite field. Duke Math. J. **21**, 123—138 (1954). — [4] HODGES, JOHN H.: Exponential sums for symmetric matrices in a finite field. Math. Nachr. 1956.

Dept. of Math., The University of Buffalo, Buffalo, N.Y. (USA)

(Eingegangen am 2. März 1956)

MAHLER, K.
Math. Zeitschr. Bd 66, S. 25—33 (1956)

Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen

Von

KURT MAHLER

Bezeichnungen (für nähere Einzelheiten s. den Enzyklopädie-Artikel Nr. 27 von KELLER):

R_n ist der affine Raum aller Punkte oder Vektoren $X = (x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen $x_1, \ldots, x_n$. Sind $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ irgend n linear-unabhängige Punkte in R_n, so bedeute $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ ihre Determinante. Diese Punkte erzeugen ein Gitter Λ, welches aus allen $u_1 X^{(1)} + \cdots + u_n X^{(n)}$ mit ganzen $u_1, \ldots, u_n$ besteht und die Determinante $d(\Lambda) = |\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}|$ hat. Ist S eine beliebige Punktmenge in R_n, so heißt Λ S-zulässig falls, außer vielleicht dem Ursprung $O = (0, \ldots, 0)$, kein Punkt von Λ innerer Punkt von S ist. Unter der Gitterdeterminante $\Delta(S)$ von S ist alsdann die untere Grenze von $d(\Lambda)$, erstreckt über alle S-zulässigen Gitter, verstanden. Ein S-zulässiges Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta(S)$ heißt ein kritisches Gitter von S.

Die Punktmenge S ist ein Strahlenkörper, falls O innerer Punkt ist und falls ferner für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ auch tX zu S gehört. Ist für $X \in S$ und $-1 < t < 1$ sogar tX ein innerer Punkt von S, so heißt S ein Sternkörper.

Sei $n \geqq 2$, S ein beschränkter Sternkörper[1]) in R_n, und K ein S einbeschriebener konvexer Körper von größtmöglichem Inhalt $V(K)$. (Mit Hilfe des Satzes von BLASCHKE über Folgen konvexer Körper zeigt man leicht die Existenz eines solchen Körpers K.) Man kann die Frage aufwerfen, ob es eine nicht-triviale positive untere Schranke für $V(K)$ gibt, die allein von einem geeigneten Funktional von S abhängt.

Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Schranke für $V(K)$ nicht nur von dem Inhalt $V(S)$ von S abhängen kann. Denn sei z. B. S_r der endliche Sternkörper

$$S_r: \quad |x_1 x_2 \ldots x_n| \leq 1, \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2,$$

welcher in dem unendlichen Sternkörper

$$S_\infty: \quad |x_1 x_2 \ldots x_n| \leq 1$$

enthalten ist. Es ist wohlbekannt, daß S_∞ zwar eine endliche Gitterdeterminante $\Delta(S_\infty)$ hat, daß aber sein Volumen $V(S_\infty)$ unendlich groß ist. Man kann daher ein $r \geqq n$ so auswählen, daß

$$V(S_r) \text{ beliebig groß, aber } \tfrac{1}{2}\Delta(S_\infty) \leq \Delta(S_r) \leq \Delta(S_\infty)$$

[1]) Alle auftretenden konvexen Körper, Sternkörper und Strahlenkörper werden als symmetrisch in bezug auf den Ursprung $O = (0, \ldots, 0)$ angenommen, es sei denn ausdrücklich das Gegenteil gesagt.

ist. Nun ist offenbar der konvexe Körper

$$K_0: \quad |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq n$$

vom Inhalt

$$V(K_0) = \frac{(2n)^n}{n!}$$

eine Teilmenge von S_r und stellt zugleich den größten konvexen Körper dieser Art dar. Für diesen Körper kann $V(K_0)/V(S_r)$ beliebig klein gemacht werden; dagegen bleibt $V(K_0)/\Delta(S_r)$ für alle $r \geq n$ größer als eine gewisse, nur von n abhängige positive Zahl.

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß man auch im allgemeinen Falle $V(K)$ mit $\Delta(S)$ vergleichen muß und daß immer $V(K)/\Delta(S) \geq c$ ist, wo die Konstante $c > 0$ nur von n abhängt. Merkwürdigerweise ist diese Vermutung jedoch falsch und gilt das folgende Ergebnis:

Satz. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann gibt es einen beschränkten Sternkörper S in R_n mit der Eigenschaft $V(K) < \varepsilon \Delta(S)$ für jeden in S enthaltenen konvexen Körper K.*

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird ein Strahlenkörper Σ^* konstruiert, welcher der Ungleichung

$$V(K) < \frac{\varepsilon}{2} \Delta(\Sigma^*) \tag{a}$$

für jeden konvexen Körper $K \subseteqq \Sigma^*$ genügt. Danach wird in Σ^* ein Sternkörper S mit der Eigenschaft

$$\Delta(S) > \tfrac{1}{2} \Delta(\Sigma^*) \tag{b}$$

einbeschrieben. Da aus $K \subseteqq S$ auch $K \subseteqq \Sigma^*$ folgt, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folge von (a) und (b).

1. Der Mengenlehre entnehmen wir ohne Beweis den folgenden Hilfssatz:

Lemma 1. *Es gibt eine unendliche Menge M reeller Zahlen, welche überall auf der reellen Achse dicht ist, derart, daß die Elemente jeder endlichen Teilmenge von M algebraisch unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen sind.*

2. Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine beliebig kleine und mit $r > 1$ eine beliebig große Zahl, weiter mit

$$G_\varrho: \quad |X| \leq \varrho \quad \text{und} \quad \Gamma_\varrho: \quad |X| = \varrho$$

die Kugel vom Radius $\varrho > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung und ihre Oberfläche. Dabei bedeutet $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ die Länge des Ortsvektors $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Im Falle der Einheitskugel lassen wir den Index 1 weg und schreiben G und Γ anstatt G_1 und Γ_1.

Durch jeden Punkt $X \neq O$ geht genau eine Gerade $L(X)$, welche den Ursprung enthält; sie besteht aus allen Punkten $P = tX$ mit reellem t. Diese Gerade schneidet Γ in zwei Punkten $+Q(X)$ und $-Q(X)$, die in bezug auf O

symmetrisch liegen. Die Bezeichnung kann eindeutig gemacht werden, indem man etwa für $+Q(X)$ den Punkt mit positivem t nimmt.

Aus Lemma 1 ergibt sich nun, daß man eine genügend große natürliche Zahl N und dazu N Punkte

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

derart auswählen kann, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

(1) Die nN Koordinaten x_{hk} der Punkte X_h sind verschiedene Elemente der Menge M; sie sind daher algebraisch unabhängig über dem rationalen Zahlkörper.

(2) Jeder Punkt von Γ hat eine Entfernung kleiner als δ von wenigstens *einem der* $2N$ *Punkte*

$$Q_h = +Q(X_h) \quad \textit{und} \quad -Q_h = -Q(X_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

auf Γ [2]).

Es bedeute jetzt Σ die Menge aller Punkte X der Kugel G_r, die nicht von der Form

$$X = \pm t\, Q_h \quad \text{mit} \quad 1 \leq t \leq r \qquad (h = 1, 2, \ldots, N)$$

sind; Σ entsteht also aus G_r indem man $2N$ Strecken der Länge $r-1$ fortläßt. Natürlich ist Σ kein Sternkörper; es ist jedoch ein Strahlenkörper. Denn wenn X zu Σ gehört, so gilt dasselbe für alle Punkte sX mit $-1 \leq s \leq +1$. Die Kugel G_ϱ ist für $\varrho < 1$, aber nicht für $\varrho \geq 1$ in Σ enthalten, und Σ liegt seinerseits in G_r.

3. Lemma 2. *Es gibt eine Zahl* $c_1 > 0$, *die nur von* n *abhängt, so daß*

$$V(K) < c_1 \max(1, \delta r^{n-1})$$

für jeden in Σ *enthaltenen konvexen Körper* K *ist.*

Beweis. Sei X_0 ein Punkt von K, für den $|X_0| = \xi > 0$ ein Maximum ist. Im Falle $\xi \leq 2$ gilt die Ungleichung

$$V(K) \leq V(G_2),$$

da alsdann $K \subseteq G_2$ ist. Sei von nun an

$$\xi > 2.$$

Eine Rotation des Koordinatensystems hat keinen Einfluß auf die Behauptung. Wir dürfen daher ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, daß X_0 die Koordinaten

$$X_0 = (0, 0, \ldots, \xi)$$

hat.

[2]) Zwei Punkte X und Y in R_n haben die Entfernung $|X - Y|$.

Weiter bedeute K den Durchschnitt von K mit der Koordinatenebene $x_n = 0$; K ist also ein $(n-1)$-dimensionaler konvexer Körper. Es gibt einen Punkt

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$$

auf der Begrenzung von K mit kleinster Entfernung

$$d = |\Xi| > 0$$

von O. Die $(n-1)$-dimensionale Kugel

$$\varkappa: \quad |X| \leq d, \quad x_n = 0,$$

in der Ebene $x_n = 0$ ist daher in K und so auch in K enthalten.

Wir konstruieren nun zwei Doppelkegel Φ und φ mit den Spitzen $+X_0$ und $-X_0$ bzw. über der Basis K und der Basis $\varkappa$. Diese zwei Körper Φ und φ sind wieder symmetrisch in bezug auf O und konvex, und es ist offenbar $\varphi \subseteq \Phi \subseteq K$.

Wie schon erwähnt, ist G nicht in K, also auch nicht in φ enthalten. Da nun O innerhalb, X_0 aber außerhalb von G liegt, so enthält der Durchschnitt von φ mit dem Teil von Γ, der im Halbraum $x_n \geq 0$ liegt, eine größte Kugelkappe P mit Mittelpunkt im Punkte $X^* = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Diese Kugelkappe P besteht aus allen Punkten $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf Γ mit der Eigenschaft

$$\eta \leq x_n \leq 1;$$

dabei bedeutet η eine gewisse Zahl mit $0 \leq \eta < 1$. Daher kann P auch als die Menge aller Punkte X auf Γ mit

$$|X - X^*| \leq \sqrt{2(1-\eta)}$$

aufgefaßt werden. Andererseits liegt X^* von wenigstens einem der Punkte $\mp Q_k$ in einer Entfernung kleiner als δ, und kein Punkt $\mp Q_k$ kann zu P gehören. Daher muß

$$\sqrt{2(1-\eta)} < \delta, \quad \text{d.h.} \quad \eta > 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

sein.

Indem wir nun den Rand von P von dem Punkte X_0 aus auf die Ebene x_n projizieren, erhalten wir die Proportion

$$d : \sqrt{1-\eta^2} = \xi : (\xi - \eta).$$

Hier ist

$$\sqrt{1-\eta^2} < \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} < \delta \quad \text{und} \quad \xi > 2, \ \eta \leq 1, \ \xi - \eta > \frac{1}{2}\xi, \ \frac{\xi}{\xi - \eta} < 2$$

und daher schließlich

$$d : \delta < 2 : 1, \ d < 2\delta.$$

In den beiden Punkten Ξ und $-\Xi$ bringen wir nun ein Paar paralleler Stützebenen von K an. Diese Stützebenen begrenzen einen Parallelstreifen der Dicke

$$\leq |\Xi - (-\Xi)| = 2d < 4\delta,$$

in welchem K enthalten ist. Da andrerseits K auch eine Teilmenge der Kugel G_r ist, so liegt K vollständig in einem Zylinder der Höhe 4δ und mit einem Querschnitt vom $(n-1)$-dimensionalen Inhalt

$$c_2 r^{n-1};$$

c_2 bezeichnet hier den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel. Also ergibt sich die Abschätzung

$$V(K) < 4\delta \cdot c_2 r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls

$$c_1 = \max(V(G_2), 4c_2)$$

gewählt wird.

4. Sei Λ ein beliebiges Σ-zulässiges n-dimensionales Gitter. Eine gewisse (möglicherweise verschwindende) Anzahl von primitiven Punkten dieses Gitters[3]) liegt im Innern von G_r; seien das genau die Punkte $\mp Y_1, \mp Y_2, \ldots, \mp Y_p$. Die Vorzeichen lassen sich so wählen, daß es zu jedem dieser Gitterpunkte Y_h einen eindeutig bestimmten Index $j = j(h)$ gibt, derart daß

$$Y_h = s_h Q_j \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r$$

ist; denn Punkte nicht von dieser Form im Innern von G_r liegen auch im Innern von Σ. Verschiedenen Punkten Y_h und Y_k kann offenbar nicht derselbe Index j entsprechen. Es läßt sich daher die Bezeichnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit so umändern, daß gerade

$$Y_h = s_h Q_h \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Nach der Definition von Q_h läßt sich alsdann Y_h auch in der Form

$$Y_h = t_h X_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{3}$$

darstellen, wo jetzt $t_1, t_2, \ldots, t_p$ gewisse von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

5. Von den p Gitterpunkten $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ seien genau q linear unabhängig, etwa die Punkte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$; dabei ist natürlich

$$q \leq \min(n, N, p).$$

[3]) $Y \in \Lambda$ heißt primitiv, falls $Y \neq O$ ist und es keinen Gitterpunkt der Form tY mit $0 < t < 1$ gibt.

Falls $q<p$ ist, lassen sich die $p-q$ übrigen Punkte $Y_{q+1}, Y_{q+2}, \dots, Y_p$ durch diese Basis in der Form

$$Y_h = \lambda_{h1} Y_1 + \lambda_{h2} Y_2 + \cdots + \lambda_{hq} Y_q \qquad (h = q+1, q+2, \dots, p)$$

ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten λ_{hk} gewisse rationale Zahlen, und wegen $Y_h \neq O$ sind $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{hq}$ für keinen Index h alle gleichzeitig Null.

Aus (3) folgen nun die äquivalenten Beziehungen

$$t_h X_h = \lambda_{h1} t_1 X_1 + \lambda_{h2} t_2 X_2 + \cdots + \lambda_{hq} t_q X_q \qquad (h = q+1, q+2, \dots, p).$$

Nachdem hier die Koordinaten

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn})$$

eingesetzt worden sind, erhalten wir daher das System von $n(p-q)$ homogenen linearen Gleichungen

$$(4) \quad t_h x_{hk} = \lambda_{h1} t_1 x_{1k} + \lambda_{h2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{hq} t_q x_{qk} \quad \begin{pmatrix} h = q+1, q+2, \dots, p \\ k = 1, \quad 2, \quad \dots, n \end{pmatrix}$$

für die p Größen $t_h \neq 0$.

Lemma 3. *Es ist entweder $q=p$ oder $q=p-1$.*

Beweis. Sei die Behauptung falsch und daher $q \leq p-2$, so daß die Gln. (4) wenigstens für $h=q+1$ und $h=q+2$ erfüllt sind. Keiner der hier auftretenden Koeffizienten

$$\lambda_{hk} \qquad (h = q+1, q+2;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

kann gleich Null sein. Denn sei etwa $1 \leq \nu < n$ und

$$\lambda_{q+1,k} \neq 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, \nu; \qquad \lambda_{q+1,k} = 0 \quad \text{für} \quad k = \nu+1, \nu+2, \dots, n.$$

Die $\nu+1$ aus (4) entspringenden Gleichungen

$$t_{q+1} x_{q+1,k} = \lambda_{q+1,1} t_1 x_{1k} + \lambda_{q+1,2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{q+1,\nu} t_\nu x_{\nu k} \quad (k = 1, 2, \dots, \nu+1)$$

für die nicht-verschwindenden Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_\nu, t_{q+1}$ verlangen, daß ihre Determinante

$$|x_{q+1,k}, \lambda_{q+1,1} x_{1k}, \lambda_{q+1,2} x_{2k}, \dots, \lambda_{q+1,\nu} x_{\nu k}|_{k=1,2,\dots,\nu+1}$$

gleich Null ist. Aber dann sind, gegen die Voraussetzung, nicht alle nN Koordinaten x_{hk} algebraisch unabhängig über dem rationalen Körper.

Für die Werte $h=q+1$ und $h=q+2$ erhalten wir also aus (4) ein System von $2n$ homogenen linearen Gleichungen für die $q+2$ Größen $t_1, t_2, \dots, t_{q+2}$, die wieder alle von Null verschieden sind. Wegen $n \geq 2$ und $q \leq n$ ist jedoch $2n \geq q+2$. Die Koeffizientenmatrix hat daher höchstens den Rang $q+1$, und es ergibt sich erneut der Widerspruch, daß die in ihr auftretenden Koordinaten x_{hk} einer nicht-trivialen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen.

6. Lemma 4. *Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c_3 > 0$, derart, daß*

$$\Delta(\Sigma) \geq c_3 r^{n-1}.$$

Beweis. Nach dem letzten Hilfssatz kann, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, höchstens eine Gleichung

$$\varkappa_h Y_h + \varkappa_k Y_k + \varkappa_l Y_l = O$$

mit von Null verschiedenen rationalen Koeffizienten gelten; dabei sind h, k, l irgend drei verschiedene der Indizes $1, 2, \ldots, p$. Demnach ist für $h \neq k$ immer nur höchstens einer der beiden Gitterpunkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ zu einem weiteren Gitterpunkt Y proportional. Nach der Definition dieser Punkte bedeutet dies, daß höchstens einer der beiden Punkte $Y_h + Y_k$ und $Y_h - Y_k$ im Innern von G_r liegen kann. Anders ausgedrückt, es muß wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$|Y_h + Y_k| \geq r \quad \text{oder} \quad |Y_h - Y_k| \geq r$$

gelten.

Sei jetzt etwa

$$|Y_1| = \min(|Y_1|, |Y_2|, \ldots, |Y_p|).$$

Es folgt dann für $h = 2, 3, \ldots, p$, daß

$$r \leq |Y_1 \pm Y_h| \leq |Y_1| + |Y_h| \leq 2|Y_h|, \quad |Y_h| \geq \frac{r}{2}.$$

Bedeute jetzt E das Rotationsellipsoid in R_n mit einer Halbachse der Länge 1 in der Richtung OY_1, und mit $n-1$ Halbachsen der Länge $r/2$ in Richtungen senkrecht zu OE_1. Das Innere von E enthält dann keinen der Punkte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ und folglich überhaupt keinen von O verschiedenen Punkt von Λ; d.h., Λ ist E-zulässig. Es ist also

$$d(\Lambda) \geq \Delta(E),$$

und da dies für jedes Σ-zulässige Gitter gilt, so ist auch

$$\Delta(\Sigma) \geq \Delta(E).$$

Das Ellipsoid E hat den Inhalt

$$V(E) = c_4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1},$$

wobei $c_4 = V(G)$ gesetzt wurde. Nach Minkowskis Gitterpunktssatz ist andrerseits

$$\Delta(E) \geq 2^{-n} V(E) = c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}.$$

Also erhalten wir die Ungleichung

$$\Delta(\Sigma) \geq c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls $c_3 = c_4 2^{-(2n-1)}$ gesetzt wird.

7. Aus Lemma 2 und 4 ergibt sich nun für jeden in Σ enthaltenen konvexen Körper K, daß

$$\frac{V(K)}{\Delta(\Sigma)} < \frac{c_1 \max(1, \delta r^{n-1})}{c_3 r^{n-1}} = \frac{c_1}{c_3} \max(r^{-(n-1)}, \delta)$$

ist. Genügen also δ und r den Bedingungen

$$\frac{c_1}{c_3}\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{c_1}{c_3} r^{-(n-1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so folgt die Ungleichung

$$V(K) < \frac{\varepsilon}{2}\Delta(\Sigma). \tag{5}$$

Es ist jetzt zweckmäßig, Σ durch einen neuen Strahlenkörper Σ^* zu ersetzen; man erhält diesen, indem man zu Σ die $2N$ Punkte $\mp Q_1, \mp Q_2, \ldots, \mp Q_N$ hinzufügt. Ein Σ-zulässiges Gitter ist offenbar auch Σ^*-zulässig, und umgekehrt; darum gilt

$$\Delta(\Sigma^*) = \Delta(\Sigma).$$

Ist ferner K^* irgendein Σ^* einbeschriebener konvexer Körper und liegt ein zweiter konvexer Körper K ganz im Innern von K^*, so ist K auch im Innern von Σ enthalten. Es folgt daher leicht, daß die Ungleichung (5) bestehenbleibt, falls in ihr Σ durch Σ^* ersetzt wird. Also erfüllt Σ^* die Forderung (a) der Einleitung.

8. Sei $\sigma > 0$ eine sehr kleine Zahl, und bedeute T_h die Menge aller Punkte X der Form

$$X = s\,Q_h + (s-1)\,\sigma\,Y, \text{ wo } s > 1 \text{ und } |Y| < 1$$

ist; T_h stellt also einen offenen Kegel mit der Spitze Q_h dar. Weiter sei $-T_h$ die zu T_h in bezug auf O symmetrische Menge. Endlich bezeichne S_σ die Menge, welche aus allen Punkten X der Form

$$|X| \leqq r, \; X \notin \mp T_h \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \ldots, N$$

besteht. Offenbar ist S_σ eine abgeschlossene Menge und ein Sternkörper.

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß $S_\sigma \subseteqq \Sigma^*$ und für $\sigma < \tau$ auch $S_\sigma \supseteqq S_\tau$ ist. Dies zieht für die Gitterdeterminante die Ungleichungen

$$\Delta(S_\tau) \leqq \Delta(S_\sigma) \leqq \Delta(\Sigma^*) \quad \text{für} \quad 0 < \sigma < \tau$$

nach sich. Wenn also σ gegen Null strebt, so wächst $\Delta(S_\sigma)$ monoton gegen einen Grenzwert, der nicht größer als $\Delta(\Sigma^*)$ sein kann.

In der Tat ist sogar

$$\lim_{\sigma \to +0} \Delta(S_\sigma) = \Delta(\Sigma^*).$$

Denn für jede natürliche Zahl k können wir ein $S_{1/k}$-zulässiges Gitter Λ_k so auswählen, daß

$$d(\Lambda_k) < \Delta(S_{1/k}) + \frac{1}{k}$$

ist. Die Gitterfolge $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots\}$ ist offenbar beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge $\{\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2}, \Lambda_{k_3}, \ldots\}$, die etwa gegen das Gitter Λ_0 strebt. Dieses Gitter Λ_0 ist nun Σ^*-zulässig. Denn andernfalls gibt es in Σ^* einen inneren Punkt $Z_0 \neq 0$ nit $Z_0 \in \Lambda_0$. Alsdann besitzt Λ_{k_i} für alle genügend großen i einen Punkt in einer festen, beliebig kleinen Umgebung von Z_0. Dieser Punkt ist offenbar ein innerer, von O verschiedener Punkt von S_{1/k_i}, so daß sich ein Widerspruch ergibt.

Da somit $\Delta(S_\sigma)$ gegen $\Delta(\Sigma^*)$ strebt, so gibt es einen Wert $\sigma = \sigma_0$, derart, daß

$$\Delta(S_{\sigma_0}) < \tfrac{1}{2}\Delta(\Sigma^*)$$

ist. Der Sternkörper $S = S_{\sigma_0}$ erfüllt also die in der Einleitung gestellte Bedingung (b).

Mathematics Department, The University, Manchester, England

(Eingegangen am 8. März 1956)

FAULHABER, G.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 34—52 (1956)

Äquivalenzsätze für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie

Von

GERHARD FAULHABER

Einleitung

Die Folge s_n $(n=0, 1, \ldots)$ heißt durch das T_α-Verfahren (TAYLOR-Verfahren der Ordnung α zur Limitierung von Folgen) limitierbar zum Wert s, wenn die Summen

$$T_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} s_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

existieren und gegen s streben für $n \to \infty$ (vgl. z.B. [5]). Wir beschränken uns auf den Fall $0<\alpha<1$; für solche α ist T_α permanent.

Die (in jedem endlichen Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ R-integrierbare) Funktion $s(t)$ heißt durch das T_b'-Verfahren (TAYLOR-Verfahren der Ordnung b zur Limitierung von Funktionen) limitierbar zum Wert s, wenn die Integrale

$$T_b' s = \frac{b^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-bt} s(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

existieren und gegen s streben für $n \to \infty$ (vgl. [6]). Wir beschränken uns auf $b>0$; für solche b ist T_b' permanent.

Nun läßt sich das T_b'-Verfahren in naheliegender Weise auch zur Limitierung von Folgen nutzbar machen: Die Aussage

$$T_b'\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{sei gleichbedeutend mit} \quad T_b'\text{-}\lim_{t\to\infty} s(t) = s,$$

wobei $s(t)$ die zu den s_n gehörige Treppenfunktion ist $(s(t) = s_n$ für $n \leqq t < n+1)$. Es erhebt sich damit die Frage, in welchem Verhältnis bei einer vorgelegten Folge s_n die beiden Aussagen

$$T_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{und} \quad T_b'\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

zueinander stehen. Untersucht man das asymptotische Verhalten der Elemente in den Matrizen T_α und T_b', so läßt sich ein engerer Zusammenhang von T_α mit T_b' für $b = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ $(b>0;\ 0<\alpha<1)$ vermuten. In der Tat ließe

sich auch unter Verwendung bekannter Hilfsmittel (vgl. [1], Kap. IX; [5], § 5) beweisen: *Ist* $s_n = o(\sqrt{n})$, *so ist*

(1) $T_\alpha\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ *äquivalent* $T_b'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ *für* $b = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$.

Unsere Absicht ist jedoch, diese Äquivalenzaussage gleich für eine umfangreichere Folgenklasse zu gewinnen, nämlich für Folgen endlicher Ordnung. Dabei soll s_n von endlicher Ordnung heißen, wenn es ein $\sigma \geq 0$ gibt, so daß $s_n = O(n^\sigma)$ ist für $n \to \infty$ [analog bei Funktionen $s(t)$].

Wir knüpfen an den Satz an, daß die Verfahren B (BOREL) und $T_{\frac{1}{2}}$ äquivalent sind für Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$. Dies wurde, in Verfolgung einer von M. RIESZ geäußerten Vermutung, von HARDY und LITTLEWOOD [2] bewiesen. J. M. HYSLOP [4] hat weiter gezeigt, daß B äquivalent ist mit einem Verfahren $F_{\frac{1}{2}}$ (s. unten; in [4] ist $F_{\frac{1}{2}}$ mit $(V, \frac{1}{2})$ bezeichnet), und zwar schon dann, wenn s_n von endlicher Ordnung ist. Es erhebt sich die Frage, ob auch $F_{\frac{1}{2}}$ und $T_{\frac{1}{2}}$, und damit B und $T_{\frac{1}{2}}$, äquivalent sind für Folgen endlicher Ordnung. Durch Ausbau der HYSLOPschen Beweismethode werden wir zu einer bejahenden Antwort gelangen. Gleichzeitig haben wir damit die notwendigen Hilfsmittel an der Hand, um die Äquivalenzaussage (1) in der beabsichtigten Richtung zu erweitern, nämlich für alle Folgen endlicher Ordnung zu beweisen. Schließlich lassen sich auf diese Weise noch gewisse Äquivalenzaussagen zwischen den Verfahren E_ρ (EULER-KNOPP) und S_β einerseits und den Verfahren T_α andererseits, die bisher unter der Voraussetzung $s_n = o(\sqrt{n})$ bekannt waren (vgl. MEYER-KÖNIG [5], S. 297; für den E_ρ-Teil vgl. HARDY [1], Kap. IX), ebenfalls auf Folgen endlicher Ordnung ausdehnen. Eine knappe Andeutung einiger dieser Sätze findet sich schon bei HARDY ([1], S. 219 unten bis S. 220 oben).

Nach einem Vorschlag von Herrn MEYER-KÖNIG bezeichnen wir (vgl. Titel der Arbeit) die ganze Klasse der Verfahren E_ρ, B, S_β, T_α und T_b', auf die sich unsere Äquivalenzsätze beziehen, als die Klasse der Kreisverfahren, indem wir damit die von HARDY und LITTLEWOOD ursprünglich für das T_α-Verfahren gewählte Bezeichnung „circle method" auf die genannte Klasse ausdehnen. Diese Ausdehnung erscheint berechtigt, wenn man bedenkt, daß die Limitierbarkeit einer Folge bzw. Funktion nach irgendeinem dieser Verfahren jeweils bedeutet, daß eine gewisse TAYLOR-Entwicklung (bzw., bei B, ein LAPLACE-Integral) für einen gewissen Wert der Variabeln konvergiert.

§ 1. Hilfssätze

Es seien zunächst einige Hilfssätze zusammengestellt. Sie bilden (soweit es sich um Abschätzungen von unendlichen Reihen handelt) leichte Verallgemeinerungen von Sätzen, für die HYSLOP in [3] und [4] Beweise gegeben hat. Diese Beweise lassen sich ohne wesentliche Änderungen auf die folgenden Aussagen übertragen und werden daher nicht ausgeführt.

Hilfssatz 1. *Ist* $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ *und* $a > 0$, *so gilt für* $\zeta > \frac{1}{2}$

$$\sum_{\nu \geq x + x^{\zeta}} (\nu - x)^{\varrho} \nu^{\sigma} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} = o(1) \qquad (x \to \infty),$$

und für $\frac{1}{2} < \zeta < 1$

$$\sum_{0 \leq \nu \leq x - x^{\zeta}} (x - \nu)^{\varrho} \nu^{\sigma} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Hilfssatz 1'. *Ist* $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ *und* $a > 0$, *so gilt für* $\zeta > \frac{1}{2}$

$$\int_{x + x^{\zeta}}^{\infty} (t - x)^{\varrho} t^{\sigma} e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}} dt = o(1) \qquad (x \to \infty),$$

und für $\frac{1}{2} < \zeta < 1$

$$\int_{0}^{x - x^{\zeta}} (x - t)^{\varrho} t^{\sigma} e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}} dt = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Hilfssatz 1' entsteht formal aus Hilfssatz 1, indem man die Reihe über ν durch ein Integral über t ersetzt. So steht im folgenden jedem Hilfssatz über Reihen ein Hilfssatz über Integrale gegenüber. Dabei entspricht der (komplexen) Folge s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ im Falle der Integrale eine (komplexwertige) Funktion $s(t)$ der reellen Veränderlichen t, die für $t \geq 0$ definiert und für jedes $t_0 > 0$ in $0 \leq t \leq t_0$ R-integrierbar ist. Für solche Funktionen schreiben wir kurz $s(t) \in \mathfrak{S}$. Für $s_n = o(n^{\sigma})$ $(\sigma \geq 0)$ steht im entsprechenden Integralsatz $s(t) = o(t^{\sigma})$. Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir nur die Hilfssätze für Reihen auf und beziehen uns später, wenn wir einen entsprechenden Hilfssatz für Integrale benötigen, auf den zuständigen Satz für Reihen.

Hilfssatz 2. *Ist* $\varrho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ *und* $a > 0$, *so gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\nu - x|^{\varrho} \nu^{\sigma} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} = O\left(x^{\sigma + \frac{1}{2}(\varrho+1)}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Hilfssatz 3. *Es sei* $s_\nu = o(\nu^{\sigma})$ *für ein* $\sigma \geq 0$, *ferner* $q \geq 0$. *Ist dann für* $a > 0$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} s_\nu = o\left(x^{\frac{1}{2}+q}\right) \qquad (x \to \infty),$$

so folgt für jedes ganze $\varrho \geq 0$ *und für jedes* $\eta > 0$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu - x)^{\varrho} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} = o\left(x^{\frac{1}{2}(\varrho+1)+q+\eta}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Hilfssatz 4. *Es sei* $s_\nu = o(\nu^{\sigma})$ *für ein* $\sigma \geq 0$, *ferner sei* $q \geq 0$. *Dann folgt aus*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} s_\nu = o\left(n^{\frac{1}{2}+q}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots; n \to \infty)$$

die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} s_\nu = o\left(x^{\frac{1}{2}+q}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Bezeichnet man die (permanenten) Verfahren, die durch die Matrizen

$$a_{n\nu} = \sqrt{\frac{a}{\pi n}}\, e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} \qquad (n > 0,\ \nu \geq 0,\ \text{ganz};\ a > 0),$$

$$a_{x\nu} = \sqrt{\frac{a}{\pi x}}\, e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} \qquad (x > 0;\ \nu = 0, 1, \ldots;\ a > 0),$$

$$a_{nt} = \sqrt{\frac{a}{\pi n}}\, e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ t \geq 0;\ a > 0),$$

$$a_{xt} = \sqrt{\frac{a}{\pi x}}\, e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}} \qquad (x > 0;\ t \geq 0;\ a > 0)$$

definiert sind, als F_a-, bzw. F_a'-, bzw. J_a-, bzw. J_a'-Verfahren[1]), so ergeben sich aus Hilfssatz 4 und dem entsprechenden Hilfssatz für Integrale die beiden folgenden Äquivalenzsätze.

Satz I. *Für jedes $a > 0$ ist das F_a-Verfahren für Folgen endlicher Ordnung äquivalent mit dem F_a'-Verfahren.*

Satz I'. *Für jedes $a > 0$ ist das J_a-Verfahren für Funktionen endlicher Ordnung aus der Klasse $\mathfrak{S}$ äquivalent mit dem J_a'-Verfahren.*

§ 2. Die Matrizen E_p, S_β, T_α und T_b'

Die E_p-Verfahren (EULER-KNOPPschen Verfahren) sind durch die Matrix

$$E_p = \frac{1}{2^{p\,n}} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} \qquad (n, \nu \geq 0,\ \text{ganz};\ p > 0),$$

die S_β-Verfahren durch

$$S_\beta = (1-\beta)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} \beta^\nu \qquad (n, \nu \geq 0,\ \text{ganz};\ 0 < \beta < 1),$$

das B-Verfahren (BORELsches Verfahren) durch

$$B = e^{-x}\, \frac{x^\nu}{\nu!} \qquad (\nu \geq 0,\ \text{ganz};\ x \geq 0),$$

und die T_α-Verfahren (TAYLOR-Verfahren) durch

$$T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} \qquad (n, \nu \geq 0,\ \text{ganz};\ 0 < \alpha < 1)$$

gegeben. Die Matrizen dieser Verfahren lassen sich in eine einheitliche Form bringen, deren Hauptteil der F_a-Matrix gleich ist. Die F_a-Verfahren können so als Bindeglieder zwischen den Verfahren E_p, S_β, B und T_α aufgefaßt werden. Aber auch zur Untersuchung der Äquivalenz der T_α-Verfahren mit den T_b'-Verfahren werden wir die F_a-Matrix heranziehen.

Zunächst bringen wir die Verfahren E_p, S_β, T_α in die besagte Form. Das B-Verfahren lassen wir beiseite; es wurde bereits von HYSLOP [4] behandelt.

[1]) F_a ist die in [1] mit (e, a) bezeichnete Matrix.

Hilfssatz 5. *Die Verfahren E_p, S_β und T_α erfüllen folgende Voraussetzung $V=V(a,\lambda)$ für die Matrix A. Die Matrix $A=a_{n,\nu}$ $(n,\nu=0,1,\ldots)$ ist permanent. Es gibt positive Konstanten λ und a, so daß für $\frac{1}{2}<\zeta<\frac{2}{3}$ folgendes richtig ist:*

Für die positiven ganzen Zahlen n und m mit $m=\lambda n+\vartheta$ und $0\leq\vartheta<\mathrm{Max}(1,\lambda)$ ist bei $m-m^\zeta\leq\nu\leq m+m^\zeta$ (ν ganz) und für jedes ganze $k\geq 1$

$$a_{n,\nu}=\sqrt{\frac{a}{\pi m}}\,e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}+g_k+R_k}. \tag{2.1}$$

Dabei hat g_k die Form

$$g_k=\sum{}'\,l_{ij}\frac{(\nu-m)^j}{m^i} \quad \text{(zu summieren über } 1\leq i\leq 2k-1,\ 0\leq j\leq i+1), \tag{2.2}$$

wobei die l_{ij} von ν unabhängige Größen sind, die für $n\to\infty$ gleichmäßig in ϑ beschränkt bleiben[2]*). Der Strich an der Summe besagt, daß der Koeffizient $l_{12}=0$ ist. Für R_k gilt gleichmäßig in ϑ*

$$R_k=O\left(\frac{|\nu-m|^{2k+1}+1}{m^{2k}}\right) \qquad (n\to\infty). \tag{2.3}$$

Ferner ist gleichmäßig in ϑ

$$\sum_{0\leq\nu\leq m-m^\zeta}a_{n,\nu}s_\nu=o(1),\quad \sum_{m+m^\zeta\leq\nu}a_{n,\nu}s_\nu=o(1) \qquad (n\to\infty), \tag{2.4}$$

sofern s_ν von endlicher Ordnung ist.

Wir beweisen diesen Satz für die E_p-Matrix. Für die S_β-, bzw. T_α-Matrix geben wir nur die Ergebnisse an.

Es ist

$$E_p=a_{n,\nu}=\frac{1}{2^{pn}}\binom{n}{\nu}(2^p-1)^{n-\nu}$$

$$=\frac{1}{(q+1)^n}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu} \text{ mit } p>0 \text{ bzw. } q=2^p-1>0 \quad (n,\nu\geq 0, \text{ganz}).$$

Wir setzen

$$\lambda=\frac{1}{q+1}=\frac{1}{2^p} \quad \text{und} \quad a=\frac{q+1}{2q}=\frac{2^{p-1}}{2^p-1}$$

und zeigen, daß mit diesen Zahlen die Darstellung (2.1) möglich ist. Da hier $\lambda<1$ ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl n genau ein ϑ mit $0\leq\vartheta<1$, so daß $n\lambda+\vartheta$ eine natürliche Zahl ist. Wir setzen $m=n\lambda+\vartheta$ und $\nu=m+h$ (≥ 0), wobei wir uns auf Werte h mit $|h|\leq m^\zeta$ beschränken. Dann ist

$$\log a_{n,m+h}=-n\log(q+1)+\log\binom{n}{m+h}+(n-m-h)\log q.$$

[2]) Gleichmäßigkeit in ϑ wird nur in den Fällen benötigt, in denen ϑ durch n nicht eindeutig bestimmt ist, d.h. für $\lambda>1$.

Mit Hilfe der STIRLINGschen Formel

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \\ + \sum_{r=1}^{k} \frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\, n^{-2r+1} + O\left(n^{-2k-1}\right) \qquad (k \geq 1, \text{ ganz})$$

($B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...) erhält man

$$\log \binom{n}{m+h} = -\log\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - \left(m + h + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{h}{m}\right) - \\ - \left(m + h + \frac{1}{2}\right)\log m - \left(n - m - h + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{h}{n-m}\right) - \\ - \left(n - m - h + \frac{1}{2}\right)\log(n-m) + \\ + \sum_{r=1}^{k} \frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\left\{\frac{1}{n^{2r-1}} - \frac{1}{(m+h)^{2r-1}} - \frac{1}{(n-m-h)^{2r-1}}\right\} + \\ + O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right).$$

Die beiden letzten O-Beziehungen gelten für alle h mit $|h| \leq m^{\zeta}$ für $n \to \infty$. Damit wird

$$\log a_{n,\,m+h} = \left\{-\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\log m + \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log(n-m)\right\} + \\ + \left\{n\log\frac{n}{m(q+1)} - (n-m-h)\log\frac{n-m}{qm}\right\} + \\ + \left\{-\left(m + h + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{h}{m}\right) - \left(n - m - h + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{h}{n-m}\right)\right\} + \\ + \left\{\sum_{r=1}^{k} \cdots + O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right)\right\}.$$

Der Klammersetzung entsprechend nennen wir die vier Summanden rechts S_1, S_2, S_3 und S_4. Bei Anwendung der Beziehungen

$$(2.5) \quad \log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, x^{\nu} + (-1)^{s}\,\vartheta_1 \frac{x^{s+1}}{1+x} \quad (-1 < x \leq 0;\ 0 < \vartheta_1 < 1)$$

und

$$(2.6) \quad \log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, x^{\nu} + (-1)^{s}\,\vartheta_2 \frac{x^{s+1}}{s+1} \quad (0 \leq x \leq 1;\ 0 < \vartheta_2 < 1)$$

folgt

$$S_1 = \log\sqrt{\frac{1}{2\pi\, m(1-\lambda)}} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2k-1}\left(\frac{\vartheta}{1-\lambda}\,\frac{m}{n}\right)^{r} \frac{1}{r\, m^{r}} + O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right).$$

9254-66

Wegen $\frac{m}{n} \to \lambda$ für $n \to \infty$ ist $a_r = \frac{1}{2r}\left(\frac{\vartheta}{1-\lambda}\frac{m}{n}\right)^r$ für jedes r beschränkt für $n \to \infty$. Weiter gilt

$$O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k}}\left(\frac{m}{n}\right)^{2k}\right) = O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right) \qquad (n \to \infty),$$

also, wegen $\frac{1}{2(1-\lambda)} = a$,

$$S_1 = \log\sqrt{\frac{a}{\pi m}} + \sum_{r=1}^{2k-1} a_r \frac{1}{m^r} + O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right).$$

Für S_2 kann zunächst geschrieben werden

$$S_2 = -n \log\left(1 - \frac{\vartheta(q+1)}{q}\frac{1}{n}\right) + (m+h)\left[\log\left(1 - \frac{\vartheta}{1-\lambda}\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{\vartheta}{\lambda}\frac{1}{n}\right)\right],$$

und bei Verwendung von (2.5) und (2.6)

$$\begin{aligned} S_2 = {} & m\left(\frac{n}{m}\right)\sum_{r=1}^{2k}\frac{1}{r}\left(\frac{\vartheta(q+1)}{q}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r} - m\sum_{r=1}^{2k}\frac{1}{r}\left(\frac{\vartheta}{1-\lambda}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r} - \\ & - m\sum_{r=1}^{2k}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\frac{\vartheta}{\lambda}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r} - h\sum_{r=1}^{2k-1}\frac{1}{r}\left(\frac{\vartheta}{1-\lambda}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r} - \\ & - h\sum_{r=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\frac{\vartheta}{\lambda}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r} + O\left(\frac{1}{m^{2k}}\right) + O\left(\frac{h}{m^{2k}}\right)^{3}). \end{aligned}$$

Die drei Glieder, die man für $r=1$ aus den drei ersten Summen (Σ) erhält, ergeben insgesamt $-\frac{\vartheta^2}{\lambda(1-\lambda)}\frac{m}{n}\frac{1}{m}$. Faßt man die Glieder mit $\frac{1}{m^r}$ bzw. $\frac{h}{m^r}$ zusammen, so folgt

$$S_2 = \sum_{r=1}^{2k-1} b_r \frac{1}{m^r} + h\sum_{r=1}^{2k-1}\bar{b}_r\frac{1}{m^r} + O\left(\frac{|h|+1}{m^{2k}}\right)$$

mit für $n \to \infty$ beschränkten, von h unabhängigen Koeffizienten b_r und $\bar{b}_r$. Die O-Beziehung gilt für alle h mit $|h| \leq m^{\zeta}$.

Um S_3 umzuformen benützt man die Formeln (2.5) und (2.6) und setzt $\sigma_r = \left(\frac{m}{n-m}\right)^r$. Dann wird

$$\begin{aligned} S_3 = {} & -\sum_{r=1}^{2k}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\frac{h^r}{m^{r-1}} - \sum_{r=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\frac{h^{r+1}}{m^r} - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\frac{h^r}{m^r} + \\ & + \frac{n-m}{m}\sum_{r=1}^{2k}\frac{1}{r}\frac{h^r}{m^{r-1}}\sigma_r - \sum_{r=1}^{2k-1}\frac{1}{r}\frac{h^{r+1}}{m^r}\sigma_r + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2k-1}\frac{1}{r}\frac{h^r}{m^r}\sigma_r + O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right) \end{aligned}$$

[3]) Tritt in einem O- oder o-Glied im Zähler h^ν ($\nu \geq 1$) allein auf, so ist für $h=0$ das O- bzw. o-Glied durch null zu ersetzen.

und nach Einführung geeigneter Abkürzungen

$$S_3 = -\frac{h^2}{2m}\left(1+\frac{m}{n-m}\right)+\sum_{r=2}^{2k-1} c_r \frac{h^{r+1}}{m^r}+\sum_{r=1}^{2k-1}\bar{c}_r\frac{h^r}{m^r}+O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right).$$

Das erste Glied dieser Darstellung ergibt

$$1+\frac{m}{n-m}=\frac{1}{1-\lambda}\left[\sum_{r=0}^{2k-2}\left(\frac{\vartheta}{1-\lambda}\frac{m}{n}\right)^r\frac{1}{m^r}+O\left(\frac{1}{m^{2k-1}}\right)\right].$$

Da $\frac{1}{1-\lambda}=2a$ ist, so folgt

$$S_3 = -a\frac{h^2}{m}+\sum_{r=2}^{2k-1} c_r\frac{h^{r+1}}{m^r}+\sum_{r=1}^{2k-1}\bar{c}_r\frac{h^r}{m^r}+h^2\sum_{r=2}^{2k-1}\bar{\bar{c}}_r\frac{1}{m^r}+O\left(\frac{h^{2k+1}}{m^{2k}}\right).$$

Auch hier sind die Koeffizienten von h unabhängig und für $n\to\infty$ beschränkt.

Es muß noch S_4 passend umgeschrieben werden. Zunächst ist

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\frac{1}{n^{2r-1}}=\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\left(\frac{m}{n}\right)^{2r-1}\frac{1}{m^{2r-1}}=\sum_{r=1}^{k}\frac{d_r}{m^{2r-1}},$$

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\frac{1}{m^{2r-1}\left(1+\frac{h}{m}\right)^{2r-1}}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=0}^{2k-2r}\bar{d}_{r\mu}\frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}}+O\left(\frac{h^{2k-1}}{m^{2k}}\right),$$

und

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{2r}}{(2r-1)\,2r}\frac{1}{m^{2r-1}\left(1-\frac{h}{m}\frac{m}{n-m}\right)^{2r-1}}\left(\frac{m}{n-m}\right)^{2r-1}$$
$$=\sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=0}^{2k-2r}\bar{\bar{d}}_{r\mu}\frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}}+O\left(\frac{h^{2k-1}}{m^{2k}}\right),$$

wobei die Koeffizienten d_r, $\bar{d}_{r\mu}$ und $\bar{\bar{d}}_{r\mu}$ von h unabhängig und für $n\to\infty$ beschränkt sind. Weiter ist

$$O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right),\quad O\left(\frac{1}{(m+h)^{2k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{m}\right)^{2k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right)$$

und schließlich

$$O\left(\frac{1}{(n-m-h)^{2k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\frac{1}{\left(\frac{n-m}{m}-\frac{h}{m}\right)^{2k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{2k+1}}\right)$$

gleichmäßig in h, da $|h|\le m^\zeta$, $\frac{n-m}{m}\to\frac{1-\lambda}{\lambda}\neq 0$ und $\frac{h}{m}\to 0$, gleichmäßig in h. Es ist also

$$S_4=\sum_{r=1}^{k}d_r\frac{1}{m^{2r-1}}-\sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=0}^{2k-2r}(\bar{d}_{r\mu}+\bar{\bar{d}}_{r\mu})\frac{h^\mu}{m^{2r-1+\mu}}+O\left(\frac{|h|^{2k+1}+1}{m^{2k}}\right).$$

Fassen wir S_1, S_2, S_3 und S_4 zusammen, so erkennt man (2.1).

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Reihenreste (2.4) den angegebenen Abschätzungen genügen. Zunächst folgt aus

$$\frac{a_{n,\nu}}{a_{n,\nu-1}} = \frac{n-\nu+1}{q\,\nu},$$

daß die Folge $\alpha_\nu = a_{n,\nu}$ (n fest) für $0 \leq \nu \leq \frac{n+1}{q+1} = (n+1)\lambda$ monoton steigt und für $\lambda(n+1) \leq \nu \leq n$ monoton fällt. Für jedes $\omega > 0$ gilt $m - n\omega < m - m^\zeta$ für genügend großes n, d.h. das Glied $a_{n,m-[m^\zeta]}$[4]) läßt sich nach [5] S. 291 in die Form

$$a_{n,m-[m^\zeta]} = \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-a\frac{[m^\zeta]^2}{m} + \frac{[m^\zeta]}{m}O(1) + \frac{[m^\zeta]^2}{m^2}O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

bringen. Wenn man nun in $\sum\limits_{0 \leq \nu \leq m-m^\zeta} a_{n,\nu} s_\nu$ die Größen s_ν durch $o(n^\sigma)$, die $a_{n,\nu}$ durch $a_{n,m-[m^\zeta]}$ und die Anzahl der Glieder durch n abschätzt, so erhält man

$$\sum_{0 \leq \nu \leq m-m^\zeta} a_{n,\nu} s_\nu = O\left(n^{\sigma+1} m^{-\frac{1}{2}} e^{-a\frac{[m^\zeta]^2}{m} + \frac{[m^\zeta]}{m}O(1) + \frac{[m^\zeta]^2}{m^2}O(1)}\right),$$

oder, da $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$ und $\frac{n}{m} = O(1)$ ist,

$$\sum_{0 \leq \nu \leq m-m^\zeta} a_{n,\nu} s_\nu = O\left(m^{\sigma+\frac{1}{2}} e^{-a m^{2\zeta-1}}\right) = o(1).$$

Die zweite Summe (2.4) wird analog abgeschätzt.

Damit ist gezeigt, daß das E_p-Verfahren der Voraussetzung V genügt. Ähnlich wie E_p lassen sich die Matrizen T_α und S_β behandeln. Die Matrix T_α erfüllt die Voraussetzung V mit $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ und $a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$, und die Matrix S_β mit $\lambda = \frac{\beta}{1-\beta}$ und $a = \frac{1-\beta}{2}$.

Für die Integralverfahren T_b' gilt analog

Hilfssatz 6. *Die T_b'-Verfahren erfüllen die Voraussetzung $V'(a, \lambda)$ für die Matrix A'. Die Matrix $A' = a_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots;\ t \geq 0)$ ist permanent. Es gibt positive Konstanten λ und a, so daß für $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{3}{5}$ folgendes richtig ist:*

Für die positiven ganzen Zahlen n und m mit $m = \lambda n + \vartheta$ und $0 \leq \vartheta < \mathrm{Max}(1, \lambda)$ ist bei $m - m^\zeta \leq t \leq m + m^\zeta$ und für jedes ganze $k \geq 1$

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-a\frac{(t-m)^2}{m} + g_k + R_k}. \tag{2.7}$$

g_k hat die Form

$$g_k = \sum{}' l_{ij} \frac{(t-m)^j}{m^i} \quad \text{(zu summieren über } 1 \leq i \leq 2k-1,\ 0 \leq j \leq i+1), \tag{2.8}$$

[4]) $[m^\zeta]$ steht, wie üblich, für die größte ganze Zahl $\leq m^\zeta$.

wobei die l_{ij} von t unabhängige Größen sind, die für $n\to\infty$ gleichmäßig in ϑ[5]) *beschränkt sind. Der Strich an der Summe besagt, daß der Koeffizient $l_{12}=0$ ist. Für R_k gilt gleichmäßig in ϑ*

$$R_k = O\left(\frac{|t-m|^{2k+1}+1}{m^{2k}}\right) \qquad (n\to\infty). \tag{2.9}$$

Ferner ist gleichmäßig in ϑ

$$\int_0^{m-m^\zeta} a_n(t)\,s(t)\,dt = o(1), \qquad \int_{m+m^\zeta}^{\infty} a_n(t)\,s(t)\,dt = o(1) \qquad (n\to\infty), \tag{2.10}$$

sofern $s(t)\in\mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung ist.

Das T_b'-Verfahren erfüllt die Voraussetzung $V'(a,\lambda)$ mit $a=\frac{b}{2}$ und $\lambda=\frac{1}{b}$. Der Beweis für (2.7) verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Teiles von Hilfssatz 5 und sei hier unterdrückt.

Beim Beweis von (2.10) beschränken wir uns auf die zweite Beziehung. Zunächst ist für $\lambda'>\lambda=\frac{1}{b}$ und $s(t)=o(t^\sigma)$

$$\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{m+m^\zeta}^{\infty} t^n e^{-bt}s(t)\,dt = o\left(\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{m+m^\zeta}^{\infty} t^{n+\sigma}e^{-bt}\,dt\right) = o\left(\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} + \frac{b^{n+1}}{n!}\int_{\lambda' n}^{\infty}\right). \tag{2.11}$$

Aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b^{n+1}}{n!}t^{n+\sigma}e^{-bt}\right) = \frac{b^{n+1}}{n!}e^{-bt}t^{n+\sigma-1}[n+\sigma-bt]$$

erkennt man, daß für $t>\frac{n+\sigma}{b}=\lambda n+\lambda\sigma$, also auch für $t\geq m+m^\zeta>\lambda n+\lambda\sigma$, wenn nur n genügend groß ist, der Integrand monoton fällt. Nach (2.7) können wir also folgende Abschätzung anschreiben:

$$\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} t^{n+\sigma}e^{-bt}\,dt = O\left(\lambda' n\, m^{-\frac{1}{2}}(\lambda' n)^\sigma e^{-\frac{b}{2}m^{2\zeta-1}+g_1+R_1}\right)$$

mit

$$g_1 = l_{10}\frac{1}{m}+l_{11}\frac{m^\zeta}{m} = o(1), \qquad R_1 = O\left(\frac{m^{3\zeta}+1}{m^2}\right) = o(1)$$

nach (2.8) und (2.9). Damit wird

$$\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{m+m^\zeta}^{\lambda' n} t^{n+\sigma}e^{-bt}\,dt = O\left(m^{\sigma+\frac{1}{2}}e^{-\frac{b}{2}m^{2\zeta-1}}\right) = o(1).$$

Um das zweite Integral in (2.11) abzuschätzen, sei ein γ so gewählt, daß $0<\gamma<b-\frac{1}{\lambda'}$ gilt. Dann ist für $t>\lambda' n$, wenn nur n genügend groß ist,

$$\left(\frac{t}{\lambda' n}\right)^{n+\sigma}e^{-bt+b\lambda' n} < e^{-\gamma t+\gamma\lambda' n}.$$

[5]) Vgl. Fußnote [2]).

Damit wird für große n

$$\frac{b^{n+1}}{n!}\int_{\lambda' n}^{\infty} t^{n+\sigma} e^{-bt}\,dt < \frac{b^{n+1}}{n!}(n\lambda')^{n+\sigma} e^{-b\lambda' n}\int_{\lambda' n}^{\infty} e^{-\gamma t+\gamma\lambda' n}\,dt = \frac{1}{\gamma}\frac{b^{n+1}}{n!}(n\lambda')^{n+\sigma} e^{-b\lambda' n}$$

und mit

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n} e^{\frac{\vartheta_n}{4n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ 0 \le \vartheta_n \le 1)$$

wird der letzte Ausdruck

$$= O\big((b\lambda')^n n^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{n-b\lambda' n}\big) = O\big(e^{n(1+\log b\lambda'-b\lambda')} n^{\sigma-\frac{1}{2}}\big).$$

Aus $b\lambda' > 1$ und $\log x < x-1$ für $x > 1$ folgt $1+\log b\lambda' - b\lambda' < 0$, d.h. es ist

$$O\big(n^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{n(1+\log b\lambda'-b\lambda')}\big) = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist aber die zweite Beziehung in (2.10) bewiesen.

§ 3. Äquivalenzsätze für die Verfahren E_p, B, S_β und T_α

Um zu dem in der Einleitung in Aussicht gestellten Äquivalenzsatz zwischen den T_α- und den T_b'-Verfahren zu gelangen, muß hier zunächst die Äquivalenz der T_α-Verfahren mit den F_a-Verfahren untersucht werden.

Satz II. *Ist $a > 0$ und genügt die Matrix A für ein $\lambda > 0$ der Voraussetzung $V(a, \lambda)$, so ist das A-Verfahren für Folgen endlicher Ordnung dem F_a-Verfahren äquivalent.*

Beweis. 1. Wir zeigen zuerst: Ist $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ für ein $\sigma \ge 0$ und $F_a\text{-}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = 0$ für ein $a > 0$, so ist auch $A\text{-}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = 0$. Wir setzen $t_n = F_a s$ und $t_n' = A s$. Nach Voraussetzung ist $t_n = o(1)$. Wir müssen also zeigen, daß $t_n' = o(1)$ ist. Wir wählen eine Folge $m = m(n)$ und Zahlen $\vartheta = \vartheta(n)$, so daß $m = \lambda n + \vartheta$ ganz und $0 \le \vartheta < \mathrm{Max}(1, \lambda)$ ist. Geht nun n über die natürlichen Zahlen gegen ∞, so durchläuft m eine Teilfolge der natürlichen Zahlen und geht ebenfalls gegen ∞. Da aber mit $t_n = o(1)$ auch $t_m = o(1)$ gilt für $n \to \infty$, so genügt es offenbar zu zeigen, daß $t_n' - t_m = o(1)$ für $n \to \infty$. Wenn wir zunächst für $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$

$$\bar{t}_n' = \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} a_{n\nu} s_\nu \quad \text{und} \quad \bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu$$

setzen, so ist es nach den Hilfssätzen 1 und 5 klar, daß nur noch $\bar{t}_n' - \bar{t}_m = o(1)$ für $n \to \infty$ nachgewiesen werden muß. Im Anschluß an HYSLOP [4] gehen wir dazu so vor:

Es seien $s > \mathrm{Max}(\sigma - \frac{1}{2}, 0)$ und $k > \mathrm{Max}(\sigma + \frac{1}{2}, 0)$ ganze Zahlen. Wir bilden

$$\bar{t}_n' - \bar{t}_m = \sum_{m-m^\zeta < \nu < m+m^\zeta} \left[a_{n\nu} s_\nu - \sqrt{\frac{a}{\pi m}}\, e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu\right]$$

und dies ist nach Hilfssatz 5

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m-m^{\frac{1}{2}} < \nu < m+m^{\frac{1}{2}}} s_\nu \left[e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m} + g_k + R_k} - e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{g_k^\mu}{\mu!} + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{(g_k+R_k)^\mu - g_k^\mu}{\mu!} +$$

$$+ \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=2s+1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} (g_k + R_k)^\mu = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Um einzusehen, daß $A_1 = o(1)$ ist, betrachten wir für $1 \leq \mu \leq 2s$

$$v = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \frac{g_k^\mu}{\mu!} .$$

g_k^μ ist nach (2.2) eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i,j} \bar{l}_{ij} \frac{(\nu-m)^j}{m^i} .$$

Dabei ist aber darauf zu achten, daß $0 \leq j \leq \mu$ gilt für $i = \mu$ und $0 \leq j \leq i+\mu$ für $i > \mu$. Die $\bar{l}_{ij}$ sind unabhängig von ν und für $n \to \infty$ beschränkt. Der Ausdruck v kann also auf Summanden

$$v_{ij} = \bar{l}_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \frac{(\nu-m)^j}{m^i}$$

zurückgeführt werden, wobei i und j den angegebenen Einschränkungen unterworfen sind. Nun ist nach Voraussetzung

$$t_n = F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} = o(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ n \to \infty),$$

also nach Hilfssatz 4 auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Wir können somit Hilfssatz 3 (mit $q = 0$) anwenden. Ist $i = \mu$ und $0 \leq j \leq \mu$, so hat man für beliebiges $\eta > 0$

$$v_{ij} = o\left(m^{-\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}\right) = o\left(m^{-\frac{1}{2}\mu+\eta}\right)$$

und dies ist, weil η beliebig klein gewählt werden kann und $\mu \geq 1$ ist, $o(1)$ für $n \to \infty$. Die anderen Summanden v_{ij}, die durch $i > \mu$, $0 \leq j \leq i+\mu$ festgelegt sind, erlauben die Abschätzung

$$v_{ij} = o\left(m^{-\frac{1}{2}-i+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}\right) = o\left(m^{-\frac{1}{2}(\mu+1)+\frac{1}{2}\mu+\eta}\right) = o\left(m^{-\frac{1}{2}+\eta}\right) = o(1).$$

Also ist gezeigt, daß v und damit A_1 für $n \to \infty$ eine Nullfolge bildet.

A_2 ist eine Summe von Gliedern der Form

$$w = O(1)\left[\sqrt{\frac{a}{\pi m}}\sum_{\nu} \nu^{\sigma}\,|R_k|^{\tau}\,|g_k|^{\varrho}\,e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}}\right] \qquad (\tau \geq 1, \varrho \geq 0, 1 \leq \tau+\varrho = \mu \leq 2s).$$

Setzen wir für R_k und g_k die Ausdrücke (2.2) und (2.3) ein, so zerfällt w in Summanden der Form

$$\overline{w} = O(1)\left[\sqrt{\frac{a}{\pi m}}\sum_{\nu} \nu^{\sigma}\,\frac{|\nu-m|^{\lambda(2k+1)}}{m^{2k\tau}}\,\frac{|\nu-m|^{j}}{m^{i}}\,e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}}\right];$$

dabei ist

$$1 \leq \tau \leq \mu,\ \tau+\varrho = \mu \leq 2s,\ 0 \leq j \leq i+\varrho,\ 0 \leq \varrho \leq i,\ 0 \leq \lambda \leq \tau.$$

Die Anwendung der Hilfssätze 1 und 2 zeigt, daß für $k > \sigma + \frac{1}{2}$

$$\overline{w} = O\left(m^{-\frac{1}{2}+\sigma-i-2k\tau+\frac{1}{2}(2k\tau+\tau+j+1)}\right) = O\left(m^{\sigma-i-\tau\left(k-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(i+\varrho)}\right) = O\left(m^{\sigma-k+\frac{1}{2}}\right) = o(1)$$

gilt. Es ist also w und damit auch A_2 für $n \to \infty$ eine Nullfolge.

Schließlich ist noch A_3 zu untersuchen. Für $|\nu - m| \leq m^{\zeta}$ gilt nach (2.1)

$$g_k + R_k = g_1 + R_1 = l_{10}\frac{1}{m} + l_{11}\frac{\nu-m}{m} + O\left(\frac{|\nu-m|^3+1}{m^2}\right)$$
$$= \frac{|\nu-m|+1}{m}O(1) + \frac{|\nu-m|^3}{m^2}O(1).$$

Wegen $|\nu-m| \leq m^{\zeta}$ $\left(\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}\right)$ ist für genügend große n $|g_k + R_k| \leq \gamma < 1$, so daß das Verhalten von A_3 für $n \to \infty$ durch

$$z = O\left(m^{-\frac{1}{2}}\sum_{m-m^{\zeta} < \nu < m+m^{\zeta}} \nu^{\sigma}\,|R_k + g_k|^{2s+1}\,e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}}\right)$$

wiedergegeben wird. Beachtet man, daß die Darstellung

$$|g_k + R_k|^{2s+1} = \frac{|\nu-m|^{2s+1}+1}{m^{2s+1}}O(1) + \sum_{\varrho=1}^{2s+1} O(1)\,\frac{|\nu-m|^{2\varrho+2s+1}}{m^{\varrho+2s+1}}$$

möglich ist, so folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 für $s > \mathrm{Max}\left(\sigma - \frac{1}{2}, 0\right)$

$$z = O\left(m^{-\frac{1}{2}+\sigma-s}\right) + O\left(m^{-1+\sigma-2s}\right) + O\left(m^{-\frac{1}{2}+\sigma-s}\right) = o(1).$$

A_3 ist also auch eine Nullfolge und damit $t'_n - t_m = o(1)$ für $n \to \infty$.

Zu bemerken ist, daß zum Nachweis für $A_2 = o(1)$ und $A_3 = o(1)$ nur die Hilfssätze 1 und 2, jedoch nicht die Voraussetzung $t_n = F_a s = o(1)$, herangezogen wurde. Diese Tatsache wird in dem folgenden zweiten Teil des Beweises benützt.

2. Es ist noch nachzuweisen, daß aus $t'_n = o(1)$ die Beziehung $t_n = o(1)$ folgt. Die Voraussetzung ist nach (2.1) gleichbedeutend mit

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}}\sum_{m-m^{\zeta} < \nu < m+m^{\zeta}} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}+g_k+R_k}\,s_{\nu} = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

wo g_k und R_k die in (2.2) und (2.3) angegebene Bedeutung haben und m und n durch $m = \lambda n + \vartheta$ verbunden sind. Daraus folgt

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m} + g_k + R_k} s_\nu = o(1) \qquad \text{für } m = 1, 2, \ldots;\ m \to \infty$$

oder

$$\sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} (e^{g_k+R_k} - 1)\, s_\nu = o(1)$$

oder mit den Bezeichnungen des ersten Beweisteiles

$$\bar{t}_m + A_1 + A_2 + A_3 = o(1) \qquad (m \to \infty). \tag{3.1}$$

Nach unserer obigen Bemerkung ist $A_2 = o(1)$ und $A_3 = o(1)$, wenn nur $s > \mathrm{Max}(\sigma - \frac{1}{2}, 0)$, $k > \mathrm{Max}(\sigma + \frac{1}{2}, 0)$ und $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ gilt. Für solche Zahlen s und k kann also (3.1) zu

$$\bar{t}_m + A_1 = o(1) \qquad (m \to \infty) \tag{3.2}$$

vereinfacht werden. Zu zeigen ist noch, daß $\bar{t}_m = o(1)$ gilt. Nach Hilfssatz 2 wissen wir, daß für jede Folge s_ν mit $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ die Beziehung

$$\bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu = o(m^\sigma) \qquad (m \to \infty)$$

gilt. Es sei γ die untere Grenze aller $\bar{\gamma}$, für die

$$\bar{t}_m = o(m^{\bar{\gamma}})$$

ist. Auf jeden Fall ist dann $\gamma \leq \sigma$. Ist $\gamma < 0$, so ist $\bar{t}_m = o(1)$ für $m \to \infty$ und damit die Behauptung bewiesen. Ist aber $0 \leq \gamma \leq \sigma$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\bar{t}_m = o(m^{\gamma+\varepsilon}),$$

jedoch

$$\bar{t}_m = o(m^{\gamma-\delta})$$

für kein $\delta > 0$. Wir betrachten den Ausdruck

$$A_1 = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{m - m^{\frac{1}{2}} < \nu < m + m^{\frac{1}{2}}} s_\nu e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} \sum_{\mu=1}^{2s} \frac{g_k^\mu}{\mu!}.$$

Nach dem ersten Beweisteil ist dieser eine endliche Summe von Ausdrücken der Form

$$p_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu \frac{(\nu-m)^j}{m^i}.$$

Dabei gilt $0 \leq j \leq \mu$ für $i = \mu$ und $0 \leq j \leq i + \mu$ für $i > \mu$ $(1 \leq \mu \leq 2s)$. Wegen

$$\bar{t}_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-m)^2}{m}} s_\nu = o(m^{\gamma+\varepsilon}) \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ m \to \infty)$$

ist nach den Hilfssätzen 1 und 4 auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_{\nu} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} s_\nu = o(x^{\gamma+\varepsilon}) \qquad (x \to \infty).$$

Hilfssatz 3 liefert dann (mit $q=\gamma+\varepsilon$) im ersten Fall ($i=\mu$, $0 \leq j \leq \mu$)

$$p_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2}-i+\gamma+\varepsilon+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}) = o(m^{-\frac{1}{2}\mu+\gamma+\varepsilon+\eta}) = o(m^{\gamma+\varepsilon+\eta-\frac{1}{2}})$$

und, da ε und η beliebig klein gewählt werden dürfen,

$$p_{ij} = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

für ein $\delta_0 > 0$. Im zweiten Fall ($i \geq \mu+1$, $0 \leq j \leq i+\mu$) gilt

$$p_{ij} = o(m^{-\frac{1}{2}-i+\gamma+\varepsilon+\frac{1}{2}(j+1)+\eta}) = o(m^{\gamma+\varepsilon+\eta-\frac{1}{2}}) = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

mit demselben δ_0 wie oben. Es gilt also

$$A_1 = o(m^{\gamma-\delta_0})$$

und damit nach (3.2)

$$\bar{t}_m = o(1) + o(m^{\gamma-\delta_0}).$$

Wäre $\gamma - \delta_0 > 0$, so wäre $\bar{t}_m = o(m^{\gamma-\delta_0})$, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von γ. Also ist $\gamma - \delta_0 \leq 0$ und damit $\bar{t}_m = o(1)$. Das sollte aber noch bewiesen werden.

Aus Satz II, Hilfssatz 5 und dem Ergebnis von HYSLOP [4], das die Äquivalenz von $F_{\frac{1}{2}}$ mit dem B-Verfahren für Folgen endlicher Ordnung garantiert, ergeben sich die nachfolgenden Sätze III und IV, mit denen Ergebnisse von W. MEYER-KÖNIG verallgemeinert werden.

Satz III. *Für Folgen endlicher Ordnung ist*

E_p *äquivalent mit* F_a *für* $a = \dfrac{2^{p-1}}{2^p-1}$ $\quad (0 < p;\ \frac{1}{2} < a < \infty)$

S_β *äquivalent mit* F_a *für* $a = \dfrac{1-\beta}{2}$ $\quad (0 < \beta < 1;\ 0 < a < \frac{1}{2})$

T_α *äquivalent mit* F_a *für* $a = \dfrac{1-\alpha}{2\alpha}$ $\quad (0 < \alpha < 1;\ 0 < a < \infty)$

B *äquivalent mit* $F_{\frac{1}{2}}$.

Schalten wir noch das F_a-Verfahren aus, so ergibt sich

Satz IV. *Für Folgen endlicher Ordnung ist*

T_α *äquivalent mit* E_p *für* $\alpha = \dfrac{2^p-1}{2^{p+1}-1}$ $\quad (0 < p;\ 0 < \alpha < \frac{1}{2})$

$T_{\frac{1}{2}}$ *äquivalent mit* B

T_α *äquivalent mit* S_β *für* $\alpha = \dfrac{1}{2-\beta}$ $\quad (0 < \beta < 1;\ \frac{1}{2} < \alpha < 1)$.

Insbesondere wurde damit der M. RIESZsche Satz $B \sim T_{\frac{1}{2}}$ auf Folgen endlicher Ordnung ausgedehnt.

Dem Satz II entspricht der folgende Satz II′ für das in § 1 definierte J_a-Verfahren.

Satz II′. *Ist $a>0$ und genügt die Matrix A' für ein $\lambda>0$ der Voraussetzung $V'(a,\lambda)$, so ist das A'-Verfahren für Funktionen $s(t)\in\mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung dem J_a-Verfahren äquivalent.*

Der Beweis dieses Satzes sei unterdrückt. Er ergibt sich im wesentlichen dadurch, daß man im Beweis des Satzes II die Summen über ν durch Integrale über t ersetzt.

Zieht man Hilfssatz 6 heran, so folgt schließlich

Satz III′. *Das T_b'-Verfahren $(b=2a>0)$ ist für Funktionen $s(t)\in\mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung mit dem J_a-Verfahren äquivalent.*

§ 4. Der Äquivalenzsatz für die Verfahren T_α und T_b'

Nach Satz III′ ist das T_b'-Verfahren für Funktionen $s(t)\in\mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung mit dem J_a-Verfahren äquivalent für $a=\frac{b}{2}$. Ist eine Folge s_ν gegeben, so definiere man dazu die Funktion $s(t)=s_\nu$ für $\nu\leq t<\nu+1$ $(\nu\geq 0$, ganz). Auf diese Weise lassen sich die Verfahren T_b' und J_a auch zur Limitierung von Folgen nutzbar machen, und es sind T_b' und J_a für $b=2a>0$ äquivalent für Folgen endlicher Ordnung. Andererseits ist für solche Folgen das T_α-Verfahren mit dem F_a-Verfahren äquivalent, wenn $a=\frac{1-\alpha}{2\alpha}$ $(a>0;$ $0<\alpha<1)$ gilt. Um also das T_b'-Verfahren für Folgen mit dem T_α-Verfahren in Verbindung zu bringen, genügt es, dies für die Verfahren F_a und J_a (für Folgen) zu tun.

Satz V. *Für jedes $a>0$ ist das F_a-Verfahren für Folgen endlicher Ordnung mit dem J_a-Verfahren äquivalent.*

Beweis. Definiert man $s(t)$ zu s_ν wie oben, so gilt

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}}\int_0^\infty e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}s(t)\,dt=\sqrt{\frac{a}{\pi n}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_\nu^{\nu+1}e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}dt\,s_\nu.$$

Die Integrale der rechten Seite formen wir um, indem wir auf die Integranden $f(t)=e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}$ $(t\geq 0,\ n\geq 1)$ die TAYLORsche Formel anwenden:

$$e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}=e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}}+\sum_{\mu=1}^{r-1}\frac{1}{\mu!}f^{(\mu)}(\nu)\,(t-\nu)^\mu+$$
$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_\nu^t f^{(r)}(x)\,(t-x)^{r-1}\,dx\quad(r\geq 1),$$

also

$$\int_\nu^{\nu+1}e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}dt=e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}}+\sum_{\mu=1}^{r-1}\frac{1}{(\mu+1)!}f^{(\mu)}(\nu)+\frac{1}{(r-1)!}\int_\nu^{\nu+1}\int_\nu^t f^{(r)}(x)\,(t-x)^{r-1}\,dx\,dt.$$

Nun ist

$$\int_{x=\nu}^{\nu+1}\int_{t=x}^{\nu+1}(t-x)^{r-1}\,dt\,f^{(r)}(x)\,dx=\frac{1}{r}\int_{\nu}^{\nu+1}f^{(r)}(x)\,(\nu+1-x)^r\,dx,$$

also erhalten wir

$$(4.1)\qquad \begin{cases} J_a s - F_a s = \sqrt{\dfrac{a}{\pi n}}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{r-1}\frac{1}{(\mu+1)!}f^{(\mu)}(\nu)\,s_\nu + \\ \qquad\qquad + \sqrt{\dfrac{a}{\pi n}}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\int_{\nu}^{\nu+1}f^{(r)}(x)\,(\nu+1-x)^r\,dx\,s_\nu = T_1+T_2. \end{cases}$$

Wie man sich leicht überzeugt, konvergieren alle auftretenden Reihen.

1. Wir zeigen zuerst, daß aus $t_n = F_a s = o(1)$ die Beziehung $t_n' = J_a s = o(1)$ folgt, sofern $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ für ein $\sigma \geqq 0$ gilt. Dazu zeigen wir, daß $T_1 = T_1(n)$ und $T_2 = T_2(n)$ Nullfolgen sind für $n \to \infty$. Nehmen wir $r = 2p > 2\sigma$ (p eine natürliche Zahl), dann ist wegen $|\nu+1-x| \leq 1$ für $\nu \leq x \leq \nu+1$

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\int_{\nu}^{\nu+1}f^{(2p)}(x)\,(\nu+1-x)^{2p}\,dx\,s_\nu = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}|s(t)\,f^{(2p)}(t)|\,dt\right),$$

wenn $s(t)$ wie oben definiert ist. Wegen

$$(4.2)\qquad f^{(\mu)}(\nu) = e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}}\sum_{\tau=0}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]}\frac{a_\tau^{(\mu)}}{n^{\mu-\tau}}(\nu-n)^{\mu-2\tau}\qquad (a_\tau^{(\mu)}\ \text{Konstante}),$$

gilt

$$\int_0^{\infty}|f^{(2p)}(t)\,s(t)|\,dt = O\left(\sum_{\tau=0}^{p}\frac{a_\tau^{(2p)}}{n^{2p-\tau}}\int_0^{\infty}e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}\,|t-n|^{2p-2\tau}\,t^\sigma\,dt\right),$$

und nach Hilfssatz 2

$$\frac{1}{n^{2p-\tau}}\int_0^{\infty}e^{-a\frac{(t-n)^2}{n}}\,|t-n|^{2p-2\tau}\,t^\sigma\,dt = O\left(n^{\sigma-2p+\tau+\frac{1}{2}(2p-2\tau+1)}\right) = O\left(n^{\sigma+\frac{1}{2}-p}\right).$$

Da aber $p > \sigma$ gewählt wurde, so folgt $T_2 = o(1)$ für $n \to \infty$.

Wichtig für den nachherigen zweiten Beweisschritt ist der Umstand, daß $T_2 = o(1)$ ohne Hereinnahme der Voraussetzung $F_a s = o(1)$ bewiesen wurde.

Um T_1 abzuschätzen, beachten wir, daß sich T_1 auf Grund von (4.2) in endlich viele Summanden der Form

$$t_{ij} = c_{ij}\sqrt{\frac{a}{\pi n}}\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}}\frac{(\nu-n)^j}{n^i}\,s_\nu$$

aufspalten läßt, wobei die c_{ij} Konstante sind und für die ganzen Zahlen i und j gilt $0 \leq j \leq i$, $1 \leq i$. Nun folgt aus

$$F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} s_\nu = o(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ n \to \infty)$$

nach Hilfssatz 4, daß auch

$$\sqrt{\frac{a}{\pi x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-x)^2}{x}} s_\nu = o(1) \qquad (x \to \infty)$$

ist. Damit ist (für $q = 0$) die Voraussetzung des Hilfssatzes 3 erfüllt; es gilt also

$$t_{ij} = o\left(n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(j+1)+\eta-i}\right) = o\left(n^{\frac{1}{2}j-i+\eta}\right) = o(1),$$

da η beliebig klein gewählt werden kann. Es ist also $T_1 = o(1)$.

2. Es sei nun $J_a s = o(1)$ für $n \to \infty$ und $s_\nu = o(\nu^\sigma)$ vorausgesetzt. Bewiesen werden soll, daß auch $F_a s = o(1)$ ist. Da $T_2 = T_2(n)$ eine Nullfolge bildet, ist nach (4.1) nur noch $T_1 = o(1)$ zu beweisen. Nach Hilfssatz 2 gilt

$$F_a s = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} s_\nu = o(n^\sigma) \qquad (n \to \infty).$$

Es sei nun γ die untere Grenze aller $\bar{\gamma}$ für die $F_a s = o(n^{\bar{\gamma}})$ gilt. Es ist also $\gamma \leq \sigma$, und wenn schon $\gamma < 0$ ausfällt, so sind wir mit unserem Beweis fertig. Gilt aber $0 \leq \gamma \leq \sigma$, so ist

$$F_a s = o(n^{\gamma+\varepsilon}) \tag{4.3}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wie wir bereits wissen, setzt sich der Ausdruck T_1 aus endlich vielen Summanden der Form

$$t_{ij} = c_{ij} \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-a\frac{(\nu-n)^2}{n}} \frac{(\nu-n)^j}{n^i} s_\nu \qquad (0 \leq j \leq i,\ 1 \leq i)$$

zusammen. Wegen (4.3) zusammen mit den Hilfssätzen 3 und 4 (mit $q = \gamma + \varepsilon$) folgt aber

$$t_{ij} = o\left(n^{-\frac{1}{2}+\gamma+\varepsilon+\frac{1}{2}(j+1)-i+\eta}\right) = o\left(n^{\gamma+\varepsilon+\eta-\frac{1}{2}}\right) = o\left(n^{\gamma-\delta_0}\right),$$

wobei $\delta_0 > 0$ eine von i und j unabhängige Zahl bedeutet (ε und η können beliebig klein gewählt werden). Es ist also $T_1 = o(n^{\gamma-\delta_0})$. Aus (4.1) zusammen mit $T_2 = o(1)$ und $J_a s = o(1)$ resultiert

$$F_a s = o(1) + o(n^{\gamma-\delta_0}).$$

Wäre $\gamma - \delta_0 > 0$, so wäre $F_a s = o(n^{\gamma-\delta_0})$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von γ. Also ist $\gamma - \delta_0 \leq 0$, d.h. $T_1 = o(1)$. Damit ist Satz V bewiesen.

Ziehen wir noch die Sätze III und III′ heran, so erhalten wir

Satz VI. *Ist* $b=\frac{1-\alpha}{\alpha}$ $(b>0;\ 0<\alpha<1)$ *so ist das* T_b'*-Verfahren für Folgen endlicher Ordnung mit dem* T_α*-Verfahren äquivalent.*

Literatur

[1] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [2] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. Rendiconti Palermo **41**, 36—53 (1916). — [3] HYSLOP, J. M.: Some relations between the de la Vallée-Poussin and Abel methods of summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **40**, 449—467 (1935). — [4] HYSLOP, J. M.: The generalisation of a theorem on Borel summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **41**, 243—256 (1936). — [5] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1949). — [6] MEYER-KÖNIG, W.: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179—205 (1952).

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 9. März 1956)

TAYLOR, A. E.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 53—57 (1956)

Extensions of a Theorem of Hellinger and Toeplitz

By
ANGUS E. TAYLOR

1. Introduction

Consider the Hilbert space l^2 of sequences $x = \{\xi_n\}$ such that $\sum_n |\xi_n|^2 < \infty$. Let (a_{ij}) be an infinite matrix such that

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \tag{1}$$

is a convergent series for each x in l^2, and moreover such that the sequence $\{\eta_i\}$ is in every such case an element of l^2. If this element of l^2 be denoted by y, the mapping of x into y defines a bounded linear operator on l^2. This result is due originally to HELLINGER and TOEPLITZ [3, pp. 321—322]; for a more recent treatment of the subject see a paper by STONE and TAMARKIN [6, pp. 298—302]. The purpose of the present paper is to point out a method of proving the Hellinger-Toeplitz theorem by an argument which applies to sequence spaces of a very inclusive type. Then we are able to see that the theorem can be greatly generalized. One application of the generalization is a new proof of the theorem which asserts that if X and Y are normed linear spaces and A is a linear mapping of X into Y whose conjugate (also called adjoint) exists, then A must be continuous. For Hilbert space this implies the known result that if A is a linear mapping of a Hilbert space into itself such that the adjoint A^* is everywhere defined, then A must be continuous [6, p. 296].

The essential tool is the closed graph theorem, which asserts that a closed linear mapping of one Banach space into another must be continuous.

2. Linear operators on sequence spaces

By a sequence space we mean a space whose elements are sequences $\{\xi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, where each ξ_n is a number (real or complex). We call ξ_n the n-th component of the element. We are going to be interested in sequence spaces which are Banach spaces and which are such that each ξ_n is a continuous function of x. Furthermore, it is assumed that in the space addition and multiplication by scalars are carried out component-wise in the usual way. All the familiar sequence spaces are of this type.

THEOREM 1. *Let X and Y each be a Banach space which is a sequence space for which the components of a vector are continuous functions of the vector. Let (a_{ij}) be an infinite matrix such that the series*

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$$

converges for each element $x=\{\xi_j\}$ in X and defines a sequence $y=\{\eta_i\}$ which is an element of Y. If we write $y=Ax$ to express this dependence of y on x, the operator A is a bounded linear operator on X into Y.

PROOF. For each n and i the sum

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j$$

defines a continuous linear functional on X. The limit as $n\to\infty$ is therefore a continuous linear functional [*1*, Th. 5, p. 80]. We denote this functional by x_i', and its value at x by $x_i'(x)$. Observe that Ax is the sequence $\{x_i'(x)\}$, which is an element of Y. It is evident that A is linear (in the algebraic sense). Consequently it will follow that A is continuous if we prove that A is closed. Here is where we use the "closed-graph theorem" [*1*, Th. 7, p. 41]. Suppose then that $x_n\to x$ and $Ax_n\to y$. From $x_n\to x$ we have $x_i'(x_n)\to x_i'(x)$ for each i. Since $x_i'(x)$ is the i-th component of Ax, the continuity of components and $Ax_n\to y$ together imply $x_i'(x_n)\to\eta_i$, where $y=\{\eta_i\}$. But then we have $x_i'(x)=\eta_i$ by the uniqueness of limits. This means that $Ax=y$; hence A is closed and the proof is complete.

Theorem 1 can be generalized considerably. The spaces X and Y need not be Banach spaces, but may be complete metrisable topological linear spaces of a more general type known as (FK) spaces. The essential characteristics of an (FK) space are: (1) it is a complete metrisable topological linear space; (2) its elements are sequences $x=\{\xi_n\}$ and each ξ_n is a continuous function of x. The closed graph theorem is applicable to such spaces. The statement and proof of Theorem 1 for (FK) spaces were given by ZELLER (Satz 4.4, p. 471 of [7]).

3. A generalization

The concept of a sequence space such that the components of a vector are continuous functions of the vector can be broadened in the following way: Let S be an arbitrary set and consider a Banach space Y whose elements are functions defined on S, with values in a Hausdorff topological linear space Z. We assume that addition and scalar multiplication in Y are carried out on the functions in the usual way. If $y\in Y$ and $s\in S$, we call the value $y(s)$ the component of y at s. In what follows we shall require that $y(s)$ depend continuously on y. We revert to the sequence space situation of § 2 as a special case; there we take for S the set of positive integers and for Z the scalar field associated with Y.

The other ingredient of the generalization of Theorem 1 is the appropriate substitute for the series

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j. \tag{2}$$

Let X be an arbitrary Banach space and let $[X, Z]$ denote the set of all continuous linear mappings of X into the Hausdorff topological linear space Z.

For each s in S let $a(s)$ be such a mapping. Then we think of $a(s)x$ as the general object of which (2) is a special case, with s corresponding to i.

THEOREM 2. *Let X and Z be as specified in the foregoing paragraph. Let Y be a Banach space of functions, of the type described in the first paragraph of this section. Let $a(s)$ denote the value at s of a function on S to $[X, Z]$ such that $a(s)x$, as a function of s, is a member y of Y for each x in X. If we write $y = Ax$ to express this dependence of y on x, so that $(Ax)(s) = a(s)x$, then the operator A is a bounded linear operator on X into Y.*

PROOF. The fact that A is linear is evident from the nature of $a(s)$. Hence all that is required is to prove that A is closed. If $x_n \to x$ we conclude $a(s)x_n \to a(s)x$ for each s, since $a(s) \in [X, Z]$. If $Ax_n \to y$ we conclude $(Ax_n)(s) \to y(s)$ for each s, by the continuous dependence of components on vectors. Thus we see that $x_n \to x$ and $Ax_n \to y$ together imply $Ax = y$, or that A is closed. Here we use the fact that Z is a Hausdorff space to guarantee that convergent sequences have unique limits.

THEOREM 3. *Let X, Y and Z be as specified in Theorem 2. Then every continuous linear mapping A of X into Y is expressible in the form*

$$(Ax)(s) = a(s)x$$

where $a(s)$ is a function on S to $[X, Z]$ of such a nature that $a(s)x$, as a function of s, is for each x in X a member of Y.

PROOF. It suffices to observe that $(Ax)(s)$ is a function on $X \times S$ to Z which, for fixed s, is linear and continuous in x; the continuity follows from the continuity of A and the assumption that in Y the component of a vector depends continuously on the vector.

Theorem 3 is a generalization of a theorem of IZUMI and SUNOUCHI, which is given in a paper not accessible to the writer [4]; the theorem of IZUMI and SUNOUCHI is stated in the review of their paper in Mathematical Reviews, vol. 7, page 306. It is essentially Theorem 3 for the case in which Z is the scalar field.

If no further information about X or Y is given it is not to be expected that one can state an explicit condition on $a(s)$ which will guarantee that $a(s)x$, as a function of s, is an element of Y for each x in X. There is, however, a special case of interest in which such an explicit condition on $a(s)$ can be given. Suppose that Z is a Banach space and that Y is the Banach space of all bounded functions defined on S with values in Z; the norm in Y is defined as

$$\|y\|_Y = \sup_s \|y(s)\|_Z.$$

Here we use Y or Z as subscript to indicate the space in which the norm is taken. The following theorem is a direct generalization of a result of R. S. PHILLIPS [5, Th. 7.1, p. 538].

THEOREM 4. *If Y and Z are spaces as described in the foregoing sentence, and X is any Banach space, the general form of a continuous linear operator*

A on X into Y is $(Ax)(s) = a(s)x$, where for each s in S $a(s)$ is a member of $[X, Z]$, and

$$\sup_s \|a(s)\| < \infty. \tag{3}$$

The norm of A is

$$\|A\| = \sup_s \|a(s)\|. \tag{4}$$

PROOF. If A is given, it determines $a(s)$, and vice-versa. The inequality $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|$ becomes

$$\sup_s \|a(s)x\|_Z \leq \|A\| \|x\|,$$

and this implies

$$\sup_s \|a(s)\| \leq \|A\|.$$

On the other hand, if (3) holds,

$$\|a(s)x\|_Z \leq \|a(s)\| \|x\| \leq \sup_s \|a(s)\| \|x\|,$$

and so $a(s)x$ defines an element Ax in Y, with

$$\|Ax\|_Y = \sup_s \|a(s)x\|_Z \leq \sup_s \|a(s)\| \|x\|.$$

Therefore

$$\|A\| \leq \sup_s \|a(s)\|.$$

This completes the proof.

4. A theorem relating to the conjugate of an operator

If X is any linear space (regardless of topology) we define X^l as the linear space of linear functionals defined on X. Here linearity of a functional is understood in the purely algebraic sense. We use x' as a generic symbol for elements of X^l. If X and Y are linear spaces and A is a linear mapping of X into Y, we define the *transpose* of A as the mapping of A^T of Y^l into X^l, where

$$(A^T y')(x) = y'(Ax).$$

If X and Y are *normed* linear spaces, we use X' and Y' to denote the normed linear spaces of *continuous* linear functionals on X and Y, respectively. Evidently X' and Y' are subspaces of X^l and Y^l respectively. As normed linear spaces, X' and Y' are complete. If A is a linear mapping of X into Y, and if the transpose A^T has the property that $A^T(Y') \subset X'$ (i.e., if $x' = A^T y'$ is continuous on X whenever y' is continuous on Y), we say that the *conjugate* of A exists, and we define the conjugate operator A' as the restriction of A^T to Y'. It is a standard fact that A' exists and is a continuous mapping of Y' into X', provided that A is continuous. It is the converse of this fact that we now consider.

THEOREM 5. *Let X and Y be any normed linear spaces. If A is a linear mapping of X into Y such that the conjugate A' exists in the sense specified in the foregoing paragraph, then A is continuous.*

This theorem was proved by DUNFORD [2, Th. 18, p. 317] as an application of the principle of uniform boundedness. We shall give a different argument. Both proofs rest ultimately on the fact that a complete metric space is of the second category. The proof which we give is a direct application of Theorem 2. To make clear the application we list the counterparts, in the present situation, of the sets and functions occurring in Theorem 2. We use F to denote the field of scalars (real or complex).

Theorem 2: $X \quad Y \quad Z \quad S \quad A \quad (Ax)(s)$.

Present situation: $Y \quad X \quad F \quad X \quad A' \quad (A'y')(x)$.

For fixed x, $x'(x)$ is the component of x' at x; this is evidently continuous as a function of x' when x' varies over X'. The hypothesis that $A^T Y' \subset X'$ corresponds to the assumption in Theorem 2 that $(Ax)(s)$, as a function of s, belongs to Y for each x. Consequently, by application of Theorem 2, we conclude that A' is continuous. Then

$$\|A'y'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|y'(Ax)\| \leq \|A'\| \|y'\|.$$

Consequently, for each x such that $\|x\| \leq 1$ we have

$$\|Ax\| = \sup_{\|y'\| \leq 1} \|y'(Ax)\| \leq \|A'\|.$$

This shows that A is continuous.

Bibliography

[1] BANACH, S.: Théorie des Opérations Linéaires. Warsaw 1932. — [2] DUNFORD, NELSON: Uniformity in linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 305—356 (1938). — [3] HELLINGER, E., and O. TOEPLITZ: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. **69**, 289—330 (1910). — [4] IZUMI, S., and G. SUNOUCHI: Notes on Banach space. VI. Abstract integrals and linear operators. Proc. Imperial Acad. Tokyo **19**, 169—173 (1943). — [5] PHILLIPS, R. S.: On linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 516—541 (1940). — [6] STONE, M. H., and J. D. TAMARKIN: Elementary proofs of some known theorems of the theory of complex Euclidean spaces. Duke Math. J. **3**, 294—302 (1937). — [7] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951).

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles 24 (USA)

(Eingegangen am 14. März 1956)

LANDSBERG, M.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 58—63 (1956)

Über das Spektrum symmetrisierbarer Endomorphismen in lokalkonvexen Räumen, insbesondere in Räumen vom Typ (ω)

Von
MAX LANDSBERG

Einleitung und Ergebnisse

Eine Abbildung Θ von einem linearen Raum F in einen linearen Raum wird antilinear genannt, wenn $\Theta(x+y)=\Theta(x)+\Theta(y)$, $\Theta(a\,x)=\bar{a}\,\Theta(x)$ ($x, y\in F$; a komplex) ist. Gehört x zum linearen Raum F und ist u eine Linearform auf F, so schreiben wir $\langle x, u\rangle$ für $u(x)$. Ist E ein lokalkonvexer Raum mit dem dualen Raum E' und A ein stetiger Endomorphismus von E, so gibt es bekanntlich einen (und nur einen) Endomorphismus A' von E' mit $\langle A\,x, u\rangle=\langle x, A'u\rangle$ ($x\in E$, $u\in E'$), nämlich die zu A adjungierte Abbildung. Mit I wird im folgenden die identische Abbildung von E bezeichnet.

Ist nun A ein stetiger Endomorphismus des lokalkonvexen Raumes E, so heiße A symmetrisierbar von 1. Art, wenn eine antilineare Abbildung Θ von E' in E existiert, so daß $\langle\Theta u, u\rangle\neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $u\in E'$ und $\langle\Theta u, v\rangle=\overline{\langle\Theta v, u\rangle}$, $\langle A\,\Theta u, v\rangle=\overline{\langle A\,\Theta v, u\rangle}$ ($u, v\in E'$) ist. A heiße symmetrisierbar von 2. Art, wenn A' als Endomorphismus des mit der schwachen Topologie versehenen Raumes E' symmetrisierbar von 1. Art ist. Wir nennen A kurz symmetrisierbar, wenn A symmetrisierbar von 1. Art oder von 2. Art ist. Ein lokalkonvexer Raum werde symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art bzw. symmetrisierbar genannt, wenn seine identische Abbildung symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art bzw. symmetrisierbar ist.

Es sind also genau die z. B. von 1. Art symmetrisierbaren lokalkonvexen Räume, auf denen stetige von 1. Art symmetrisierbare Endomorphismen existieren. Wichtige Räume der Funktionalanalysis sind symmetrisierbar. Offensichtlich ist jeder HILBERT-Raum symmetrisierbar von 1. Art und von 2. Art. Ist E ein HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt (x, y), so ist der stetige Endomorphismus A von E genau dann symmetrisierbar von 1. Art, wenn es einen selbstadjungierten Endomorphismus H von E gibt, so daß $(Hx, x)\neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $x\in E$ und außerdem auch AH selbstadjungiert ist. Symmetrisierbar sind auch die Folgenräume l_r ($r\geq 1$) und l_∞. Jeder Raum vom Typus (ω), d. h. jeder lokalkonvexe und schwach vollständige Raum von unendlicher Dimension, ist symmetrisierbar von 1. Art, jedoch nicht von 2. Art (s. § 2). Wir erinnern hierbei daran, daß ein linearer topologischer Raum als vollständig bezeichnet wird, wenn jeder CAUCHY-Filter des Raumes gegen ein Element des Raumes konvergiert. Eine

unendliche HERMITEsche Matrix $A=(a_{jk})$ $(a_{jk}=\bar{a}_{kj};\ j,k=1,2,\ldots)$, die zeilenfinit ist, jedoch sonst keine weiteren Voraussetzungen erfüllen muß, können wir als stetigen und von 1. Art symmetrisierbaren Endomorphismus des Folgenraumes ω auffassen.

F sei nun ein linearer Raum mit dem Endomorphismus T. Die komplexe Zahl λ gehöre genau dann zum Spektrum $\sigma(T)$ von T, wenn es nicht zu jedem $y\in F$ genau ein $x\in F$ mit $Tx-\lambda x=y$ gibt; λ gehöre genau dann zum Punktspektrum $\sigma_p(T)$ von T, d.h. ist genau dann ein Eigenwert von T, wenn in F ein vom Nullelement verschiedenes z mit $Tz=\lambda z$ vorhanden ist. z ist ein zum Eigenwert λ gehöriges Eigenelement. Alle $\lambda\in\sigma(T)$, die nicht zum Punktspektrum gehören, bilden das kontinuierliche Spektrum $\sigma_k(T)$ von T.

In § 1 ist E ein (von 1. Art symmetrisierbarer) lokalkonvexer Raum und A ein stetiger und von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von E. Dann ist, wie man ganz leicht erkennt, das Punktspektrum von A' reell und eine Teilmenge des Punktspektrums von A. Falls A nichtreelle Eigenwerte besitzt, gehören diese also stets zum kontinuierlichen Spektrum von A'. Ist $A'-\lambda I'$ für jedes komplexe λ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A'-\lambda I')(E')$, so ist $\sigma_k(A)$ leer. Weniger an der Oberfläche liegt die Aussage, daß bei Vollstetigkeit von A (im Sinne der bekannten LERAYschen Definition [5]) das Spektrum von A keine nichtreellen Werte enthalten kann.

In § 2 ist E ein Raum vom Typ (ω) (s. oben., s. auch KÖTHE [3]) und A ein stetiger symmetrisierbarer Endomorphismus von E. Dann ist das kontinuierliche Spektrum von A leer. Zu weiteren Aussagen gelangt man im sog. abzählbaren Fall, der durch das Vorhandensein einer abzählbaren (algebraischen) Basis von E' gekennzeichnet ist und für den wohlbekannte Untersuchungen über das Spektrum stetiger Endomorphismen von E vorliegen (s. z.B. TOEPLITZ [6], ULM [7], WILLIAMSON [8]). Bei den folgenden Angaben sei also $\dim E'=\aleph_0$, d.h. E' besitze eine abzählbare Basis. Dann ist das Spektrum von A nicht leer, was überhaupt im abzählbaren Fall für jeden stetigen Endomorphismus von E gilt, und besteht nur aus Eigenwerten. Das Spektrum von A ist weiter genau dann reell, wenn jeder Eigenwert von A auch Eigenwert von A' ist. Letzteres ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\sigma(A)$ höchstens abzählbar ist. Insbesondere hat eine HERMITEsche zeilenfinite Matrix $A=(a_{jk})_{j,k=1,2,\ldots}$ als stetiger Endomorphismus von ω immer ein nichtleeres Spektrum, das nur aus Eigenwerten besteht. Genau dann besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte, wenn sämtliche Eigenwerte reell sind. Letzteres tritt wiederum genau dann ein, wenn es zu jedem Eigenwert einen finiten Eigenvektor gibt. Für den nicht-abzählbaren Fall $(\dim E'>\aleph_0)$ ist über die Existenz entsprechender Aussagen bisher noch nichts bekannt.

§ 1. Symmetrisierbare Endomorphismen

Wir betrachten nur komplexe lineare Räume. Der Begriff Topologie ist im Sinne von BOURBAKI [2] zu verstehen, jedoch soll (im Gegensatz zu BOURBAKI) ein topologischer Raum immer ein HAUSDORFF-Raum sein. Offenbar

ist ein lokalkonvexer Raum genau dann symmetrisierbar von 1. Art bzw. 2. Art, wenn sein mit der schwachen Topologie versehener dualer Raum symmetrisierbar von 2. Art bzw. von 1. Art ist. In diesem Paragraphen sei der lokalkonvexe Raum E symmetrisierbar von 1. Art und A ein stetiger und von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von E.

Bemerkung 1. M sei ein Teilraum von E, zu dem es einen stetigen Endomorphismus P von E mit $P^2 = P$ und $P(E) = M$ gibt, d.h. eine stetige Projektion von E auf M. Dann ist auch M symmetrisierbar von 1. Art. Ist außerdem $AP = PA$, dann ist die Einschränkung von A auf M ein von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von M.

Beweis. Es genügt, den letzten Teil der Bemerkung zu beweisen. Bezüglich A habe Θ die in der Einleitung angegebene Bedeutung, A_0 sei die Einschränkung von A auf M. Gehört x zu M und ist u eine Linearform auf M, so schreiben wir $[x, u]$ für $u(x)$. Ist nun u ein Element aus M', so ist durch $x \to u(Px)$ $(x \in E)$ eine Linearform $\varphi_u \in E'$ gegeben, die auf M mit u übereinstimmt. Durch $u \to P\Theta(P'\varphi_u)$ $(u \in M')$ ist dann eine antilineare Abbildung Θ_0 von M' in M erklärt, für die man leicht $[\Theta_0 u, u] \neq 0$ für jedes vom Nullelement verschiedene $u \in M'$ und $[\Theta_0 u, v] = \overline{[\Theta_0 v, u]}$ $(u, v \in M')$ bestätigt. Außerdem ist für jedes $u, v \in M'$ bei Berücksichtigung von $AP = PA$

$$\begin{aligned}[A_0\Theta_0 u, v] = \langle AP\Theta(P'\varphi_u), \varphi_v\rangle &= \overline{\langle A\Theta(P'\varphi_u), P'\varphi_v\rangle} \\ &= \overline{\langle A\Theta(P'\varphi_v), P'\varphi_u\rangle} \\ &= \overline{\langle AP\Theta(P'\varphi_v), \varphi_u\rangle} \\ &= \overline{[A_0\Theta_0 v, u]}.\end{aligned}$$

A_0 ist also ein von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus von M.

Satz 1. Jeder Eigenwert von A' ist reell und auch Eigenwert von A. Ist $A' - \lambda I'$ für jedes komplexe λ ein Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$ bezüglich der schwachen Topologie von E', so ist das kontinuierliche Spektrum von A leer.

Beweis. (a) Θ habe bezüglich A die oben angegebene Bedeutung, λ sei ein Eigenwert von A'. Es gibt dann ein vom Nullelement verschiedenes $u_0 \in E'$ mit $A'u_0 = \lambda u_0$. Da $\langle A\Theta u_0, u_0\rangle, \langle \Theta u_0, u_0\rangle$ reell sind und $\langle \Theta u_0, u_0\rangle \neq 0$ ist, muß λ wegen $\langle A\Theta u_0, u_0\rangle = \lambda\langle \Theta u_0, u_0\rangle$ ebenfalls reell sein. Berücksichtigt man diesen Sachverhalt, so folgt aus $A'u_0 = \lambda u_0$ weiter $\Theta(A'u_0) = A\Theta(u_0) = \lambda\Theta(u_0)$. λ ist also auch Eigenwert von A mit dem Eigenelement $\Theta(u_0)$. (b) λ sei kein Eigenwert von A. Da $A' - \lambda I'$ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$ ist, ist $(A - \lambda I)(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von E, der nun mit E zusammenfallen muß, da sonst λ ein Eigenwert von A', also wegen (a) auch ein Eigenwert von A wäre. $\sigma_k(A)$ ist also leer.

Ist F ein lokalkonvexer Raum und T ein Endomorphismus von F, so heißt T (nach LERAY [5]) vollstetig, wenn es in F eine Nullumgebung V und eine bikompakte Teilmenge B mit $T(V) \subset B$ gibt.

Satz 2. Ist A ein vollstetiger von 1. Art symmetrisierbarer Endomorphismus des lokalkonvexen Raumes E, so ist das Spektrum von A reell.

Beweis. Es sei Σ_0 das System aller absolutkonvexen und zugleich bikompakten Teilmengen von E. T_0 sei auf E' die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von Σ_0. Bei vollstetigem A ist nun auch A' ein vollstetiger Endomorphismus von E' bezüglich der Topologie T_0 (siehe KÖTHE [4], S. 98, Satz 1). Ist λ_0 eine nichtreelle Zahl, so ist nach Satz 1 λ_0 kein Eigenwert von A', gehört wegen der Vollstetigkeit von A' also auch nicht zum Spektrum von A'. Dann gehört aber λ_0, wie man sich leicht überlegt, auch nicht zum Spektrum von A.

§ 2. Symmetrisierbare Endomorphismen in Räumen vom Typ (ω)

In diesem Paragraphen sei E ein Raum vom Typ (ω) und A ein stetiger symmetrisierbarer Endomorphismus von E.

Bemerkung 2. Jeder abgeschlossene Teilraum von E ist symmetrisierbar (von 1. Art), jeder Teilraum des mit der schwachen Topologie versehenen dualen Raumes ist symmetrisierbar (von 2. Art).

Beweis. Ist M bzw. N ein abgeschlossener Teilraum von E bzw. ein Teilraum von E', so gibt es eine stetige Projektion von E auf M bzw. eine schwach stetige Projektion von E' auf N (s. KÖTHE [3], S. 639/640, § 3). Bemerkung 1 liefert dann die Behauptung. Daß E symmetrisierbar von 1. Art ist, entnimmt man der Tatsache, daß es zu jeder Basis $(u_j)_{j\in J}$ von E' eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ von Elementen aus E mit $\langle x_k, u_j\rangle = 0$ $(j, k \in J;\ j \neq k)$, $\langle x_j, u_j\rangle = 1$ $(j \in J)$ gibt (s. KÖTHE [3], S. 638). Für $u = a_1 u_{j_1} + \cdots + a_n u_{j_n}$ aus E' setze man dann $\Theta(u) = \bar{a}_1 x_{j_1} + \cdots + \bar{a}_n x_{j_n}$. Wegen $\dim E' < \dim E$ kann E nicht symmetrisierbar von 2. Art sein.

Satz 3. Das kontinuierliche Spektrum von A ist leer.

Beweis. Für jedes komplexe λ ist $(A - \lambda I)(E)$ ein abgeschlossener Teilraum von E (s. KÖTHE [3], S. 648), d.h. für jedes komplexe λ ist $A' - \lambda I'$ ein schwacher Homomorphismus von E' auf $(A' - \lambda I')(E')$. Nach Satz 1 ist daher $\sigma_k(A)$ leer.

Ist F irgendein lokalkonvexer Raum und T ein stetiger Endomorphismus von F, so gilt $\sigma_p(T) \subset \sigma(T')$ und $\sigma_p(T') \subset \sigma(T)$. Ist F vom Typ (ω), so ist außerdem $\sigma_k(T) \subset \sigma_p(T')$ und $\sigma_k(T') \subset \sigma_p(T)$, so daß dann also auch $\sigma(T) = \sigma(T')$ ist. Ist S ein stetiger Endomorphismus von E und liegt der abzählbare Fall vor (s. Einleitung), so ist das Spektrum von S nicht leer. Das folgt aus den Untersuchungen von ULM [7] (s. Lemma 2 dieser Mitteilung), aber auch sofort aus $\sigma(S) = \sigma(S')$ und aus dem folgenden Lemma, das der Verfasser dieser Note einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. KNESER vom 15.7.55 verdankt.

Lemma 1. F sei ein linearer Raum mit $\dim F = \aleph_0$, T sei ein Endomorphismus von F. Dann ist $\sigma(T)$ nicht leer.

Beweis. Das Spektrum von T sei doch leer. Für jedes Polynom $q(\xi)$ in einer Unbestimmten ξ mit komplexen Koeffizienten, in dem mindestens ein Koeffizient verschieden von 0 ist, existiert dann $(q(T))^{-1}$. Mit C bzw. C_0 wollen wir noch den Körper der komplexen Zahlen bzw. den Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten ξ mit komplexen Koeffizienten bezeichnen. Dem Paar (ψ, x) aus $C_0 \times F$ ordnen wir nun das Element $\psi x = (q(T))^{-1} p(T) x$ aus F zu, wenn $\psi(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$ mit gewissen Polynomen $p(\xi), q(\xi)$ ist. Mit dieser Zuordnung ist jetzt F ein linearer Raum über C_0. Dann ist (s. BOURBAKI [1], S. 61, prop. 1) $(\psi_k x_j)_{(j,k) \in J \times K}$ eine Basis von F bez. C, falls $(x_j)_{j \in J}$ eine Basis von F bez. C_0 und $(\psi_k)_{k \in K}$ eine Basis von C_0 bez. C ist. Bezeichnen wir allgemein die Mächtigkeit einer Menge L mit $\overline{\overline{L}}$, so ist also im vorliegenden Fall

$$\dim F = \overline{\overline{J \times K}} \geq \overline{\overline{K}} = \overline{\overline{C}}$$

im Widerspruch mit $\dim F = \aleph_0$. $\sigma(T)$ kann also nicht leer sein. Mit Berücksichtigung von Satz 3 erhält man somit

Satz 4. Im abzählbaren Fall ist das Spektrum des stetigen und symmetrisierbaren Endomorphismus A nicht leer und besteht nur aus Eigenwerten.

Dem nächsten Satz schicken wir das folgende Lemma voraus, das man unmittelbar den Ergebnissen der bereits zitierten ULMschen Arbeit [7] (S. 498, Satz 4) entnimmt. Eine zeilenfinite Matrix $P = (p_{jk})_{j,k=1,2\ldots}$, die wir als einen stetigen Endomorphismus von ω auffassen können, heißt ähnlich zu einer zeilenfiniten Matrix P_0, wenn es eine ω eineindeutig auf sich abbildende zeilenfinite Matrix Q mit $P = Q^{-1} P_0 Q$ gibt. Für zwei zueinander ähnliche zeilenfinite Matrizen P und P_0 ist $\sigma_p(P) = \sigma_p(P_0)$ und $\sigma_k(P) = \sigma_k(P_0)$. Außerdem ist P_0 genau dann symmetrisierbar (von 1. Art), wenn P symmetrisierbar (von 1. Art) ist.

Lemma 2. Die zeilenfinite Matrix P ist ähnlich zu einer Matrix $D = (d_{jk})$ mit $d_{jk} = 0$ für $j < k$, falls $\sigma(P)$ höchstens abzählbar ist. Ist $\sigma(P)$ überabzählbar, so ist die Menge aller nicht zu $\sigma(P)$ gehörigen λ höchstens abzählbar.

Satz 5. Es sei $\dim E' = \aleph_0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Das Spektrum von A ist reell.

b) Das Spektrum von A ist höchstens abzählbar.

c) Jeder Eigenwert von A ist auch Eigenwert von A'.

Beweis. Wir können annehmen, daß E mit dem Folgenraum ω identisch und A eine zeilenfinite Matrix ist. a) $\Rightarrow$ b) $\sigma(A)$ sei reell. Wegen Lemma 2 und $\dim E' = \aleph_0$ ist $\sigma(A)$ höchstens abzählbar. b) $\Rightarrow$ c) $\sigma(A)$ sei höchstens abzählbar. Nach Lemma 2 ist A ähnlich zu einer Matrix $D = (d_{jk})$ mit $d_{jk} = 0$ für $j < k$. Offensichtlich besteht das Spektrum von D' nur aus Eigenwerten, nämlich aus den d_{jj} $(j = 1, 2, \ldots)$. Also ist $\sigma_k(A') = \sigma_k(D')$ leer und $\sigma_p(A) = \sigma(A') = \sigma_p(A')$. c) $\Rightarrow$ a) Es sei $\sigma_p(A) < \sigma_p(A')$. Dann ist $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \sigma_p(A')$ reell nach Satz 1.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Algèbre. Chap. II. Actual. Sci. Industr. Nr. 1032. Paris 1947. — [2] Bourbaki, N.: Topologie générale. Chap. I—II. Actual. Sci. Industr. Nr. 858—1142. Paris 1951. — [3] Köthe, G.: Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume vom Typus ω. Math. Ann. **120**, 634—649 (1947/49). — [4] Köthe, G.: Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen. Portugaliae Math. **13**, 97—104 (1954). — [5] Leray, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Scient. Math. Szeged **12**, 177—186 (1950). — [6] Toeplitz, O.: Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Rend. Circ. Matem. Palermo **28**, 88—96 (1909). — [7] Ulm, H.: Elementarteilertheorie unendlicher Matrizen. Math. Ann. **114**, 493—505 (1937). — [8] Williamson, J. H.: Spectral representation of linear transformations in ω. Proc. Cambridge Philos. Soc. **47**, 461—472 (1951).

Dresden, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 5. April 1956)

KARRASS, A., and D. SOLITAR
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 64—69 (1956)

Some Remarks on the Infinite Symmetric Groups

By
A. KARRASS and D. SOLITAR

In the infinite symmetric groups we investigate the normalizer of an arbitrary permutation, and the simple factor groups of a composition series given by R. BAER in [1]. We conclude with some topological remarks, and show that if a permutation group is n-ply transitive for each positive integer n then so is any invariant subgroup.

1. PRELIMINARY REMARKS. Let S be an infinite set. Then by the symmetric group on S (denoted Σ_S) we mean the group of all $1-1$ mappings of S onto itself. If $|S|$ (the cardinality of S) is $\mathfrak{p}$, then $|\Sigma_S| = 2^{\mathfrak{p}}$. Let α be a permutation of S (i.e. let $\alpha \in \Sigma_S$), then $M(\alpha)$ (the *moved set* of α) is the set of $x \in S$ such that $x\alpha \neq x$, and $F(\alpha)$ (the *fixed set* of α) is the set of $x \in S$ such that $x\alpha = x$. We say $\alpha, \beta \in \Sigma_S$ are disjoint if $M(\alpha) \cap M(\beta) = \emptyset$ (the empty set). A collection $\{\alpha_i\}$ of permutations of S is called disjoint, if the α_i are disjoint in pairs. Let $\{\alpha_i\}$ be a collection of disjoint permutations. Then we define a permutation of S, called the *Π-product* of the α_i (denoted $\Pi\alpha_i$), as follows:

$$x\Pi\alpha_i = x\alpha_k \text{ if } x \in M(\alpha_k),\ x\Pi\alpha_i = x \text{ if } x \in \cap F(\alpha_i).$$

Any permutation α of S can be expressed uniquely as the Π-product of its cycles. These cycles may be finite of the type $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ or $\aleph_0$ infinite of the type $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$. Two permutations are conjugate if and only if they have the same number of cycles (including 1-cycles and infinite cycles) of the same length.

The last remark allows us to compute the class number of Σ_S. Let $|S| = \mathfrak{p}$ infinite. Let k be the number of cardinals (including finite cardinals) $\leq \mathfrak{p}$. Let A be a conjugate class of Σ_S. Let n_i denote the number of i-cycles ($1 \leq i \leq \aleph_0$) in any of the permutations of A. Then A is determined by the mapping

$$i \to n_i. \tag{1.1}$$

Clearly, $n_i \leq \mathfrak{p}$ and $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = \mathfrak{p}$. Conversely if $i \to n_i$ is any mapping of the set $J = 1, 2, \ldots, \aleph_0$ into the set K of cardinals not exceeding $\mathfrak{p}$ and is such that $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = \mathfrak{p}$, then $i \to n_i$ is associated with some conjugate class. Clearly the number of these particular mappings of J into K does not exceed $k^{\aleph_0}$ (the total number of mappings of J into K). Next consider the mappings of J into K defined by $n_1 = \mathfrak{p}$, $n_i =$ any cardinal $\leq \mathfrak{p}$ $(1 < i)$. Clearly $\sum_1^{\aleph_0} i \cdot n_i = \mathfrak{p}$.

The number of these mappings of J into K is $k^{\aleph_0}$. *Thus the class number of* Σ_S *is* $k^{\aleph_0}$. *In particular if* $p = \aleph_0$ *or* $p = c$, *then the class number of* Σ_S *equals* c.

We next give another application of the same remark. We shall prove by permutation techniques a result in [2] which states:

(1.2) If G is a group, then we can imbed G in a group G' in such a way that any two elements of G of the same order are conjugate in G'.

Let H be any group, and $a \in H$. Then by right multiplication of H by a (denoted R_a) we mean the permutation of H given by $x \to xa$, $x \in H$. The group R_H of all right multiplications of H is a regular permutation group on the set of elements of H, and the mapping: $a \to R_a$ gives an isomorphism of H onto R_H. To prove (1.2), let G be a group. Embed G in a non-countable group H. Let $p = |H|$. Suppose a, b are in H and have the same order t. Consider R_H. Now R_a when factored into cycles consists of only t-cycles, and since $t \leq \aleph_0 < p$, these must be p in number. Similarly for R_b. Hence R_a and R_b are conjugates in Σ_H.

2. The normalizer of a permutation. Let G be a subgroup of Σ_S. Then by the *moved set* of G we mean $\cup M(\alpha_i)$, $\alpha_i \in G$. Let $\{G_i\}$ be a disjoint collection of subgroups of Σ_S (i.e., any two of their moved sets are disjoint). Then by the Π-product ΠG_i of this collection we mean the set of all $\Pi \alpha_i$ where $\alpha_i \in G_i$. Now ΠG_i is a subgroup of Σ_S and is isomorphic to the unrestricted direct product of the G_i (for, consider the mapping $(\ldots, \alpha_i, \ldots) \to \Pi \alpha_i$).

We next mention a simple consequence of the preceding remark. We know by Cayley's theorem and the fact that $|S| = |T|$ implies $\Sigma_S \simeq \Sigma_T$, that every group of cardinality $\aleph_0$ can be embedded in Σ_S where S is a countable set. Partition S into a countable union of countable sets $S = \cup S_i$. Let G_i be the subgroup of Σ_S consisting of all α such that $M(\alpha) \subset S_i$. Clearly $G_i \simeq \Sigma_{S_i}$, and so since S_i is countable, we have that G_i contains a copy Q_i of the additive group of rationals. The Q_i are disjoint in Σ_S, and so Σ_S contains ΠQ_i which is isomorphic to Q', the unrestricted countable direct product of the additive group of rationals. Now Q' and the additive group of reals may be considered vector spaces over the field of rationals and as such both have dimension c. Hence they are isomorphic. *Thus* Σ_S, S *countable, contains a copy of the additive group of reals.*

Notation. Let $\alpha \in \Sigma_S$. Then $N_\alpha =$ the normalizer of α; $D_\alpha =$ the set of all permutations in Σ_S disjoint from α; $\langle \alpha \rangle =$ the cyclic group generated by α. Thus if $\alpha = \Pi \alpha_i$ is the factorization of α into disjoint cycles, $\Pi \langle \alpha_i \rangle$ denotes the Π-product of the cyclic groups generated by the cycles of α. The following two lemmas are easily proved.

Lemma 1. Let $\alpha = \Pi \alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Then both D_α and $\Pi \langle \alpha_i \rangle$ are invariant subgroups of N_α, and they have only the identity permutation I in common.

Lemma 2. Let $\alpha = \Pi \alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Then β commutes with each cycle α_i of α if and only if $\beta \in D_\alpha \Pi \langle \alpha_i \rangle$.

THEOREM 1. *Let $\alpha = \Pi\alpha_i$ be the factorization of α into disjoint cycles. Let n_i denote the number of i-cycles $(1 \leq i \leq \aleph_0)$ of α. Then N_α is a splitting extension of $D_\alpha \Pi\langle\alpha_i\rangle$ by the unrestricted direct product of Σ_{S_i} where $|S_i| = n_i$.*

PROOF. Clearly the unrestricted direct product of Σ_{S_i} where $|S_i| = n_i$ is isomorphic to the group L of $1-1$ mappings of the collection of cycles $\{\alpha_i\}$ onto itself which preserve the length of a cycle. Let $\beta \in N_\alpha$. Consider the mapping l_β of the cycles $\{\alpha_i\}$ given by $\alpha_i \to \beta^{-1}\alpha_i\beta$. Now $l_\beta \in L$. Consider next the mapping of N_α given by $\beta \to l_\beta$. This is easily seen to be a homomorphism of N_α into L. Now $\beta \in$ kernel if and only if l_β equals the identity, if and only if $\beta^{-1}\alpha_i\beta$ equals α_i for each α_i. Thus by Lemma 2, the kernel equals $D_\alpha\Pi\langle\alpha_i\rangle$. We now construct a representative system for $N_\alpha/D_\alpha\Pi\langle\alpha_i\rangle$ which also forms a subgroup of N_α. To each α_i associate a specific cyclic representation for it. These will be of the form $(x_1, \ldots, x_l)$ or $(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$. For each element l of L define a mapping β as follows: If $l(\alpha_i) = (y_1, \ldots, y_l)$ or $(\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ let $x_j\beta = y_j$; if on the other hand $x \in F(\alpha)$, let $x\beta = x$. It is easily seen that $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha$, and so $\beta \in N_\alpha$, and that $l_\beta = l$. (Thus our homomorphism is onto L.) Moreover these β's form a group. For let $\beta, \bar{\beta}$ be of the given form and associated with $l, \bar{l}$ respectively. Then $\beta\bar{\beta}$ will be associated with $l\bar{l}$ and β^{-1} will be associated with l^{-1}.

Thus, for example, if S is the set of integers, and $\alpha = (\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots)(\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots)$, then $N_\alpha = \langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle\langle\delta\rangle$ where $\beta = (\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots)$, $\gamma = (\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots)$ and $\delta = \cdots(-2, -1)(0, 1)(2, 3)\ldots$.

COROLLARY 1. If no two cycles of α have the same length and $M(\alpha) = S$, then $N_\alpha = \Pi\langle\alpha_i\rangle$. In particular if α is a cycle and $M(\alpha) = S$, and β commutes with α, then $\beta = \alpha^k$ for some k.

3. INVARIANT SUBGROUPS OF Σ_S. Throughout this section let S be a given set of infinite cardinality $\mathfrak{p}$.

If q is an infinite cardinal, then the set S_q of all $a \in \Sigma_S$ which move fewer than q elements [i.e., the α such that $|M(\alpha)| < q$] is an invariant subgroup of Σ_S, which we call the q-restricted symmetric group on S. It is not difficult to show that if α and β are conjugate in Σ_S and $\alpha, \beta \in S_q$, then α, β are conjugate in S_q. This is used in the proof of the second part of

THEOREM 2. *The only invariant subgroups of Σ_S are I, the alternating group A_S on S, and the various S_q, q infinite. Also the only invariant subgroups of S_q are I, A_S, and the various S_r with $r \leq q$.*

PROOF. This theorem was proved for the case where S is countable by SCHREIER and ULAM [4] and extended to the general case by BAER [1].

Notation. Let m be an infinite cardinal. Then we use m^* to denote the immediate successor of m.

THEOREM 3. *Let $q \leq p$. Then the factor group S_{q^*}/S_q is simple, has order p^q, and contains copies of all groups of order q. In particular S_{p^*}/S_p is simple, of order 2^p, and contains copies of all groups of order p.*

PROOF. From Theorem 2 it is clear that S_q is maximal invariant in $S_{q^\bullet}$. For if $S_{q^\bullet} > S_r > S_q$, then $q^* \geq r \geq q$, and so $r = q$ or $r = q^*$. Consequently, $S_{q^\bullet}/S_q$ is simple. In order to calculate $|S_{q^\bullet}/S_q|$ we use the following.

LEMMA. Suppose $|S| = \mathfrak{p}$ infinite, and $q \leq \mathfrak{p}$. Then the number of subsets of S of cardinality q equals the number of subsets of S with cardinality $\leq q$, equals $\mathfrak{p}^q$.

To show $|S_{q^\bullet}/S_q| = \mathfrak{p}^q$, we first observe that $|S_{q^\bullet}| \leq \mathfrak{p}^q$. For, each element of $S_{q^\bullet}$ is determined by its moved set and the effect it has on its moved set. Since there are $\mathfrak{p}^q$ possible moved sets for an element in $S_{q^\bullet}$, and there are at most 2^q permutations of such a moved set, we have $|S_{q^\bullet}| \leq \mathfrak{p}^q \cdot 2^q = \mathfrak{p}^q$. Therefore $|S_{q^\bullet}/S_q| \leq \mathfrak{p}^q$. To show the reverse, divide S into $\mathfrak{p}$ disjoint subsets each of cardinality q. Consider all subcollections of this partition which contain q or fewer of these partitioning sets. We then have $\mathfrak{p}^q$ such subcollections. Associate to each of these subcollections a permutation $\alpha \in \Sigma_S$ whose moved set is the union of the partitioning sets in the subcollection. Then $\alpha \in S_{q^\bullet}$. Let β be another associated permutation. Then either α moves some partitioning set which β does not or vice versa. Therefore either $\alpha\beta^{-1}$ or $\beta\alpha^{-1}$ moves some partitioning set. Hence $\alpha\beta^{-1}$ or $\beta\alpha^{-1} \notin S_q$. Consequently $|S_{q^\bullet}/S_q| \geq \mathfrak{p}^q$.

Let G be any group of cardinality q. Let $\overline{S}$ be a subset of S of cardinality q. Then we can define a multiplication on $\overline{S}$ in such a way that $\overline{S}$ will be a group isomorphic to G. It then follows from CAYLEY's Theorem that G can be embedded in $\Sigma_{\overline{S}}$ as a regular permutation group $\overline{G}$ on $\overline{S}$. Extend each $\alpha \in \overline{G}$ to all of S by defining α to be the identity on the complement of $\overline{S}$. We then have G embedded in Σ_S as G' in such a way that the permutations in G' other than the identity have moved set of cardinality $|\overline{S}| = q$. Therefore G' is a subgroup of $S_{q^\bullet}$ and $G' \cap S_q = I$. Consequently the mapping: $\alpha \to \alpha S_q$, $\alpha \in G'$, is an isomorphism of G' into $S_{q^\bullet}/S_q$.

To complete the proof of Theorem 3 we observe that $\mathfrak{p}^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{p}}$.

Thus, there is associated to the infinite symmetric group Σ_S on S, the infinite simple groups $S_{q^\bullet}/S_q$. None of these are isomorphic to an alternating group (since all the elements of an alternating group have finite order, whereas the coset of a product of q disjoint infinite cycles has infinite order). The question arises: when will $S_{q^\bullet}/S_q$ and $S_{r^\bullet}/S_r$ be non-isomorphic? Clearly if $\mathfrak{p}^q \neq \mathfrak{p}^r$, then by Theorem 3, they will be non-isomorphic. We show in Theorem 4 that if we reduce the whole symmetric group $\Sigma_S (= S_{\mathfrak{p}^\bullet})$ by its maximal invariant subgroup $S_{\mathfrak{p}}$, then the resulting factor group will be non-isomorphic to $S_{q^\bullet}/S_q$, $q < \mathfrak{p}$.

THEOREM 4. *If $q < \mathfrak{p}$ then $S_{\mathfrak{p}^\bullet}/S_{\mathfrak{p}}$ is not isomorphic to $S_{q^\bullet}/S_q$.*

LEMMA. If $q < \mathfrak{p}$ then any two elements of $S_{q^\bullet}/S_q$ of the same prime order are conjugate.

PROOF. Let n be a prime, and let $\alpha S_q, \beta S_q$ both be of order n in $S_{q^\bullet}/S_q$. Let $\alpha = (\Pi\alpha_i)(\Pi\alpha_{i'})$ be the factorization of α into disjoint cycles, where the length of each α_i equals n, and the length of each $\alpha_{i'}$ is different from n. Then $\alpha^n = (\Pi\alpha_i^n)(\Pi\alpha_{i'}^n) = \Pi\alpha_{i'}^n \in S_q$. Now $\alpha_{i'}^n \neq I$, and so $M(\alpha_{i'}^n) = M(\alpha_{i'})$.

Therefore $M(\Pi\alpha_{j'}) = M(\Pi\alpha_j^m)$, and so $\Pi\alpha_{j'} \in S_q$. Hence $\alpha S_q = (\Pi\alpha_j) S_q$. Clearly $\Pi\alpha_j$ is not in S_q, and so consists of q n-cycles and has fixed set of cardinality p. Similarly, $\beta S_q = (\Pi\beta_j) S_q$, where $\Pi\beta_j$ consists of q n-cycles and has fixed set of cardinality p. Therefore $\Pi\alpha_j = \lambda^{-1}(\Pi\beta_j)\lambda$ where $\lambda \in S_{q^\bullet}$ (by the remark preceding Theorem 2), and consequently $\alpha S_q, \beta S_q$ are conjugates in $S_{q^\bullet}/S_q$.

To prove Theorem 4, it therefore suffices to produce two elements of $S_{p^\bullet}/S_p$ of the same prime order which are not conjugate in $S_{p^\bullet}/S_p$. For this purpose let n be a prime, let $\alpha = \Pi\alpha_i$ be the product of p disjoint n-cycles such that $|F(\alpha)| = p$, and let $\beta = \Pi\beta_i$ be the product of p disjoint n-cycles such that $F(\beta) = \emptyset$. Suppose αS_p and βS_p were conjugate in $S_{p^\bullet}/S_p$. Then there would exist a $\lambda \in S_{p^\bullet} (= \Sigma_S)$ and a $\sigma \in S_p$ for which $\beta = (\lambda^{-1}\alpha\lambda)\sigma$. But then $|F(\beta)| = |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda\sigma)| \geq |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)|$. Since

$$|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda)| = |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)| + |F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap M(\sigma)|$$

and $\sigma \in S_p$ (so that $|M(\sigma)| < p$), and also $|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda)| = |F(\alpha)| = p$, we must have $|F(\lambda^{-1}\alpha\lambda) \cap F(\sigma)| = p$. Consequently, $|F(\beta)|$ would equal p, contrary to our construction of β.

4. TOPOLOGICAL REMARKS. We next introduce a topology on Σ_S which is non-discrete if S is infinite, and under which Σ_S is a topological group. Let $\{E_i\}$ be the collection of all finite (non-empty) subsets of S, and α be in Σ_S. Then by the E_i-neighborhood of α we mean all β in Σ_S such that β agrees with α on E_i. We call this topology the finite set topology on Σ_S. It is clear that the E_i-neighborhood of I is the subgroup U_i of Σ_S leaving E_i pointwise fixed, and, the E_i-neighborhood of α is the coset $U_i\alpha$. Σ_S is a zero-dimensional topological group under its finite set topology. If S is countable then this topology can be induced by a metric (the BAIRE metric) as follows: Label the elements of S as $1, 2, 3, \ldots$, and view the elements of Σ_S as sequences. Define the distance between two distinct sequences to be $1/k$ where the k-th place is the first one at which they differ. If S is not countable, then Σ_S is not metrizable, since Σ_S in this case does not satisfy the first axiom of countability.

A subset H of Σ_S is dense under the finite set topology if and only if H is n-ply transitive on S for each positive integer n. In particular A_S and $S_{\aleph_0}$ are dense. Thus, if S is countable $S_{\aleph_0}$ is also and so Σ_S is separable. In fact, if we represent the elements of S by the integers $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, we see easily that the subgroup of Σ_S generated by the transposition $(0, 1)$ and the infinite cycle $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ contains all transpositions and hence $S_{\aleph_0}$, so that Σ_S contains a dense subgroup generated by two elements. (Incidentally we have here a simple example of a finitely generated group which contains a non-finitely generated subgroup. That $S_{\aleph_0}$ is not finitely generated is clear since the moved set of a product is contained in the union of the moved sets of the factors.)

It is clear that any subgroup containing A_S is dense. *Suppose D is a dense subgroup of Σ_S (or equivalently D is an n-ply transitive group on S for each n) and D contains a finite permutation $\alpha \neq I$, then $D > A_S$.* For

suppose $\alpha = (a_1 \dots a_k) \dots (a_{j+1} \dots a_r)$. Find a λ in D leaving $a_1, \dots, a_{r-1}$ fixed and sending a_r into b where b is different from each a_i moved by α. Then $\alpha^{-1}\lambda^{-1}\alpha\lambda = (a_{j+1}a_r b)$. Hence D contains all 3-cycles and so contains A_S.

Finally, we have:

THEOREM 5. *Any invariant subgroup H $(\neq I)$ of a dense subgroup D is itself dense.*

LEMMA. Let H $(\neq I)$ be an invariant subgroup of a dense subgroup D. Then I is a limit point of H, i.e., given any finite subset E_j of S, there exists an $\alpha \in H$ $(\alpha \neq I)$, such that α leaves E_j pointwise invariant.

PROOF. It is easily seen that H is transitive. Suppose that for each $\alpha \in H (\alpha \neq I)$, we had $M(\alpha) = S$. Then H would have to be regular. Let α_1, α_2, α_3 (distinct and $\neq I$), and $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (distinct and $\neq I$) be in H. Then there would exist a $\lambda \in D$ such that $\lambda^{-1}\alpha_i\lambda = \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. (For let $x \in S$ and $x\alpha_i = a_i$, $x\beta_i = b_i$. Choose $\lambda \in D$ leaving x fixed and sending a_i into b_i.) In particular all elements of H would have the same order. If this common order were different from two, then H would have order three (for there would exist an automorphism of H sending α into α and β into α^2); if this common order were two, H would have order four (for there would exist an automorphism sending α into α, β into β, and γ into $\alpha\beta$). Consequently since H is infinite, we must have an $\alpha \in H (\alpha \neq I)$ which leaves some element of S fixed. Clearly this fixed element can be chosen arbitrarily. Let $x \in S$, and D_x the subgroup of permutations of D leaving x fixed. Then $H_x = H \cap D_x$ is different from I and is invariant in D_x. Viewing D_x as permutations of $S - \{x\}$ and applying the above argument, we have that H has an $\alpha (\neq I)$ leaving a given two symbols fixed. Proceeding in this way we have the lemma.

To prove the theorem we use induction, showing that H is n-ply transitive for each n. Since H is transitive, we have the case when $n = 1$. Suppose H is r-ply transitive. Let $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ (distinct) and $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$ (distinct) be in S. By the inductive hypothesis there exists a $\lambda \in H$ such that $a_i\lambda = b_i$, $i = 1, \dots, r$. Let $d\lambda = b_{r+1}$. Then $d \neq a_i$ $(i = 1, \dots, r)$. Now $H' = H \cap D_{(a_1, \dots, a_r)}$ (where $D_{(a_1, \dots, a_r)}$ are the permutations in D leaving $\{a_1, \dots, a_r\}$ pointwise fixed) is an invariant subgroup of $D_{(a_1, \dots, a_r)}$ and different from I by the above lemma. Therefore H' is transitive on the complement of $\{a_1, \dots, a_r\}$ in S. In particular there exists an $\alpha \in H'$ with $a_{r+1}\alpha = d$, so that $\alpha\lambda \in H$ and sends a_i into b_i, $i = 1, \dots, r, r+1$.

Bibliography

[1] BAER, R.: Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich. Studia Math. **5**, 15—17 (1934). — [2] HIGMAN, G., B. H. NEUMANN and H. NEUMANN: Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. **24**, 247—254 (1949). — [3] KUROSH, A. G.: The Theory of Groups, vol. 1. New York (Chelsea) 1955. — [4] SCHREIER, J., and S. ULAM: Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge. Studia Math. **4**, 134—141 (1933).

Inst. of Math. Sciences, New York University, New York 3, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 22. März 1956)

OSTROWSKI, A.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 70—87 (1956)

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

Inhalt

Kap. I. Zum Eindeutigkeitsprinzip der Charakteristikentheorie 70
§ 1. Problemstellung S. 70. — § 2. Satz 1 S. 71. — § 3. Beweis des Satzes 1 S. 74.
Kap. II. Eine Verschärfung des Involutionsprinzips 75
§ 4. Problemstellung S. 75. — § 5. Formulierung und Beweis des Satzes 2 S. 76.
Kap. III. Zum Existenzprinzip der Charakteristikentheorie 76
§ 6. Problemstellung S. 76. — § 7. Diskussion der Fragestellung S. 78. — § 8. Formulierung des Satzes 3 S. 79. — § 9. Ein Lemma über die GREENsche Umformung S. 79. — § 10. Zwei Lemmata über Integralapproximationen S. 80. — § 11. Beginn des Beweises von Satz 3 S. 82. — § 12. Zuendeführung des Beweises von Satz 3 S. 83. — § 13. Schlußbemerkungen und Beispiele S. 85.

Kap. I. Zum Eindeutigkeitsprinzip der Charakteristikentheorie

§ 1. Problemstellung

Die CAUCHYsche Charakteristikentheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(z, p, q, x, y) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{1}$$

beruht unter anderem auf dem folgenden Prinzip, das wir als das *Eindeutigkeitsprinzip* bezeichnen wollen:

Wird eine Integralfläche $z = \varphi(x, y)$ der Differentialgleichung (1) *von einem Flächenelement*

$$z^0, p^0, q^0, x^0, y^0 \tag{2}$$

tangiert, so wird sie auch von dem ganzen durch (2) *bestimmten charakteristischen Streifen der Differentialgleichung* (1) *tangiert.*

Dieses Prinzip wird in den klassischen Darstellungen der CAUCHYschen Theorie unter der Annahme der Analytizität von F und φ exakt bewiesen[1]). Im reellen Gebiet dürfte als erster W. GROSS[2]) eine Fassung des Eindeutigkeitsprinzips bewiesen haben.

[1]) Vgl. GOURSAT, E.: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2. éd., pp. 170—172. 1921.

[2]) GROSS, W.: Bemerkungen zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Sitzgsber. der Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl., Wien, Abt. IIa **123**, 2233—2251 (1914).

Die einfachste und zugleich bisher schärfste Formulierung verdankt man E. KAMKE[3]), der das Eindeutigkeitsprinzip unter der Annahme der *zweimal stetigen Differenzierbarkeit* von φ und der *einmal stetigen Differenzierbarkeit* von F bewiesen hat.

Was die über $\varphi(x, y)$ zu machenden Voraussetzungen anbetrifft, so hat sich anscheinend in der Literatur die Ansicht festgewurzelt, daß man unter die Annahme der zweimal stetigen Differenzierbarkeit nicht herunterkommen kann. So sagt z. B. A. HAAR 1928 in einem Vortrag auf dem Mathematikerkongreß in Bologna: „Diese zweimalige Differenzierbarkeit ist dabei unerläßlich, da der Satz, daß jede Lösung von (1) von Charakteristiken umsponnen wird, nur für zweimal differenzierbare Lösungen abgeleitet werden kann[4])."

Im folgenden soll nun vor allem eine hinsichtlich der Voraussetzungen über φ schärfere Formulierung des Eindeutigkeitsprinzips bewiesen werden, bei der über φ im wesentlichen nur vorausgesetzt wird, daß die ersten Ableitungen von φ einer LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung α, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, genügen, wofür dann allerdings über F vorauszusetzen ist, daß die ersten Ableitungen von F in bezug auf p und q eine LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung $> \frac{1}{\alpha} - 1$ befriedigen. Damit gelingt es, die Forderung der zweimaligen Differenzierbarkeit von φ abzuschwächen. Die über F zu machenden Annahmen treffen auf jeden Fall zu, wenn z. B. F zweimal stetig differenzierbar ist.

§ 2. Formulierung des Satzes

Um unseren Satz genau formulieren zu können, wollen wir allgemein von einer Funktion $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sagen, sie gehöre in einem bestimmten y-Gebiete G zur Klasse $L_\varkappa$ in bezug auf die y_ν, wenn für ein gewisses C, das nur von f und G abhängt, die Ungleichung

$$|f(y_\nu) - f(y'_\nu)| \leq C \left(\sum_\nu |y_\nu - y'_\nu|\right)^\varkappa$$

gilt, für alle Punktepaare (y_ν), (y'_ν) aus G. Hängt f noch von gewissen Parametern ab, die sich in geeigneten Wertebereichen bewegen, so ist klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_ν zur Klasse $L_\varkappa$ *gleichmäßig* in bezug auf jene Parameter.

Andererseits werden wir sagen, f gehöre in G zur Klasse $l_\varkappa$ in bezug auf die y_ν, wenn für jedes positive ε für beliebige Punktepaare (y_ν), (y'_ν) aus G die Relation gilt:

$$|f(y_\nu) - f(y'_\nu)| \leq \varepsilon \left(\sum_\nu |y_\nu - y'_\nu|\right)^\varkappa,$$

---

[3]) KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, 2. Aufl., pp. 351—352. Leipzig 1930.

[4]) HAAR, A.: Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen. Atti Congr. Internaz. Matemat., Bologna **3**, 5—10 (1928), insbesondere p. 6 oben. Vgl. auch HAAR, A.: Zur Charakteristikentheorie. Acta litterarum ac scientiarum regiae univ. Hungaricae Francisco-Josephinae, sect. scientiarum mathematicarum, Szeged **4**, 106—114 (1928), sowie die Note in den Comptes Rendus **187**, 23—25 (1928), A. HAAR, Sur l'unicité des solutions etc.

sobald $\sum_\nu |y_\nu - y'_\nu|$ klein genug geworden ist, $< \delta(\varepsilon)$. Auch hier ist klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_ν zur Klasse $l_\varkappa$ *gleichmäßig* in gewissen Parametern.

Die Klasse l_0 ist offenbar die Klasse der in G stetigen Funktionen in bezug auf die y_ν.

Um nun die obigen LIPSCHITZ-Klassen zu verallgemeinern, wollen wir im folgenden eine Funktion $\psi(\varrho)$ als einen LIPSCHITZ-*Modul* bezeichnen, wenn sie für hinreichend kleine $\varrho \geq 0$ definiert und stetig ist und für monoton gegen 0 abnehmende ϱ selbst monoton gegen 0 abnimmt. Wir sagen dann, wenn die Relation

$$|f(y_\nu) - f(y'_\nu)| \leq C\, \psi\left(\sum_\nu |y_\nu - y'_\nu|\right)$$

für ein gewisses C für alle Punktepaare (y_ν), (y'_ν) aus G erfüllt ist, daß f in G zur Klasse L_ψ gehört. Gilt aber diese Relation für jedes noch so kleine positive C, sobald $\sum |y_\nu - y'_\nu|$ hinreichend klein geworden ist, so sagen wir, f gehöre in G zur Klasse l_ψ. Und es ist wiederum klar, was unter der Aussage zu verstehen ist, f gehöre in G in bezug auf die y_ν zur Klasse L_ψ bzw. l_ψ *gleichmäßig* in gewissen Parametern.

Wir werden im folgenden neben dem LIPSCHITZ-Modul $\psi(\varrho)$ noch einen zweiten LIPSCHITZ-Modul $\Psi(\varrho)$ betrachten, der erstens die Eigenschaft besitzt, daß für jede positive Konstante c

$$\Psi(c\,\varrho) = 0\{\Psi(\varrho)\} \qquad (\varrho \downarrow 0) \tag{a}$$

gilt; zweitens der Bedingung genügt

$$\varrho = 0\{\Psi(\varrho)\} \qquad (\varrho \downarrow 0); \tag{b}$$

und endlich mit $\psi(\varrho)$ durch die Funktionalrelation

$$\psi\,\Psi(\psi) = 0(\varrho) \qquad (\varrho \downarrow 0) \tag{c}$$

verknüpft ist. Wir werden dann sagen, Ψ sei ein zu ψ komplementärer LIPSCHITZ-Modul[5]). Aus der Relation (b) folgt dann offenbar, daß $\psi = 0\{\Psi(\psi)\}$, $\psi^2 = 0\{\psi\,\Psi(\psi)\}$ und daher wegen (c)

$$\psi(\varrho) = 0(\varrho^{\frac{1}{2}}) \qquad (\varrho \downarrow 0) \tag{d}$$

gilt. Zum Beispiel könnte $\psi(\varrho)$ die Gestalt

$$\psi(\varrho) = \varrho^\alpha \lg^{\alpha_1} \frac{1}{\varrho} \lg_2^{\alpha_2} \frac{1}{\varrho} \dots \lg_n^{\alpha_n} \frac{1}{\varrho} \tag{e}$$

---

[5]) Die Bedingung (b) ergibt sich übrigens zwangsläufig, wenn die zugehörige LIPSCHITZ-Klasse L_ψ oder l_ψ nichtkonstante Funktionen überhaupt enthält.

Wäre nämlich dann für eine gegen 0 fallende Zahlenfolge ϱ_ν: $\frac{\Psi(\varrho_\nu)}{\varrho_\nu} \to 0$, so würde daraus folgen, daß in bezug auf jede einzelne Variable z. B. die beiden rechtsseitigen derivierten Zahlen einer Funktion f aus der Klasse L_ψ in jedem Punkte jener Umgebung die Null zwischen sich enthalten. Dann wäre aber f nach den Sätzen von DINI in dieser Umgebung überhaupt konstant.

haben und $\Psi(\varrho)$ ein analoger Ausdruck sein, wobei dann zu verlangen wäre, daß

$$\text{(f)} \qquad \Psi(\varrho) = 0\left(\varrho^{\frac{1}{\alpha}-1} \lg^{-\frac{\alpha_1}{\alpha}} \frac{1}{\varrho} \dots \lg_n^{-\frac{\alpha_n}{\alpha}} \frac{1}{\varrho}\right) \qquad (\varrho \downarrow 0)$$

gilt. Die einfachsten Beispiele sind $\psi(\varrho) = \varrho^{\alpha}$, $\Psi(\varrho) = \varrho^{\frac{1}{\alpha}-1}$ $(\alpha \geq \frac{1}{2})$.

Unsere Fassung des Eindeutigkeitsprinzips läßt sich nun im folgenden Satze formulieren:

Satz 1. *Es sei*

$$\text{(3)} \qquad z = \varphi(x, y)$$

eine in einer Umgebung U_1 des Punktes (x^0, y^0) einmal stetig differenzierbare Funktion, und es werde gesetzt

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, & q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ z^0 = \varphi(x^0, y^0), & p^0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0, y^0), \quad q^0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x^0, y^0). \end{cases}$$

Es sei $F(z, p, q, x, y)$ eine in einer Umgebung U_2 der Punkte $(z^0, p^0, q^0, x^0, y^0)$ differenzierbare Funktion, für die in U_2 die fünf Größen

$$\text{(5)} \qquad F_z'; F_p', F_q', F_x', F_y'$$

stetig sind, und es sei die Gleichung (1) für die durch (3) und (4) gegebenen Werte von z, p, q für alle x, y aus U_1 erfüllt.

Es sei ferner $\psi(\varrho)$ ein der Bedingung (d) *genügender* LIPSCHITZ-*Modul, der einen komplementären* LIPSCHITZ-*Modul $\Psi(\varrho)$ besitzt, und es möge eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:*

A. $p(x, y)$, $q(x, y)$ gehören in U_1 zur Klasse l_ψ in bezug auf die x, y; ferner gehören F_p', F_q' zur Klasse L_ψ in bezug auf die p, q aus U_2 gleichmäßig in z, x, y aus U_2.

B. $p(x, y)$, $q(x, y)$ gehören in U_1 zur Klasse L_ψ in bezug auf die x, y; ferner gehören F_p', F_q' zur Klasse l_ψ in bezug auf die p, q aus U_2 gleichmäßig in z, x, y aus U_2.

Dann besitzt das System der fünf Differentialgleichungen

$$\text{(6)} \qquad z' = p F_p' + q F_q', \quad -p' = F_x' + p F_z', \quad -q' = F_y' + q F_z', \quad x' = F_p', \quad y' = F_q'$$

mit der unabhängigen Variablen t, wo die Striche ohne unteren Index die Differentiationen nach t bedeuten, eine in der Umgebung von $t = 0$ aus fünf stetig differenzierbaren Funktionen

$$\text{(7)} \qquad z(t), p(t), q(t), x(t), y(t)$$

bestehende Lösung, wobei die Funktionen (7) in einer Umgebung von $t = 0$ die Relationen (3) und (4) erfüllen und sich für $t = 0$ auf die Zahlen z^0, p^0, q^0, x^0, y^0 reduzieren.

§ 3. Beweis des Satzes 1

Beweis. Das System der Differentialgleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} x'(t) = F_p'\big(\varphi(x,y), \varphi_x'(x,y), \varphi_y'(x,y), x, y\big), \\ y'(t) = F_q'\big(\varphi(x,y), \varphi_x'(x,y), \varphi_y'(x,y), x, y\big) \end{cases}$$

ist für hinreichend kleine t mit den Anfangsbedingungen $x'(0) = x^0$, $y'(0) = y^0$ auflösbar und liefert eine stetig differenzierbare Kurve durch (x^0, y^0) in der x-y-Ebene[6]). Die entsprechenden Werte von $\varphi, \varphi_x', \varphi_y'$ seien mit $z(t), p(t), q(t)$ bezeichnet.

Aus $z(t) = \varphi\big(x(t), y(t)\big)$ folgt durch Differentiation $z'(t) = p(t)\,x'(t) + q(t)\,y'(t)$ oder

$$(9)\qquad z' = p F_p' + q F_q'.$$

Im folgenden sind z, p, q, x, y Werte dieser Funktionen für absolut hinreichend kleines t. Wir erteilen x einen beliebigen Zuwachs h und bezeichnen die zugehörigen Zuwächse von $z(x,y)$, $p(x,y)$ und $q(x,y)$ bzw. mit k, π und $\varkappa$:

$$(10)\qquad \begin{cases} k = \varphi(x+h, y) - \varphi(x,y), \quad \pi = p(x+h, y) - p(x,y), \\ \varkappa = q(x+h, y) - q(x,y). \end{cases}$$

Dann folgt aus (1)

$$[F(z, p+\pi, q+\varkappa, x, y) - F(z, p, q, x, y) + \\ + F(z+k, p+\pi, q+\varkappa, x+h, y) - F(z, p+\pi, q+\varkappa, x, y)] = 0.$$

In der ersten eckigen Klammer wenden wir den Mittelwertssatz auf die beiden Variablen p und q an. In der zweiten Klammer wird für konstante $p, q, \pi, \varkappa, y$ der Mittelwertssatz angewandt auf x als unabhängige Variable, wobei z als Funktion $\varphi(x,y)$ von x aufgefaßt wird, da dann der h entsprechende Zuwachs von z gleich k ist. Dann ergibt sich

$$(11)\qquad \begin{cases} [\pi F_p' + \varkappa F_q'](z, p+\vartheta\pi, q+\vartheta\varkappa, x, y) + \\ \quad + h[F_x' + p^* F_z']\big(\varphi(x+\vartheta_1 h, y), p+\pi, q+\varkappa, x+\vartheta_1 h, y\big) = 0, \end{cases}$$

wo ϑ und ϑ_1 zwischen 0 und 1 liegen und $p^* = \varphi_x'(x+\vartheta_1 h, y)$ ist.

Ersetzten wir hier p^* durch p und die übrigen Argumente bzw. durch p, q, x, y, so ist das Korrekturglied im ersten Term links wegen (c) im Falle der Annahme A

$$O\big\{(|\pi| + |\varkappa|)\,\Psi(|\pi| + |\varkappa|)\big\} = o\big\{\psi(|h|)\,\Psi\big(\psi(|h|)\big)\big\} = o(h)$$

und im Falle der Annahme B

$$o\big\{(|\pi| + |\varkappa|)\,\Psi(|\pi| + |\varkappa|)\big\} = o\big\{\psi(|h|)\,\Psi\big(\psi(|h|)\big)\big\} = o(h).$$

Im zweiten Glied rechts in (11) folgt aus der Stetigkeit von F_x', p, F_z', daß das Korrekturglied gleichfalls $o(h)$ ist. Daher folgt nach der Division durch h,

[6]) Vgl. z. B. KAMKE, E.: l. c. pp. 126—130.

wenn F_p', F_q', F_x', F_y' wieder im Punkte (z, p, q, x, y) genommen werden, wegen (8) und (10):

$$(12)\qquad \frac{(p(x+h,y)-p(x,y))\,x' + (q(x+h,y)-q(x,y))\,y'}{h} = -(F_x' + pF_z') + \varepsilon(h),$$

wo $\varepsilon(h)$ mit $h \to 0$ gleichmäßig in t gegen 0 konvergiert. Der Ausdruck links ist aber gleich

$$\left[\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}\right]_t'.$$

Integriert man daher beide Seiten von (12) nach t von 0 bis t, so folgt

$$(13)\qquad \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} - \frac{\varphi(x^0+h,y^0)-\varphi(x^0,y^0)}{h} = -\int_0^t (F_x' + pF_z')\,dt + t\,\varepsilon_1(h),$$

wo $\varepsilon_1(h)$ mit $h \to 0$ gleichmäßig in t gegen 0 strebt.

Für $h \to 0$ folgt weiter aus (13)

$$p(x,y) - p(x^0,y^0) \equiv p(t) - p(0) = -\int_0^t (F_x' + pF_z')\,dt$$

und daher durch Differentiation nach t

$$(14)\qquad p'(t) = -(F_x' + pF_z').$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$(15)\qquad q'(t) = -(F_y' + qF_z').$$

Die Differentialgleichungen (8), (9), (14) und (15) sind aber gerade die Differentialgleichungen (6) des charakteristischen Streifens, womit der Satz 1 bewiesen ist.

Kap. II. Eine Verschärfung des Involutionsprinzips

§ 4. Problemstellung

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Formulierung des Eindeutigkeitsprinzips läßt sich auch die übliche Formulierung der folgenden Tatsache verschärfen, die wir als das *Involutionsprinzip* bezeichnen wollen:

Genügt $z = \varphi(x, y)$ den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(z, p, q, x, y) = 0, \qquad G(z, p, q, x, y) = 0,$$

so ist für z auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$(16)\qquad \begin{cases} [F,G] \equiv F_p'(G_x' + pG_z') - G_p'(F_x' + pF_z') + \\ \qquad + F_q'(G_y' + qG_z') - G_q'(F_y' + qF_z') = 0. \end{cases}$$

Bei den üblichen Beweisen dieser Tatsache[7]) wird über F und G die Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen und über $\varphi(x, y)$ die Stetigkeit

[7]) Vgl. KAMKE, E.: l. c. pp. 364—365.

der ersten und zweiten partiellen Ableitungen vorausgesetzt. Wir beweisen nun, daß (3) gilt, wenn über φ und etwa F die zu unserem Beweis des Eindeutigkeitsprinzips notwendigen Annahmen gemacht werden, während über G nur die Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen vorausgesetzt wird.

§ 5. Formulierung und Beweis des Satzes 2

Satz 2. *Sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt und genügt $z=\varphi(x,y)$ in U_1 noch einer weiteren Differentialgleichung*

$$G(z,p,q,x,y)=0, \tag{17}$$

wo G eine in der Umgebung U_2 des Punktes (z^0,p^0,q^0,x^0,y^0) einmal stetig differenzierbare Funktion ihrer fünf Argumente ist, so erfüllt $z=\varphi(x,y)$ im Punkte (x^0,y^0) auch die Involutionsgleichung (16).

Bemerkung. *Ist der Satz 2 einmal in der obigen Fassung bewiesen, so kann in der Behauptung dieses Satzes offenbar der Punkt (x^0,y^0) durch jeden Punkt (x,y) aus U_1 ersetzt werden, für den (z,p,q,x,y) in U_2 liegt.*

Beweis. Da für die nach Satz 1 in einer Umgebung von $t=0$ existierenden Funktionen (7) die Relationen (3) und (4) erfüllt sind, gilt auch in einer Umgebung von $t=0$ die Relation:

$$G\big(z(t),p(t),q(t),x(t),y(t)\big)=0. \tag{18}$$

Differenzieren wir (18) nach t für $t=0$ und berücksichtigen die Gleichungen (6), so folgt im Punkte (x^0,y^0):

$$G'_z(pF'_p+qF'_q)-G'_p(F'_x+pF'_z)-G'_q(F'_y+qF'_z)+G'_xF'_p+G'_yF'_q=0.$$

Dies ist aber genau die behauptete Relation (16).

Sowohl die Sätze 1 und 2 als auch unsere Beweise übertragen sich wörtlich auf den Fall von beliebig vielen unabhängigen Variabeln.

Kap. III. Zum Existenzprinzip der Charakteristikentheorie

§ 6. Problemstellung

Die CAUCHYsche Charakteristikentheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1) beruht neben dem Eindeutigkeitsprinzip auf der folgenden Tatsache, die wir als das *Existenzprinzip* der Charakteristikentheorie bezeichnen wollen.

Man setze das System der „Charakteristischen Differentialgleichungen" an:

$$x'=F'_p,\ y'=F'_q,\ z'=pF'_p+qF'_q,\ -p'=F'_x+pF'_z,\ -q'=F'_y+qF'_z, \tag{19}$$

wobei als unabhängige Veränderliche t zu benutzen ist. Ein Integral

$$x(t;x^0,y^0,z^0,p^0,q^0),\ y(t;x^0,\ldots,q^0),\ \ldots,\ q(t;x^0,\ldots,q^0) \tag{20}$$

von (19), *das zu den Anfangswerten $x^0,\ldots,q^0$ für $t=0$ gehört, stellt dann einen charakteristischen Streifen von Flächenelementen dar, der durch das Flächenelement $(x^0,\ldots,q^0)$ hindurchgeht. Ist nun ein beliebiger „Integral-Elementen-*

Streifen" gegeben, d.h. eine von einem Parameter τ abhängige Schar von Flächenelementen

$$x(\tau), y(\tau), \ldots, q(\tau), \tag{21}$$

wobei die Relation

$$z'(\tau) = p\,x'(\tau) + q\,y'(\tau) \tag{22}$$

erfüllt sein muß und

$$F\big(z(\tau), \ldots, y(\tau)\big) = 0 \tag{23}$$

identisch in τ gilt, und legt man durch jedes Flächenelement des Streifens (21) *einen charakteristischen Streifen hindurch, so erhält man „im allgemeinen" eine Integralmannigfaltigkeit von* (1)[8].

Zur scharfen Formulierung des Existenzprinzips sind allerdings Präzisierungen nötig. Setzt man in (20)

$$x^0 = x(\tau), \ldots, q^0 = q(\tau), \tag{24}$$

so werden die Funktionen (20) zu

$$X(t,\tau),\ Y(t,\tau),\ Z(t,\tau),\ P(t,\tau),\ Q(t,\tau) \tag{25}$$

und der springende Punkt der Theorie besteht im Nachweis der Relation

$$dZ(t,\tau) = P(t,\tau)\,dX(t,\tau) + Q(t,\tau)\,dY(t,\tau), \tag{26}$$

wobei als unabhängige Variablen t und τ zugrunde zu legen sind[9].

---

[8]) Damit man in (25) eine wirklich zweifach unendliche Schar von Flächenelementen erhält, muß vorausgesetzt werden, daß der Streifen (21) nicht selbst ein charakteristischer Streifen ist. Es wäre daher auf jeden Fall zu verlangen, daß *in keinem τ-Intervall der Streifen* (21) *die Differentialgleichungen* (19) *erfüllt*. Doch ist diese Bedingung für unsere weiteren Entwicklungen unwesentlich.

[9]) Ist die Relation (26) einmal bewiesen, so liefert ihre weitere Diskussion unter geeigneten Annahmen verschiedene Präzisierungen des Existenzsatzes. Kann man z.B. als unabhängige Variabeln X und Y wählen, so ist

$$Z = \varphi(X, Y),\ P = \varphi'_x(X, Y),\ Q = \varphi'_y(X, Y)$$

eine Integralfläche von (1). Um dies aber in einer Umgebung von $t = 0$ zu sichern, könnte man etwa voraussetzen, daß dort die Funktionaldeterminante

$$(*) \qquad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(t, \tau)} = \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ X'_\tau & Y'_\tau \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Für $t = 0$ bekommt man den Ausdruck $\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ x'(\tau) & y'(\tau) \end{vmatrix}$, und sein Nichtverschwinden bedeutet, daß die Trägerkurve der Schar (21) in keinem Punkte eine charakteristische Kurve, d.h. einen Elementarkegel von (1) berührt.

Verschwindet aber die Determinante (*) identisch, so wäre es immerhin möglich, daß man X und Z oder Y und Z als Parameter zugrunde legen kann. Und man bekommt dann eine Integralfläche, die zur Differentialgleichung (1) gehört, wobei man allerdings diese Differentialgleichung erst auf homogene Richtungskoordinaten umschreiben müßte. Hängen aber die drei Funktionen X, Y, Z nur von *einem* wesentlichen Parameter ab, so hat man es in (25) mit einer zweifach unendlichen Integralmannigfaltigkeit zu tun, deren Trägerort aber nicht eine Fläche, sondern eine Kurve ist.

§ 7. Diskussion der Fragestellung

Damit die Relation (26) überhaupt einen Sinn hat, müssen $X(t, \tau)$, $Y(t, \tau)$ und $Z(t, \tau)$ auch nach τ differenzierbar sein. Damit nun die Integrale der Differentialgleichungen (19) nach dem in die Anfangswerte eingehenden Parameter τ differenzierbar sind, ist es z. B. *hinreichend*[10]), daß die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen in bezug auf die Größen x, y, z, p, q stetig differenzierbar sind. Doch ist dies natürlich durchaus nicht etwa auch notwendig. Andererseits ergibt sich aus der Annahme der stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seiten von (19) auch noch die Existenz der gemischten Ableitungen $\frac{d^2x}{dt\,d\tau}$, $\frac{d^2y}{dt\,d\tau}$, die bei der berühmten, von CAUCHY herrührenden Methode des Nachweises der Relation (26) in die Rechnung eingehen[11]).

Man kann nun, wie wir im folgenden zeigen werden, diesen Nachweis so führen, daß dabei die Benutzung der obigen gemischten Ableitungen vermieden wird. Dies bedeutet: *Werden die Größen*

$$F_x', F_p', F_q', F_x', F_y' \tag{27}$$

als stetig vorausgesetzt, und sind die aus (19), (20), (24) *hervorgehenden Funktionen* $X(t, \tau), \ldots, Q(t, \tau)$ *sowohl nach* t *als auch nach* τ *stetig differenzierbar, so gilt die Relation* (26).

Man kann hier aber noch einen Schritt weiter gehen: In der Relation (26) kommen ja die Ableitungen von P und Q gar nicht vor. Man wird sich daher fragen, ob nicht die auf P und Q bezügliche Voraussetzung der Differenzierbarkeit fallen gelassen oder abgeschwächt werden kann. In einem gewissen Maße ist dies uns gelungen. Setzt man z. B. über $P(t, \tau)$ und $Q(t, \tau)$ voraus, daß sie in bezug auf τ gleichmäßig in t zur LIPSCHITZ-Klasse[12]) L_α, $\alpha > \frac{1}{2}$, oder zur LIPSCHITZ-Klasse l_α, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ gehören, so kann man die Relation (26) immer noch herleiten, wenn man allerdings über F_p', F_q' voraussetzt, daß sie in bezug auf p, q gleichmäßig in den übrigen Variablen zur LIPSCHITZ-Klasse $l_{\frac{1}{\alpha}-1}$ bzw. $L_{\frac{1}{\alpha}-1}$ gehören.

Wenn also insbesondere die Größen F_p', F_q' in bezug auf p und q der LIPSCHITZ-Bedingung von der Ordnung 1 genügen, bleibt der Existenzsatz richtig, wenn $P(t, \tau)$ und $Q(t, \tau)$ zur LIPSCHITZ-Klasse l_1 in bezug auf τ gleichmäßig in t gehören[13]).

Daß aber auf diese Weise in der Tat die Gültigkeitsgrenzen der Theorie über das Bisherige hinaus erweitert werden, zeigen die in § 13 besprochenen Beispiele.

Wir formulieren allerdings den Satz 3 noch etwas allgemeiner, indem wir von vornherein die zu den LIPSCHITZ-Moduln $\psi(\varrho)$, $\Psi(\varrho)$ des § 2 gehörenden LIPSCHITZ-Klassen einführen.

[10]) Vgl. KAMKE, E.: l. c. pp. 164—166.

[11]) Vgl. KAMKE, E.: l. c. pp. 356—357.

[12]) Vgl. § 2.

[13]) Übrigens ergibt sich (26) unter der Annahme der LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung 1 für die ersten partiellen Ableitungen von F und der LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung 1 für die Funktionen (21) von τ aus dem wichtigen Resultate von T. WAŻEWSKI, Math. Z. **43**, 522—532 (1932); vgl. auch HAAR, A.: Comptes Rendus **187**, 23—25 (1928).

§ 8. Formulierung des Satzes 3

Zusammengefaßt lautet die zu beweisende Formulierung wie folgt:

Satz 3. *Es seien im τ-Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ die fünf Funktionen* (21) *von τ stetig, $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$ seien dort stetig differenzierbar, und es seien die Relationen* (22) *und* (23) *erfüllt.*

Es seien F und die Größen (27) *in einer Umgebung jedes der Wertsysteme* (21) *vorhanden und stetig.*

Von den fünf aus (20) *vermöge des Ansatzes* (24) *hervorgehenden Funktionen* (25) *seien X, Y und Z in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ stetig differenzierbar.*

Durchläuft τ das Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ und t eine geeignete Umgebung des Nullpunktes, so sei der von den fünf Größen (25) *durchlaufene Teilbereich des fünfdimensionalen Raumes mit U bezeichnet. Es sei dann $\psi(\varrho)$ ein der Bedingung* (d) *von § 2 genügender* LIPSCHITZ*-Modul, der einen komplementären* LIPSCHITZ*-Modul $\Psi(\varrho)$ besitzt, und es möge eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:*

A. $P(t, \tau)$, $Q(t, \tau)$ gehören in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ gleichmäßig in t in einer Umgebung von $t = 0$ zur Klasse l_ψ und F'_p, F'_q zur Klasse L_Ψ in bezug auf p und q aus U gleichmäßig in z, x, y aus U.

B. $P(t, \tau)$, $Q(t, \tau)$ gehören in bezug auf τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ gleichmäßig in t in einer Umgebung von $t = 0$ zur Klasse L_ψ und F'_p, F'_q zur Klasse l_Ψ in bezug auf p und q aus U gleichmäßig in z, x, y aus U.

Dann gilt für alle τ in $\langle \tau', \tau'' \rangle$ und für alle t in einer Umgebung von $t = 0$ die Relation (26).

Dem Beweise schicken wir einige Lemmata voraus.

§ 9. Ein Lemma über die GREENsche Umformung

Lemma 1. *Sei R ein abgeschlossenes Rechteck in der t, τ-Ebene*[14]*), und U, V seien zwei mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung auf R stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\oint_R U\, dV = \iint_R (U'_t V'_\tau - U'_\tau V'_t)\, dt\, d\tau. \tag{28}$$

Beweis[15]**).** Wir setzen zunächst voraus, daß U, V und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung auch noch außerhalb von R in einer gewissen Umgebung des Randes existieren und stetig sind.

Bekanntlich[16]) lassen sich dann zwei Polynomfolgen $P_\nu(t, \tau)$ und $Q_\nu(t, \tau)$ finden, derart, daß mit $\nu \to \infty$ gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Rechteck R

$$\begin{cases} P_\nu \Rightarrow U, \; P'_{\nu t} \Rightarrow U'_t, \; P'_{\nu \tau} \Rightarrow U'_\tau; \\ Q_\nu \Rightarrow V, \; Q'_{\nu t} \Rightarrow V'_t, \; Q'_{\nu \tau} \Rightarrow V'_\tau \end{cases} \tag{29}$$

---

[14]) Dabei sollen hier und im folgenden die t- und τ-Achsen so orientiert werden, daß die t-Achse der x-Achse und die τ-Achse der y-Achse entspricht.

[15]) Vgl. SCHMIDT, E.: Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wien. Mh. Math. Phys. **48**, 426—432 (1940), wo man einen anderen Beweis des obigen Lemmas findet.

[16]) Siehe z. B. DE LA VALLÉE POUSSIN: Cours d'Analyse Infinitésimale, 2. Aufl., tome II, pp. 133—135. 1912.

gilt. Die CLAIRAUTsche Umformung des Linienintegrals liefert dann

$$\oint_R P_\nu(Q'_{\nu t}\,dt + Q'_{\nu\tau}\,d\tau) = \iint_R \left(\frac{\partial(P_\nu Q'_{\nu\tau})}{\partial t} - \frac{\partial(P_\nu Q'_{\nu t})}{\partial \tau}\right) dt\,d\tau$$

$$= \iint_R (P'_{\nu t}\,Q'_{\nu\tau} - P'_{\nu\tau}\,Q'_{\nu t})\,dt\,d\tau,$$

d.h. (28) für P_ν, Q_ν. Für $\nu \to \infty$ folgt daraus wegen (29) die Behauptung des Lemmas.

Wir lassen nun die Annahme fallen, daß die Stetigkeitsvoraussetzungen über U, V und ihre ersten Ableitungen noch außerhalb von R in einer Umgebung des Randes gelten. Es sei dann R_ν eine Folge von ineinander geschachtelten Rechtecken in R, die für $\nu \to \infty$ gegen R konvergieren und aus R durch Ähnlichkeitstransformationen in bezug auf den Mittelpunkt von R hervorgehen. Nach dem bewiesenen Fall des Satzes gilt (28) für jedes Rechteck R_ν. Für $\nu \to \infty$ strebt das über R_ν erstreckte Doppelintegral in (28) gegen das über R erstreckte Doppelintegral. Um dasselbe für die Linienintegrale in (28) zu beweisen, sei s eine Seite von R und s_ν die entsprechende Seite von R_ν.

Dann ist, wenn die einander entsprechenden Endpunkte von s, s_ν in geeigneter Reihenfolge mit P, p_ν; Q, q_ν bezeichnet werden, die Relation zu beweisen:

$$\int_{p_\nu}^{q_\nu} U\,dV \to \int_P^Q U\,dV. \tag{30}$$

Ist π der allgemeine Punkt der Strecke s, so sei der ihm bei der Ähnlichkeitstransformation in bezug auf den Mittelpunkt von R entsprechende Punkt auf s_ν mit π_ν bezeichnet. Wir setzen dann

$$U(\pi_\nu) = U_\nu(\pi), \qquad V(\pi_\nu) = V_\nu(\pi).$$

Dann geht (30) über in

$$\int_P^Q U_\nu\,dV_\nu \to \int_P^Q U\,dV$$

oder

$$\int_P^Q U_\nu(V'_{\nu t}\,dt + V'_{\nu\tau}\,d\tau) \to \int_P^Q U(V'_t\,dt + V'_\tau\,d\tau),$$

und dies folgt unmittelbar daraus, daß, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von U, V und ihrer ersten Ableitungen auf R, die U_ν, V_ν, $V'_{\nu t}$, $V'_{\nu\tau}$ gleichmäßig auf s mit $\nu \to \infty$ bzw. gegen U, V, V'_t, V'_τ konvergieren.

Das Lemma 1 wird im folgenden nur zum Beweis des Lemmas 2 gebraucht.

§ 10. Zwei Lemmata über Integralapproximationen

Lemma 2. *Sei T das Rechteck: $t_0 \le t \le t_1$, $\tau' \le \tau \le \tau''$ in der t,τ-Ebene. Das Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ sei in n Teilintervalle zerlegt durch die Teilpunkte $\tau' = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = \tau''$ und damit das Rechteck T in n Rechtecke T_ν, wobei τ in T_ν zwischen $\tau_{\nu-1}$ und τ_ν verläuft, $\nu = 1, \ldots, n$.*

Es seien ferner $n+1$ in $\langle t_0, t_1\rangle$ stetig differenzierbare Funktionen von t gegeben:

$$U_\nu(t) \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Wir setzen dann $U^*(t,\tau) = U_\nu(t)$ *für* $\tau_{\nu-1} < \tau \leq \tau_\nu$, *für* $\nu = 1, \ldots, n$ *und* $U^*(t,\tau_0) = U_0(t)$.

$V(t,\tau)$ *sei einmal stetig differenzierbar nach* t *und* τ *auf* T. *Dann gilt*

$$(31) \qquad \oint_T U^*\,dV - \iint_T U_t^*\,V_\tau'\,dt\,d\tau = -\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\nu=1}^{n} V_t'(t,\tau_{\nu-1})\,(U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t)).$$

Beweis. Die linke Seite von (31) ist gleich

$$(32) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\Big[\oint_{T_\nu} U^*\,dV - \iint_{T_\nu} U_t^{*\prime}\,V_\tau'\,dt\,d\tau\Big].$$

Im zweiten Integral innerhalb der Klammer ist $U_t^{*\prime}$ beschränkt und innerhalb des Rechteckes T_ν gleich $U_\nu'(t)$. Daher ist dieses Flächenintegral gleich

$$\iint_{T_\nu} U_\nu'(t)\,V_\tau'\,dt\,d\tau.$$

Im ersten Integral innerhalb der Klammer in (32) ist U^* auf drei Seiten des Rechteckes T_ν gleich $U_\nu(t)$ und nur auf der vierten Seite, $\tau = \tau_{\nu-1}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, die von t_0 nach t_1 durchlaufen wird [vgl. [14]], ist $U^* = U_{\nu-1}(t)$. Daher gilt

$$\oint_{T_\nu} U^*\,dV = \oint_{T_\nu} U_\nu\,dV - \int_{t_0}^{t_1} V_t'(t,\tau_{\nu-1})\,(U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t))\,dt.$$

Damit wird der Ausdruck in der Klammer in (32) zu

$$\Big[\oint_{T_\nu} U_\nu\,dV - \iint_{T_\nu} U_\nu'(t)\,V_\tau'\,dt\,d\tau\Big] - \int_{t_0}^{t_1} V_t'(t,\tau_{\nu-1})\,(U_\nu(t) - U_{\nu-1}(t))\,dt.$$

Hier ist aber die erste Differenz nach dem Lemma 1 gleich

$$-\iint_{T_\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\,U_\nu\Big)\,V_t'\,dt\,d\tau = 0,$$

da U_ν von τ unabhängig ist. Daher reduziert sich die Summe (32) auf die rechte Seite von (31), womit das Lemma 2 bewiesen ist.

Dieses Lemma wird im folgenden nur zum Beweis des Lemmas 3 benutzt.

Lemma 3. *Es sei* $U(t,\tau)$ *eine auf dem Rechteck* T *des Lemmas 2 stetige und einmal stetig nach* t *differenzierbare Funktion, ferner* $V(t,\tau)$ *eine auf* T *stetige und einmal stetig nach* t, τ *differenzierbare Funktion. Wird das Intervall* $\langle\tau', \tau''\rangle$ *in* n *Teilintervalle zerlegt durch die Teilpunkte* τ_ν *mit* $\tau' = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = \tau$, *so bezeichnen wir diese Zerlegung mit* λ *und setzen* $l_\lambda = \operatorname{Max}_\nu(\tau_\nu - \tau_{\nu-1})$, *so daß* l_λ *das Maß für die Feinheit der Intervalleinteilung ist. Dann gilt für* $l_\lambda \to 0$

$$(33) \qquad \lim_{l_\lambda\to 0} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{n} V_t'(t,\tau_{\nu-1})\,(U(t,\tau_\nu) - U(t,\tau_{\nu-1}))\,dt = \iint_T U_t'\,V_\tau'\,dt\,d\tau - \oint_T U\,dV.$$

Beweis. Wir setzen

$$U_\nu(t) = U(t, \tau_\nu)$$

und bilden mit diesen Funktionen $U_\nu(t)$ nach der Vorschrift des Lemmas 2 die Funktionen $U^*(t, \tau)$. Dann konvergieren für $l_\lambda \to 0$, auf T gleichmäßig, $U^*(t, \tau)$ und $U_t^{*\prime}(t, \tau)$ bzw. gegen $U(t, \tau)$ und $U_t'(t, \tau)$. Andererseits gilt nach Lemma 2

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{n} V_t'(t, \tau_{\nu-1}) \, [U(t, \tau_\nu) - U(t, \tau_{\nu-1})] \, dt = \iint_T U_t^{*\prime} V_\tau' \, dt \, d\tau - \oint U^* \, dV.$$

Für $l_\lambda \to 0$ strebt aber dies gegen die rechte Seite von (33), womit (33) bewiesen ist.

§ 11. Beginn des Beweises von Satz 3

Wir gehen nun zum Beweise des Satzes 3 über.

Sei $h > 0$ so beschaffen, daß im t-Intervall

$$-h \leq t \leq h \tag{34}$$

die Voraussetzungen des Satzes zutreffen. Wir setzen für ein ganzes $n > 1$:

$$\Delta = \frac{\tau'' - \tau'}{n}, \quad \tau_\nu = \tau' + \nu \Delta, \quad \nu = 0, \ldots, n$$

und für $0 \leq \nu \leq n$:

$$Z(t, \tau_\nu) = z_\nu, \; P(t, \tau_\nu) = p_\nu, \; Q(t, \tau_\nu) = q_\nu, \; X(t, \tau_\nu) = x_\nu, \; Y(t, \tau_\nu) = y_\nu,$$

sowie für $1 \leq \nu \leq n$:

$$z_\nu - z_{\nu-1} = \zeta_\nu, \; p_\nu - p_{\nu-1} = \pi_\nu, \; q_\nu - q_{\nu-1} = \varkappa_\nu, \; x_\nu - x_{\nu-1} = \xi_\nu, \; y_\nu - y_{\nu-1} = \eta_\nu.$$

Da F sowohl für $z_\nu, p_\nu, q_\nu, x_\nu, y_\nu$ als auch für $z_{\nu-1}, p_{\nu-1}, \ldots, y_{\nu-1}$ verschwindet, gilt identisch, wenn wir für den Augenblick den Index $\nu - 1$ weglassen, also unter $z, p, \ldots, y$ die Größen $z_{\nu-1}, p_{\nu-1}, \ldots, y_{\nu-1}$ verstehen,

$$\begin{cases} F(z, p + \pi_\nu, q + \varkappa_\nu, x, y) - F(z, p, q, x, y) \\ = -[F(z + \zeta_\nu, p + \pi_\nu, q + \varkappa_\nu, x + \xi_\nu, y + \eta_\nu) - F(z, p + \pi_\nu, q + \varkappa_\nu, x, y)]. \end{cases} \tag{35}$$

Die linke Seite von (35) ist nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Variablen p, q, für ein ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq 1$, gleich

$$(\pi_\nu F_p' + \varkappa_\nu F_q') \, (z, p + \vartheta \pi_\nu, q + \vartheta \varkappa_\nu, x, y),$$

und dies unterscheidet sich für $\Delta \to 0$, nach Voraussetzung des Satzes, von $(\pi_\nu F_p' + \varkappa_\nu F_q') \, (z, p, q, x, y)$ um

$$O[(|\pi_\nu| + |\varkappa_\nu|) \, \Psi(|\pi_\nu| + |\varkappa_\nu|)] \quad \text{oder} \quad o[(|\pi_\nu| + |\varkappa_\nu|) \, \Psi(|\pi_\nu| + |\varkappa_\nu|)] \tag{36}$$

je nachdem, welche der Bedingungen A, B gilt. In beiden Fällen ist aber der entsprechende Ausdruck (36), wegen der Relation (c) in § 2, gleich $o(\Delta)$, so daß die linke Seite von (35) gleichmäßig in (34) gleich

$$(\pi_\nu F_p' + \varkappa_\nu F_q') \, (z, p, q, x, y) + o(\Delta)$$

oder, wegen der beiden ersten Gleichungen (19),

$$\pi_\nu X_t'(t, \tau_{\nu-1}) + \varkappa_\nu Y_t'(t, \tau_{\nu-1}) + o(\Delta) \tag{37}$$

wird.

Um die rechte Seite von (35) geeignet darzustellen, wenden wir auf F als Funktion von z, x, y den Mittelwertsatz an und erhalten für ein ϑ_1 mit $0 \leq \vartheta_1 \leq 1$ den Ausdruck

$$-(\zeta_\nu F_z' + \xi_\nu F_x' + \eta_\nu F_y')\,(z + \vartheta_1 \varkappa_\nu, p + \pi_\nu, q + \varkappa_\nu, x + \vartheta_1 \xi_\nu, y + \vartheta_1 \eta_\nu),$$

oder, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von F_z', F_x', F_y',

$$-[(\zeta_\nu F_z' + \xi_\nu F_x' + \eta_\nu F_y')\,(z, p, q, x, y) + o(|\zeta_\nu| + |\xi_\nu| + |\eta_\nu|)].$$

Hier ist aber das o-Glied zugleich $o(\Delta)$, da die Ableitungen von Z, X, Y in bezug auf τ gleichmäßig beschränkt sind.

Andererseits gilt, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $Z_\tau', X_\tau', Y_\tau'$,

$$\zeta_\nu = \Delta Z_\tau'(t, \tau_{\nu-1}) + o(\Delta),\quad \xi_\nu = \Delta X_\tau'(t, \tau_{\nu-1}) + o(\Delta),\quad \eta_\nu = \Delta Y_\tau'(t, \tau_{\nu-1}) + o(\Delta),$$

so daß wir für die rechte Seite von (35) schließlich erhalten

$$-\Delta(Z_\tau' F_z' + X_\tau' F_x' + Y_\tau' F_y') + o(\Delta),$$

wo $Z_\tau', X_\tau', Y_\tau'$ im Punkte $(t, \tau_{\nu-1})$ und F_z', F_x', F_y' entsprechend im Punkte (z, p, q, x, y) zu nehmen sind. So ergibt sich schließlich aus (35) für $\Delta \to 0$

$$X_t'(t, \tau_{\nu-1})\,\pi_\nu + Y_t'(t, \tau_{\nu-1})\,\varkappa_\nu = -(Z_\tau' F_z' + X_\tau' F_x' + Y_\tau' F_y')\,\Delta + o(\Delta) \tag{38}$$

gleichmäßig in (34), wo rechts alle Argumente im Punkte $(t, \tau_{\nu-1})$ zu nehmen sind.

§ 12. Zuendeführung des Beweises von Satz 3

Summieren wir (38) über ν von 1 bis n und integrieren sodann über t von t_0 bis t_1, wo t_0 und t_1 im Intervall (34) liegen, so folgt

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{n} (X_t'(t, \tau_{\nu-1})\,\pi_\nu + Y_t'(t, \tau_{\nu-1})\,\varkappa_\nu)\,dt \\ \displaystyle = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta \sum_{\nu=1}^{n} (Z_\tau' F_z' + X_\tau' F_x' + Y_\tau' F_y')\,dt + o(1). \end{cases} \tag{39}$$

Hier lassen wir nun n ins Unendliche gehen und bestimmen die Grenzwerte der beiden Seiten. Rechts konvergiert der *Integrand* mit $n \to \infty$ gleichmäßig in bezug auf t in (34) gegen das Integral[17])

$$\int_{\tau'}^{\tau''} (F_z' Z_\tau' + F_x' X_\tau' + F_y' Y_\tau')\,d\tau,$$

[17]) Man beachte, daß $Z_\tau', X_\tau', Y_\tau'$ stetig in den beiden Variablen t, τ sind.

so daß die ganze rechte Seite von (39) zum Grenzwert das Doppelintegral über das Rechteck $T(t_0 \leq t \leq t_1,\ \tau' \leq \tau \leq \tau'')$,

$$-\iint_T (F_z' Z_\tau' + F_x' X_\tau' + F_y' Y_\tau')\, d\tau\, dt \tag{40}$$

hat. Um den Grenzwert der linken Seite von (39) zu ermitteln, zerlegen wir sie in die beiden Summanden

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{n} X_t'(t, \tau_{\nu-1})\, \pi_\nu\, dt, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{n} Y_t'(t, \tau_{\nu-1})\, \varkappa_\nu\, dt$$

und wenden auf die beiden Integrale die Formel (33) des Lemmas 3 an, wobei für V und U einmal X und P, das andere Mal Y und Q einzusetzen sind. Dann ergibt sich als Grenzwert der linken Seite von (39)

$$\iint_T (X_\tau' P_t' + Y_\tau' Q_t')\, d\tau\, dt - \oint_T (P\, dX + Q\, dY),$$

oder, wenn wir für P_t' und Q_t' ihre Werte aus den Differentialgleichungen (19) einsetzen,

$$-\iint_T \left(F_x' X_\tau' + F_y' Y_\tau' + F_z'(P X_\tau' + Q Y_\tau')\right) d\tau\, dt - \oint_T (P\, dX + Q\, dY). \tag{41}$$

Daher ergibt sich schließlich aus (39)

$$\oint_T (P\, dX + Q\, dY) = \iint_T F_z'(Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')\, d\tau\, dt.$$

Beachten wir andererseits, daß $\oint_T dZ$ verschwindet, so folgt hieraus ferner

$$\oint_T (dZ - P\, dX - Q\, dY) = -\iint_T F_z'(Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')\, d\tau\, dt. \tag{42}$$

Das Linienintegral links ist hier gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} [(Z_t' - P X_t' - Q Y_t')_{\tau=\tau'} - (Z_t' - P X_t' - Q Y_t')_{\tau=\tau''}]\, dt -$$

$$-\int_{\tau'}^{\tau''} [(Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_0} - (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_1}]\, d\tau,$$

und hier verschwindet wegen der ersten drei Differentialgleichungen (19) das erste Integral. Setzen wir ferner $t_0 = 0$ und bedenken, daß für $t = 0$ nach (22) $Z_\tau' = P X_\tau' + Q Y_\tau'$ ist, so ergibt sich schließlich

$$\int_{\tau'}^{\tau''} (Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')_{t=t_1}\, d\tau = -\int_{\tau'}^{\tau''} \int_0^{t_1} F_z'(Z_\tau' - P X_\tau' - Q Y_\tau')\, dt\, d\tau. \tag{43}$$

Ersetzen wir hier, was offenbar erlaubt ist, τ'' durch einen beliebigen Wert τ zwischen τ' und τ'' und differenzieren auf beiden Seiten nach τ, so

ergibt sich

$$(Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau)_{t=t_1} = -\int_0^{t_1} F'_z (Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau)\, dt.$$

Hier darf man offenbar für t_1 jeden Wert t aus dem Intervall (34) einsetzen. Dann folgt aus dieser Gleichung, daß ihre rechte Seite in (34) nach t differenzierbar ist, so daß, wenn

$$U(t,\tau) = Z'_\tau - P X'_\tau - Q Y'_\tau$$

gesetzt wird, U die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -F'_z U.$$

Und hieraus folgt endlich durch klassische Schlüsse, da U für $t=0$ verschwindet, daß U für alle t aus (34) und alle τ im Intervall $\langle \tau', \tau'' \rangle$ verschwindet, woraus (26) unmittelbar folgt. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 13. Schlußbemerkungen und Beispiele

Es sei noch hervorgehoben, daß die Überlegungen der §§ 10 und 11 nur dann nötig sind, wenn man die Bedingungen A und B unseres Satzes benutzt. Wird dagegen die stetige Differenzierbarkeit von P und Q nach τ vorausgesetzt, so sind diese Betrachtungen unnötig und unser Beweis vereinfacht sich ganz wesentlich.

Endlich ist noch zu bemerken, daß der Satz 3 sich unmittelbar auf den Fall verallgemeinern läßt, in dem $n \geq 2$ unabhängige Variablen vorausgesetzt werden. Man kann dann insbesondere mit den drei obigen Lemmata auskommen und nur in den §§ 11 und 12 sind einige sofort ersichtliche Änderungen anzubringen.

Ein *erstes Beispiel* für die Anwendung des Satzes wird geliefert durch die partielle Differentialgleichung

$$p - q^3 = 0, \tag{44}$$

wobei als Anfangselementenstreifen

$$x = 0, \quad y = \tau, \quad z = \tau^{\frac{1}{2}}, \quad p = \frac{125}{27}\tau^2, \quad q = \frac{5}{3}\tau^{\frac{1}{2}}$$

angenommen wird. Dafür sind (44) und (22) sofort zu verifizieren. Die Differentialgleichungen des charakteristischen Streifens sind hier

$$x' = 1, \quad y' = -3q^2, \quad z' = -2q^3, \quad p' = 0, \quad q' = 0,$$

und daraus folgt sofort durch Integration

$$X(t,\tau) = t, \quad Y(t,\tau) = -\frac{25}{3}\tau^{\frac{1}{2}} t + \tau, \quad Z(t,\tau) = -\frac{250}{27}\tau^2 t + \tau^{\frac{1}{2}},$$

$$P(t,\tau) = \frac{125}{27}\tau^2, \quad Q(t,\tau) = \frac{5}{3}\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Hier ist F analytisch. X, Y, Z, P sind überall nach τ differenzierbar, während Q in bezug auf τ zur LIPSCHITZ-Klasse $L_{\frac{1}{3}}$ gehört. Daher ist unser Satz anwendbar, und in der Tat sieht man sofort, daß die Relation (26) erfüllt ist, denn es gilt

$$-\frac{500}{27}\tau t+\frac{5}{3}\tau^3=Z'_\tau=PX'_\tau+QY'_\tau=\frac{5}{3}\tau^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{100}{9}\tau^{\frac{1}{3}}t+1\right).$$

Um in diesem Falle die Darstellbarkeit von z durch x und y für kleine x und y diskutieren zu können, setze man $\tau=u^3$. Dann ergibt sich zwischen x, y, u die Gleichung 4. Grades

$$u^3-\frac{25}{3}xu^4-y=0. \tag{45}$$

Für kleine x und y ist nun eine Wurzel von (45) in bezug auf u sehr groß. Mit $x\to 0$ ist diese Wurzel $\sim\frac{3}{25x}$.

Da andererseits die Ableitung der linken Seite von (45) nach u neben der für kleine x sehr großen Wurzel $\sim\frac{9}{100x}$ nur eine Doppelwurzel im Nullpunkt besitzt, hat (45) für kleine $y\neq 0$ genau *eine* weitere reelle Wurzel, der entsprechend u durch (45) als eine für kleine x und y *eindeutige* mit $x\to 0$, $y\to 0$ gegen 0 konvergierende Funktion definiert ist. Daher läßt sich auch z für kleine x und y als eine *eindeutige* Funktion von x, y darstellen.

Für die partiellen Ableitungen von u nach x, y erhält man aus (45)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{25u^2}{9-100xu},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{u^2}\frac{3}{9-100xu},$$

so daß die ersten partiellen Ableitungen von

$$z=-\frac{250}{27}xu^6+u^5$$

nach x und y bis in den Nullpunkt hinein stetig bleiben.

In diesem Beispiel gestattet der Existenzsatz von WAŻEWSKI [l. c. [13])] keinen Nachweis der Lösbarkeit des CAUCHYschen Problems. — Allerdings läßt sich dieses Beispiel mit Hilfe des Existenzsatzes von WAŻEWSKI behandeln, wenn man von vornherein statt τ einen neuen Parameter u durch $\tau=u^3$ einführt.

Ein *zweites Beispiel* liefert die Differentialgleichung

$$p-5q^{\frac{3}{2}}=0 \tag{46}$$

mit dem Anfangselementenstreifen

$$x(\tau)=0,\quad y(\tau)=\tau,\quad z(\tau)=\frac{1}{3}\tau^3,\quad p(\tau)=5\tau^{\frac{1}{2}},\quad q(\tau)=\tau^2.$$

Hier lauten die Differentialgleichungen des charakteristischen Streifens

$$x'=1,\quad y'=-\frac{25}{3}q^{\frac{1}{2}},\quad z'=-\frac{10}{3}q^{\frac{3}{2}},\quad p'=0,\quad q'=0,$$

und ihre Integration liefert

$$X = t,\ Y = -\frac{25}{3}\tau^{\frac{1}{5}}X + \tau,\quad Z = -\frac{10}{3}\tau^{\frac{10}{5}}X + \frac{1}{3}\tau^{3},\quad P = 5\tau^{\frac{10}{5}},\quad Q = \tau^{2}.$$

Hier sind X, Y, Z stetig differenzierbar nach τ, übrigens auch P und Q, während F_q' zur LIPSCHITZ-Klasse $L_{\frac{1}{3}}$ gehört. Daher muß nach unserem Satz die Relation (26) erfüllt sein, wie man auch durch direkte Rechnung sofort verifiziert.

Andererseits läßt sich auch hier z in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig durch x und y darstellen, da für $\tau = u^3$ zwischen u, x, y sich wiederum die Relation (45) ergibt und z im Nullpunkt in hinreichend hoher Ordnung verschwindet. Auch in diesem Fall ist der allgemeine Existenzsatz von WAŻEWSKI [l. c.[13])] nicht anwendbar.

Es sei endlich noch bemerkt, daß die Resultate dieser Abhandlung 1948 in einem Vortrag anläßlich der Tagung der Italienischen Mathematischen Gesellschaft in Pisa mitgeteilt wurden.

Basel, Mathematische Anstalt der Universität

(Eingegangen am 2. März 1956)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 88—110 (1956)

Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen

Von
MARTIN KNESER

§ 1. Fragestellung und Ergebnisse

G sei eine lokalkompakte abelsche Gruppe, μ das HAARsche Maß auf G, μ_* das zugehörige innere Maß, A und B nichtleere integrierbare Teilmengen von G, d.h. meßbare Teilmengen mit endlichem Maß[1]). Die Frage, was man über das Maß der Summe $A+B$ sagen kann, wenn man $\mu(A)$ und $\mu(B)$ kennt, ist für verschiedene spezielle Gruppen behandelt worden. Am bekanntesten ist die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung (s. z.B. [2] und die dort zitierte Literatur). Weitere Beispiele: In der Arbeit [10] wird die eindimensionale, in [3] und [6] die n-dimensionale Torusgruppe behandelt. Diese Ergebnisse sind in einem allgemeinen Satz der kürzlich erschienenen Arbeit [11] enthalten, der im wesentlichen mit dem untenstehenden Satz 1a übereinstimmt und kompakte zusammenhängende Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom betrifft. Schließlich gehören noch die Resultate aus [6] und einigen dort zitierten Arbeiten über endliche Gruppen sowie unveröffentlichte Ergebnisse von G. VOSPER über die additive Gruppe der p-adischen Zahlen hierher. Im folgenden wird diese Frage für beliebige lokalkompakte abelsche Gruppen behandelt und durch zwei Sätze (Satz 1 und Satz 4) beantwortet, die alle genannten Ergebnisse als Spezialfälle enthalten. Außerdem werden für eine große Klasse von Gruppen (z.B. alle zusammenhängenden Gruppen) die Grenzfälle bestimmt, für die in den Ungleichungen der Sätze 1 und 4 das Gleichheitszeichen steht (Sätze 2, 3 und 5); auch diese Sätze enthalten die entsprechenden Ergebnisse bzw. Vermutungen bei speziellen Gruppen (s. [2] und [3]). Schließlich wird untersucht, inwieweit ein Zusammenhang mit den Dichtesätzen der additiven Zahlentheorie (vgl. [5], [7] und [8]) besteht.

Der erste Satz, dessen Beweis sich nach einigen in § 2 durchgeführten Hilfsbetrachtungen in § 3 findet, gilt für integrierbare Teilmengen A und B einer beliebigen lokalkompakten abelschen Gruppe G und lautet

Satz 1. *Im allgemeinen ist*

$$\mu_*(A+B) \geq \mu(A) + \mu(B)\ ^2). \tag{1}$$

[1]) Über die Grundbegriffe der Maßtheorie, insbesondere das HAARsche Maß, vergleiche man die Werke [1] und [13] des Literaturverzeichnisses am Schluß der Arbeit.

[2]) $A+B$ braucht nicht meßbar zu sein, wenn A und B es sind; daher darf man in der Formel (1) linker Hand μ_* nicht durch μ ersetzen. Ist z.B. G ein zweidimensionaler reeller Vektorraum, A eine Strecke und B eine linear nicht meßbare Menge auf einer zu A nicht parallelen Geraden, so sind A und B Nullmengen, $A+B$ ist aber nicht meßbar. Sind dagegen A und B Vereinigungen von je abzählbar vielen kompakten Mengen, so ist auch $A+B$ von dieser Art und daher meßbar. Da jede integrierbare Menge eine

Ausnahmen sind nur möglich, wenn es eine offene kompakte Untergruppe H von G gibt mit den Eigenschaften

$$A + B + H = A + B, \tag{2}$$

$$\mu(A + B + H) = \mu(A + H) + \mu(B + H) - \mu(H). \tag{3}$$

In diesem Fall gilt also an Stelle von (1) *die Ungleichung*

$$\mu(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H). \tag{4}$$

Bei der Diskussion der Grenzfälle hat man zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Erstens die, daß der Ausnahmefall (2), (3) vorliegt, und zweitens die, daß in (1) das Gleichheitszeichen steht. Die erste Möglichkeit wollen wir hier nur kurz streifen. Ist H eine offene kompakte Untergruppe von G, so gibt es dazu stets Mengen A und B, die den Bedingungen (2) und (3) genügen, z. B. $A = B = H$. Die Frage nach allen solchen Mengen kann man durch Restklassenbildung modulo H auf die entsprechende Frage in diskreten Gruppen zurückführen. Für endliche Gruppen von Primzahlordnung hat G. Vosper [*12*] diese Frage beantwortet. Bei allgemeineren Gruppen scheint die Lage aber komplizierter zu sein. Auch die Diskussion des zweiten Falles wird durch die Existenz von Ausnahmepaaren mit den Eigenschaften (2) und (3) erschwert. Wir beschränken uns daher auf den Fall, in dem die Ausnahmepaare nur eine untergeordnete Rolle spielen, den Fall der zusammenhängenden Gruppen. Da wir außerdem für nicht kompakte, zusammenhängende Gruppen in Satz 4 eine schärfere Ungleichung erhalten und auch für diese das Eintreten des Gleichheitszeichens diskutieren werden, setzen wir zusätzlich G als kompakt voraus. Dann kann im Fall (2) nur $H = G$ sein, da es keine andere offene Untergruppe gibt, und es folgt $A + B = G$. Der Satz 1 geht also in diesem Fall über in den

Satz 1a. *Ist G kompakt und zusammenhängend, so gilt*

$$\mu_*(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B) \quad \textit{falls} \quad \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(G), \tag{5}$$

$$A + B = G \quad \textit{falls} \quad \mu(A) + \mu(B) > \mu(G)\ ^{3}). \tag{6}$$

Hier lassen sich im wesentlichen alle Paare A, B angeben, für die in (5) das Gleichheitszeichen steht. Zunächst ist dies sicher der Fall, wenn $\mu(A) + \mu(B) = \mu(G)$ ist, denn $\mu_*(A + B)$ kann ja nicht größer als $\mu(G) = \mu(A) + \mu(B)$ sein. Daher setzen wir jetzt $\mu(A) + \mu(B) < \mu(G)$ voraus und unterscheiden wieder zwei Fälle, je nachdem ob unter den Mengen A und B eine Nullmenge ist oder nicht. Mengen A und B mit positivem Maß, für die in (5) das Gleichheitszeichen steht, kann man auf folgende Weise erhalten. Es sei χ ein echter additiver Charakter von G, d. h. ein Homomorphismus von G auf die additive Gruppe T der reellen Zahlen modulo eins, die eindimensionale Torusgruppe;

solche Menge von gleichem Maß enthält, würde es genügen, den Satz 1 für diese Mengen zu beweisen; dies bringt hier aber keine Vereinfachung mit sich; dagegen werden wir später beim Beweis der Sätze 2, 4 und 5 von dieser Bemerkung Gebrauch machen.

[3]) Vgl. [11].

weiter seien K und L zwei Intervalle in T, d.h. homomorphe Bilder von Intervallen der reellen Zahlengeraden, deren Längensumme kleiner als eins ist. Setzt man nun $A=\chi^{-1}(K)$, $B=\chi^{-1}(L)$, so ist $A+B=\chi^{-1}(K+L)$; also stimmen bei geeigneter Normierung des HAARschen Maßes die Maße von $A, B, A+B$ mit denen von $K, L, K+L$ überein ([*13*], § 9), und daher gilt in (5) das Gleichheitszeichen. Weitere Beispiele erhält man, wenn man aus $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ Nullmengen wegläßt, da sich dadurch das Maß der Summe sicher nicht vergrößern, nach (5) aber auch nicht verkleinern kann. Daß man auf diese Weise alle kritischen Paare erhält, besagt der

Satz 2. *Es sei G kompakt und zusammenhängend, $\mu(A)>0$, $\mu(B)>0$ und $\mu(A)+\mu(B)<\mu(G)$. Dann und nur dann gilt in* (5) *das Gleichheitszeichen, wenn es einen Homomorphismus χ von G in die eindimensionale Torusgruppe T und zwei Intervalle K und L in T gibt derart, daß $A\subseteqq\chi^{-1}(K)$, $B\subseteqq\chi^{-1}(L)$ und $\mu(A)=\mu\left(\chi^{-1}(K)\right)$, $\mu(B)=\mu\left(\chi^{-1}(L)\right)$ ist, wenn also A und B aus $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ durch Weglassen von Nullmengen entstehen.*

Für die n-dimensionale Torusgruppe bestätigt dieser Satz teilweise eine Vermutung von A. M. MACBEATH[4]; sein Beweis wird in § 4 erbracht, ebenso der des nächsten Satzes, der sich mit dem noch übriggebliebenen Fall beschäftigt, daß eine der Mengen, etwa B, eine Nullmenge ist. Hier können wir für G wieder eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe zulassen. Allerdings ist die Antwort auch für zusammenhängende Gruppen nicht ganz so erschöpfend wie die in Satz 3 gegebene. Das kommt daher, daß — wie im Falle eines reellen Vektorraumes [*2*] — nicht genau bekannt ist, wann die Summe zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Ein typisches Beispiel für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5) mit $\mu(B)=0$ ist das folgende. G' sei eine kompakte Untergruppe von G, A bestehe aus vollen Restklassen modulo G', d.h. es gelte $A+G'=A$, und B sei eine in G' enthaltene Nullmenge. Dieses Beispiel kann man noch dadurch abändern, daß man aus A eine Nullmenge wegläßt und eine solche Nullmenge C hinzufügt, für die $\mu_*(C+B)=0$ ist. Setzt man voraus, was nötigenfalls durch eine Translation erreicht werden kann, daß B die Null enthält, so sind dies die einzigen Beispiele für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5) mit $\mu(B)=0$. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes, der den Satz 3 aus [*2*] als Spezialfall enthält.

Satz 3. *Es sei $\mu(A)>\mu(B)=0$, $0\in B$ und G' die kleinste B umfassende abgeschlossene Untergruppe von G. Dann und nur dann gilt in* (5) *das Gleichheitszeichen, wenn G' kompakt ist und es eine Zerlegung $A=C\cup D$ von A in eine Nullmenge C und einen Rest D gibt, derart, daß $\mu_*(C+B)=0$ und $\mu(D+G')=\mu(D)$ ist.*

Die bisherigen Ergebnisse schließen sich alle an den Satz 1 an. Dieser gilt zwar für beliebige lokalkompakte abelsche Gruppen; er ist aber insofern unbefriedigend, als schon für reelle Vektorräume der Dimension $n\geqq 2$ die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung eine wesentlich schärfere Aussage liefert. Nun läßt sich bekanntlich ([*13*], § 29) jede lokalkompakte abelsche Gruppe G als

[4]) [*3*] S. 41 oben; dort sind allerdings nicht alle Charaktere berücksichtigt.

direkte Summe $F+R^n$ eines reellen n-dimensionalen Vektorraumes und einer Gruppe F, die eine offene kompakte Untergruppe enthält, schreiben. Ist hier $n=0$, so zeigen die obenstehenden Beispiele, daß der Satz 1 ziemlich scharf ist. Im Falle $n \geq 1$ leiten wir dagegen in § 5 aus der BRUNN-MINKOWSKIschen Ungleichung die folgende schärfere Aussage ab.

Satz 4.[4a]) *Ist $G=F+R^n$ die direkte Summe einer Gruppe F und eines reellen Vektorraumes der Dimension $n \geq 1$, so gilt die Ungleichung*

$$\mu_*(A+B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}. \tag{7}$$

Auch die Frage nach dem Eintreten des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (7) läßt sich beantworten. Ist eine der Mengen eine Nullmenge, so liefert der Satz 3 die Antwort. Im anderen Falle erhalten wir aus der entsprechenden Aussage der BRUNN-MINKOWSKIschen Theorie den

Satz 5. *Ist $\mu(A)>0$ und $\mu(B)>0$, so steht in (7) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn es in F zwei Restklassen H und I einer offenen kompakten Untergruppe und in R^n zwei ähnliche und ähnlich gelegene konvexe Mengen K und L gibt derart, daß $A \subseteq H+K$, $B \subseteq I+L$ und $\mu(A)=\mu(H+K)$, $\mu(B)=\mu(I+L)$ ist, wenn also A und B aus $H+K$ und $I+L$ durch Weglassen von Nullmengen entstehen.*

Mit diesen Sätzen dürfte die Frage nach dem Maß der Summenmenge $A+B$ in einer lokalkompakten abelschen Gruppe einigermaßen vollständig beantwortet sein. Offen blieb die Frage nach den Grenzfällen in den Formeln (1), (2), (3) für solche Gruppen, die eigentliche offene kompakte Untergruppen enthalten, insbesondere für total unzusammenhängende Gruppen. Wir wollen diese Frage hier nicht weiter behandeln, sondern zum Schluß in § 6 versuchen, einen Zusammenhang mit den Dichtesätzen der additiven Zahlentheorie herzustellen. Für den MANNschen Satz über die finite (SCHNIRELMANNsche) Dichte [7] scheint dies nicht in natürlicher Weise zu gehen, da die finite Dichte weder translationsinvariant ist noch geeignete Additivitätseigenschaften besitzt. Dagegen ist es für die asymptotische Dichte [5] jedenfalls teilweise möglich, und zwar mittels des folgenden Verfahrens, das dem in [11] eingeschlagenen Weg entgegengesetzt ist. Wir denken uns die additive Halbgruppe E der natürlichen Zahlen in eine kompakte Gruppe G eingebettet. Dann können wir die asymptotische Dichte gewisser Teilmengen von E mit dem HAARschen Maß gewisser Teilmengen von G in Verbindung bringen. Dieses Verfahren können wir auch auf andere Halbgruppen anwenden; wir wollen daher die Eigenschaft der asymptotischen Dichte, auf der es beruht, herausstellen. Die asymptotische Dichte einer Menge A kann man als einen Mittelwert ihrer charakteristischen Funktion φ_A auffassen. Ordnet man nämlich jeder beschränkten Funktion f die Zahl $Mf=\underline{\lim}_{k\to\infty} k^{-1}\sum_{i=1}^{k} f(i)$ zu, so ist $M\varphi_A$ die untere asymptotische Dichte von A. Der Mittelwert M hat dabei die folgende Eigenschaft.

[4a]) Wie mir Herr MACBEATH brieflich mitteilte, ist dies ein Spezialfall eines allgemeineren, auch für nichtkommutative Gruppen F gültigen Satzes.

(M) *a_i, b_k seien endlich viele Elemente aus E; c_i, d_k ebenso viele positive reelle Zahlen. Gilt für alle x aus E die Ungleichung* $\sum_i c_i f(x+a_i) \leq \sum_k d_k g(x+b_k)$, *so folgt* $\sum_i c_i Mf \leq \sum_k d_k Mg$.

Wir nehmen nun gleich an, E sei eine abelsche Halbgruppe, jeder beschränkten Funktion f auf E sei ein Mittelwert Mf zugeordnet und dieser habe die Eigenschaft (M). Wir nennen dann $\delta(A) = M\varphi_A$ die Dichte von A und δ eine Dichtefunktion auf E. Weiter nehmen wir an, E liege dicht in einer kompakten Gruppe G. Zwischen der Dichte δ und dem HAARschen Maß μ, die wir uns durch $\delta(E) = \mu(G) = 1$ normiert denken, besteht dann folgender Zusammenhang. A sei eine Teilmenge von G, die das gleiche Maß hat wie ihre abgeschlossene Hülle und wie die Menge ihrer inneren Punkte; wir wollen sie im JORDANschen Sinne meßbar oder kurz J-Menge nennen; dann gilt (Hilfssatz 10) $\delta(A \cap E) = \mu(A)$. Nun ist es leicht, aus dem Satz 1 über das HAARsche Maß eine entsprechende Aussage über die Dichte δ zu gewinnen.

Dazu noch zwei Abkürzungen. Zwei Mengen A und B aus E nennen wir verwandt, und schreiben $A \approx B$, wenn es Elemente h und k in E gibt derart, daß $A+h$ in B und $B+k$ in A enthalten ist. Wegen (M) folgt daraus $\delta(A) = \delta(B)$. Eine Unter-Halbgruppe von E heiße ausgezeichnet, wenn sie sich als Durchschnitt von E mit einer offenen Untergruppe von G schreiben läßt. Dann gilt der

Satz 6. *Die abelsche Halbgruppe E mit der Dichtefunktion δ liege dicht in der kompakten Gruppe G mit dem* HAARschen *Maß μ, A und B seien zwei J-Mengen aus G und $C = A \cap E$, $D = B \cap E$. Dann gilt entweder*

$$\delta(C+D) \geq \delta(C) + \delta(D) \tag{8}$$

oder es gibt eine ausgezeichnete Unter-Halbgruppe F von E mit den Eigenschaften

$$C + D + F \approx C + D, \tag{9}$$

$$\delta(C+D+F) = \delta(C+F) + \delta(D+F) - \delta(F). \tag{10}$$

Nun sind die uns interessierenden Halbgruppen E, z.B. die natürlichen Zahlen, im allgemeinen nicht von vornherein in eine kompakte Gruppe eingebettet. Dagegen können wir voraussetzen, daß in E die Kürzungsregel gilt, so daß die Quotientengruppe Q von E existiert. Jede Gruppe Q kann man nun bis auf Isomorphie auf genau eine Weise in eine kompakte Gruppe G einbetten derart, daß Q in G dicht liegt und sich jeder Charakter von Q zu einem Charakter von G fortsetzen läßt ([*13*], § 31). Die Durchschnitte von J-Mengen aus G mit E bzw. Q wollen wir fastperiodische[5]) Teilmengen von E bzw. Q nennen. Die ausgezeichneten Unter-Halbgruppen von E sind hier

[5]) Die fastperiodischen Funktionen auf Q sind genau diejenigen, die sich zu stetigen Funktionen von G fortsetzen lassen ([*13*], § 34). Die charakteristische Funktion einer fastperiodischen Teilmenge von Q ist zwar im allgemeinen nicht fastperiodisch, läßt sich aber in gewissem Sinne durch fastperiodische Funktionen approximieren.

gerade die Durchschnitte von E mit Untergruppen, die in Q endlichen Index haben. Der Satz 6 ergibt dann den

Satz 6a. *In der abelschen Halbgruppe E sei eine Dichtefunktion δ erklärt, außerdem gelte die Kürzungsregel. Dann gilt für irgend zwei fastperiodische Teilmengen C und D von E die Aussage des Satzes 6.*

Ist speziell E die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen, so haben wir die Aussage des Dichtesatzes über die asymptotische Dichte [5] für eine spezielle Klasse von Mengen vor uns. Diese Klasse ist allerdings sehr eng. Nicht nur stimmen für jede fastperiodische Menge A die obere und untere asymptotische Dichte überein; sondern, wenn $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ eine beliebige Folge von Intervallen der Längen $1, 2, \ldots, k, \ldots$ und a_k die Anzahl der Elemente von $A \cap I_k$ ist, so existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} k^{-1}a_k$ und ist gleich der asymptotischen Dichte von A. Wählen wir andererseits für E irgendeine Unter-Halbgruppe eines von $n>1$ linear unabhängigen Vektoren aufgespannten Vektorgitters, z.B. das direkte Produkt der natürlichen Zahlen mit sich selbst, so ist die Klasse der fastperiodischen Mengen zwar auch hier sehr klein; das Ergebnis des Satzes 6a besitzt aber dann insofern Interesse als bisher über diese Fragen in mehreren Dimensionen nur wenige Resultate — für die hier behandelte asymptotische Dichte meines Wissens überhaupt keine — vorliegen[6]).

§ 2. Hilfssätze

Wir stellen zunächst einige Hilfsmittel für die Beweise zusammen und beginnen mit einem kurzen Überblick über das HAARsche Maß. G sei eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Dann gibt es in G ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß μ ([13], § 7). Jeder integrierbaren Teilmenge A von G, insbesondere jeder kompakten Menge, ist also eine Maßzahl $\mu(A) \geq 0$ zugeordnet, ebenso jeder integrierbaren Funktion $f(x)$ auf G, insbesondere jeder stetigen Funktion, die außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, ein Integral $\int f(x)\, d\mu(x)$ oder kürzer $\int f(x)\, dx$, und es ist $\mu(A+x)=\mu(A)$ und $\int f(x+a)\, dx = \int f(x)\, dx$. Mit $\mu_*(A)$ bezeichnen wir das innere Maß eines beliebigen Teiles A von G, d.h. die obere Grenze der Maße der in A enthaltenen integrierbaren Mengen. Wegen der Eigenschaften von Maß und Integral vergleiche man den Band Intégration von N. BOURBAKI [1], dem auch die Bezeichnungen entnommen sind. Außer den allgemeinen Eigenschaften eines Maßes brauchen wir noch den folgenden Zusammenhang zwischen den HAARschen Maßen μ auf G, μ' auf einer abgeschlossenen Untergruppe G' von G und $\bar{\mu}$ auf der Faktorgruppe $\overline{G}=G/G'$ ([13], § 9), der bei geeigneter Festsetzung der noch freien Faktoren bei μ, μ' und $\bar{\mu}$ gilt. Sei $f(x)$ eine μ-integrierbare Funktion auf G, $\bar{x}$ die Restklasse von x modulo G'. Dann existiert das Integral $\int f(x+x')\, d\mu'(x')$ für jedes x, dessen Restklasse $\bar{x}$ nicht in einer gewissen $\bar{\mu}$-Nullmenge liegt. Sein Wert hängt nur von $\bar{x}$, nicht von x selbst ab und sei mit $g(\bar{x})$ bezeichnet.

[6]) Vgl. [4] und die dort angegebene Literatur.

Dann gilt $\int f(x)\,d\mu(x) = \int g(\bar{x})\,d\bar{\mu}(\bar{x})$. Weniger genau, aber kürzer:

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int d\bar{\mu}(\bar{x}) \int f(x+x')\,d\mu'(x').$$

Für eine μ-integrierbare Menge A mit der charakteristischen Funktion $\varphi(x)$ bedeutet das

$$\mu(A) = \int \varphi(x)\,d\mu(x) = \int d\bar{\mu}(\bar{x}) \int \varphi(x+x')\,d\mu'(x') = \int \mu'\big(G' \cap (A-x)\big)\,d\bar{\mu}(\bar{x}).$$

Wir beweisen nun einige Hilfssätze, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

Hilfssatz 1. *Sind A und B integrierbar, so sind die Funktionen $f(x) = \mu\big(A \cap (B+x)\big)$ und $g(x) = \mu\big(A \cup (B+x)\big)$ stetig und es ist $\int f(x)\,dx = \mu(A)\mu(B)$.*

Beweis. Die Behauptungen über f folgen aus [13], § 11, die über g aus der Formel $g(x) = \mu(A) + \mu(B+x) - f(x) = \mu(A) + \mu(B) - f(x)$.

Definition 1. Ein Punkt a einer Menge A heiße *volumfremder* Punkt von A, wenn es eine Umgebung U von a gibt derart, daß der Durchschnitt $U \cap A$ das Maß null hat.

Hilfssatz 2. *Die Menge B der volumfremden Punkte einer integrierbaren Menge A hat das Maß null.*

Beweis. B ist offen in A und daher integrierbar. Wäre $\mu(B) > 0$, so gäbe es einen kompakten Teil C von B mit positivem Maß. Zu jedem Punkt aus C gibt es eine Umgebung U mit $\mu(U \cap A) = 0$, also $\mu(U \cap C) = 0$. Endlich viele davon überdecken C, was $\mu(C) = 0$ zur Folge hätte, im Widerspruch zur Annahme.

Hilfssatz 3. *A sei abgeschlossen, B enthalte keine volumfremden Punkte, und B liege bis auf eine Nullmenge in A. Dann liegt B ganz in A.*

Beweis. Ein Punkt von B, der in dem offenen Komplement U von A läge, wäre wegen $\mu(U \cap B) = 0$ ein volumfremder Punkt von B.

Definition 2. Wir nennen zwei Mengen A und B *äquivalent*, in Zeichen $A \sim B$, wenn sie sich nur um Nullmengen unterscheiden, wenn also die Differenz ihrer charakteristischen Funktionen das Nullelement des Funktionenraumes L^1 darstellen.

Aus $A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$ und wegen der Translationsinvarianz des HAARschen Maßes $A + x \sim B + x$. Für integrierbare Mengen A und B ist $A \sim B$ gleichbedeutend mit $\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B)$ oder auch mit $\mu(A) = \mu(A \cup B) = \mu(B)$.

Hilfssatz 4. *A sei integrierbar mit positivem Maß. $H(A)$ sei die Menge aller $x \in G$ mit $A + x \sim A$. Dann ist $H(A)$ eine kompakte Untergruppe von G.*

Beweis. Aus $A + x \sim A \sim A + y$ folgt $A + (x - y) \sim A$. $H(A)$ ist also eine Untergruppe von G. $H(A)$ ist die Menge aller x mit $\mu\big(A \cup (A+x)\big) = \mu(A)$, also nach Hilfssatz 1 abgeschlossen. Für den Nachweis, daß $H(A)$ kompakt ist, wählen wir einen kompakten Teil B von A mit $\mu(B) > \frac{1}{2}\mu(A)$. B und $B + x$ liegen in $A \cup (A + x)$. Ist nun $A + x \sim A$, so folgt aus $\mu(B) + \mu(B+x) = 2\mu(B) > \mu(A) = \mu\big(A \cup (A+x)\big)$, daß B und $B + x$ ein gemeinsames Element enthalten: $b + x = b'$. Jedes Element $x = b' - b$ aus $H(A)$ liegt also in der kompakten Menge $B - B$, und daher ist $H(A)$ kompakt wie behauptet.

Die weiteren Hilfssätze sind für den Beweis des Satzes 1 nicht nötig; sie werden erst in § 4 bei der Diskussion der Grenzfälle gebraucht.

Hilfssatz 5. *Ist A integrierbar und entsteht C aus B durch Hinzufügen endlich vieler Punkte der abgeschlossenen Hülle von B, so ist $A+C \sim A+B$.*

Beweis. Ist c einer der endlich vielen Punkte aus C, die nicht in B liegen, so gilt

$$\mu\big((A+c)\cap(A+B)\big) = \lim_{x\to c,\ x\in B} \mu\big((A+x)\cap(A+B)\big) = \lim_{x\to c} \mu(A+x) = \mu(A+c).$$

$A+c$ liegt also bis auf eine Nullmenge schon in $A+B$.

Hilfssatz 6. *A, B und $A+B$ seien integrierbar und $\mu(A+B) \leq \mu(A)+b$. Dann gilt für x und y aus B die Ungleichung*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{n}\big((A+B)+i(y-x)\big)\Big) \leq \mu(A+B)+nb.$$

Beweis. A ist in $A+B-x$ und in $A+B-y$ enthalten. Der Teil von $A+B-x$, der nicht in $A+B-y$ liegt, hat daher höchstens das Maß $\mu(A+B-x)-\mu(A) \leq b$. Durch Translation um $x+i(y-x)$ erhält man die gleiche Aussage für den Teil C_i von $A+B+i(y-x)$, der nicht schon in $A+B+(i-1)(y-x)$ liegt $(i=1, 2, \ldots, n)$. Wegen

$$\bigcup_{i=0}^{n}\big((A+B)+i(y-x)\big) = (A+B)\cup\bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

folgt daraus die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Ist $0<\mu(A)<\infty$ und G' eine abgeschlossene Untergruppe der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H(A)$, so gibt es in der Faktorgruppe $\overline{G}=G/G'$ eine integrierbare Teilmenge $\widetilde{A}$ und eine Nullmenge $\widetilde{B}$ derart, daß*

$$\mu\big(G'\cap(A-x)\big) = \begin{cases} \mu(G') & \text{für } \bar{x}\in\widetilde{A} \\ 0 & \text{für } \bar{x}\notin\widetilde{A}\cup\widetilde{B}. \end{cases}$$

Beweis. In dem direkten Produkt $G\times G'$ sei C die Menge der Paare (z, t) mit $z\in A$ und $z+t\in A$. Ihre charakteristische Funktion $\varphi_C(z, t)$ läßt sich durch φ_A ausdrücken: $\varphi_C(z, t)=\varphi_A(z)\,\varphi_A(z+t)$. Für das Maß von C erhalten wir daher den Ausdruck $\iint \varphi_C(z, t)\,d\mu(z)\,d\mu'(t) = \int \mu\big(A\cap(A-t)\big)\,d\mu'(t)$. Wegen $t\in G'\subseteq H(A)$ hat der Integrand den Wert $\mu(A)$, das Integral also den Wert $\mu(A)\,\mu'(G')$. Führen wir für die nur von der Restklasse $\bar{x}$ von x abhängige Funktion $\mu'\big(G'\cap(A-x)\big)$ die Bezeichnung $g(\bar{x})$ ein, so gilt nach dem zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten $\mu(A)=\int g(\bar{x})\,d\bar{\mu}(\bar{x})$ und damit erhalten wir das Maß von C zu $\int \mu'(G')\,g(\bar{x})\,d\bar{\mu}(\bar{x})$. Wir können das Maß von C aber auch anders berechnen, indem wir in $\varphi_C(z, t)$ gleich $z=x+y$ setzen mit $y\in G'$ und zuerst über y integrieren. Das gibt

$$h(\bar{x}, t) = \int \varphi_A(x+y)\,\varphi_A(x+y+t)\,d\mu'(y) = \mu'\big(G'\cap(A-x)\cap(A-x-t)\big).$$

$h(\bar{x}, t)$ nach t integriert ergib nach Hilfssatz 1

$$\int h(\bar{x}, t)\,d\mu'(t) = \mu'\big(G'\cap(A-x)\big)^2 = g(\bar{x})^2.$$

9254—66 7 B

Integration nach $\bar{x}$ liefert schließlich $\int g(\bar{x})^2 d\bar{\mu}(\bar{x})$. Durch Vergleich der beiden Ergebnisse erhält man $\int (\mu'(G') - g(\bar{x}))\, g(\bar{x})\, d\bar{\mu}(\bar{x}) = 0$. Da der Integrand nicht negativ ist, verschwindet er außer auf einer Nullmenge $\tilde{B}$. Also ist $g(\bar{x}) = \mu'(G')$ auf einer Menge $\tilde{A}$, $g(\bar{x}) = 0$ auf dem Komplement von $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, und mit $g(\bar{x})$ ist auch $\tilde{A}$ integrierbar.

§ 3. Der Additionssatz

Die Grundlage für die folgenden Beweise bilden, wie in der Arbeit [5], die e-Transformationen, über die wir daher zunächst alles Nötige zusammenstellen. Der Grundgedanke ist der, daß sich unser Problem nicht wesentlich ändert, wenn man die Mengen A und B durch ihre Vereinigung $A' = A \cup B$ und ihren Durchschnitt $B' = A \cap B$ ersetzt. Diese Tatsache beruht auf den beiden Formeln

$$\mu(A') + \mu(B') = \mu(A) + \mu(B), \tag{11}$$

$$A' + B' \subseteqq A + B. \tag{12}$$

Die erste folgt aus den Eigenschaften des Maßes und die zweite ergibt sich so:

$$(A \cup B) + (A \cap B) = \big(A + (A \cap B)\big) \cup \big(B + (A \cap B)\big) \subseteqq (A + B) \cup (B + A) = A + B.$$

Diese Transformation kann man noch verallgemeinern, indem man zunächst auf den zweiten Summanden B eine Translation um ein Gruppenelement e anwendet, dann Vereinigung und Durchschnitt bildet und schließlich auf den Durchschnitt die Translation um $-e$ anwendet. Von A und B ausgehend gelangt man so zu

$$A' = A \cup (B + e) \quad \text{und} \quad B' = (A - e) \cap B.$$

Für diese Mengen gelten wegen der Translationsinvarianz des HAARschen Maßes wieder die Formeln (11) und (12). Setzen wir zusätzlich voraus, daß das Nullelement in A und B enthalten ist und daß e in A liegt, so gilt auch

$$0 \in A', \quad 0 \in B'. \tag{13}$$

Wir sagen dann, A' und B' entstehen aus A und B durch eine e-Transformation. Auf A' und B' können wir wieder eine e-Transformation (mit einem anderen e' aus A' statt e) anwenden und das können wir mehrfach wiederholen. Für alle so entstehenden Mengenpaare — wir wollen sie von A und B abgeleitet nennen — gelten die Formeln (11) bis (13). Aus diesen Formeln folgt die Abschätzung

$$\mu_*(A + B) \geqq \mu_*(A' + B') \geqq \mu(A') = \mu(A) + \mu(B) - \mu(B'). \tag{14}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $f(A, B)$ die untere Grenze der Maße $\mu(B')$ für alle von A, B abgeleiteten Mengenpaare A', B'. Zum Beweise des Satzes 1 unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: $f(A, B) = 0$. Dann folgt aus (14) die Ungleichung (1) und wir sind fertig.

Zweiter Fall: $f(A, B) > 0$. Dann wählen wir zunächst ein abgeleitetes Paar A', B' aus, für das $\mu(B') < f(A, B) + 2^0$ ist, dann ein von A', B' abgeleitetes

Paar A'', B'' mit $\mu(B'') < f(A', B') + 2^{-1}$ und fahren so fort; allgemein sei A^{n+1}, B^{n+1} von A^n, B^n abgeleitet, und es gelte

$$\mu(B^{n+1}) < f(A^n, B^n) + 2^{-n}. \tag{15}$$

Dann bilden die Mengen A, A', A'', ... eine aufsteigende, B, B', B'', ... eine absteigende Folge. Die Mengen $A^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ und $B^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B^n$ haben drei wichtige Eigenschaften. Erstens bleiben ersichtlich die Formeln (11) bis (14) richtig, wenn man A' und B' durch A^∞ und B^∞ ersetzt. Zweitens ist A^n, B^n von A, B abgeleitet; also gilt $\mu(B^n) \geq f(A, B) > 0$ und es folgt

$$\mu(B^\infty) > 0. \tag{16}$$

Drittens gilt für jedes e aus A^∞ die Gleichung

$$\mu\big((A^\infty - e) \cap B^\infty\big) = \mu(B^\infty). \tag{17}$$

e liegt nämlich für genügend großes n in A^n. Nach Definition von $f(A^n, B^n)$ gilt dann die Ungleichung $\mu\big((A^n - e) \cap B^n\big) \geq f(A^n, B^n)$, also wegen $A^n \subseteq A^\infty$ und (15) auch $\mu(B^n) \geq \mu\big((A^\infty - e) \cap B^n\big) \geq \mu(B^{n+1}) - 2^{-n}$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Gleichung (17). Sie besagt, daß die Funktion $f(x) = \mu\big((A^\infty - x) \cap B^\infty\big) = \mu\big(A^\infty \cap (B^\infty + x)\big)$ auf A^∞ den Wert $\mu(B^\infty)$ annimmt. Nach Hilfssatz 1 folgt $\int_G f(x)\,dx = \mu(A^\infty)\,\mu(B^\infty) = \int_{A^\infty} f(x)\,dx$, also $\int_E f(x)\,dx = 0$ für jede zu A^∞ fremde Menge E, insbesondere für die Menge E der x mit $0 < f(x) < \mu(B^\infty)$. Da $f(x)$ auf E positiv ist gilt $\mu(E) = 0$; $f(x)$ ist nach Hilfssatz 1 stetig, E also offen und daher leer. Die Funktion $f(x)$ nimmt also nur die Werte 0 und $\mu(B^\infty)$ an. Daher ist die Menge C der x mit $f(x) = \mu(B^\infty)$ offen und abgeschlossen; sie enthält die Menge A^∞ und hat das gleiche Maß wie diese, ist also deren abgeschlossene Hülle. Außer C betrachten wir noch die Menge D der nicht volumfremden Punkte von B^∞. Nach Hilfssatz 2 hat sie das gleiche Maß wie B^∞ und besitzt keine volumfremden Punkte. Wir greifen jetzt auf die Formel (17) zurück. Sie besagt, daß B^∞, und daher erst recht D, für jedes e aus A^∞ bis auf eine Nullmenge in $A^\infty - e$, und daher erst recht in $C - e$ liegt. Nach Hilfssatz 3 folgt daraus $D \subseteq C - e$ für jedes e aus A^∞, d.h. $A^\infty + D \subseteq C$, und da C die abgeschlossene Hülle von A^∞ ist, schließlich $C + D \subseteq C$. D liegt also in der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H = H(C)$. Wegen $\mu(H) \geq \mu(D) = \mu(B^\infty) > 0$ ist H offen ([13], § 11). Für jedes $h \in H$ gilt nach Definition $C + h \sim C$. Da $C + h$ als offene Menge keine volumfremden Punkte besitzt und C außerdem abgeschlossen ist, folgt hieraus nach Hilfssatz 3 $C + h \subseteq C$, also $C + H = C$. Weiter gilt

$$\mu(C) = \mu(A^\infty) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(B^\infty) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H).$$

Schließlich zeigen wir noch, daß C in $A + B$ enthalten ist. Liegt nämlich c in C, so ist $c - D \subseteq c - H \subseteq C + H = C$; es folgt

$$\mu\big(A^\infty \cap (c - B^\infty)\big) = \mu\big(C \cap (c - D)\big) = \mu(c - D) = \mu(D) > 0.$$

$A^\infty \cap (c - B^\infty)$ ist also nicht leer, d.h. c liegt in $A^\infty + B^\infty \subseteq A + B$ wie behauptet. Zusammengefaßt haben wir den

Satz 1b. *Ist die Null in A und B enthalten, so gilt entweder die Ungleichung*

$$\mu_*(A + B) \geq \mu(A) + \mu(B), \tag{1}$$

oder es gibt einen die Null enthaltenden Teil C von $A + B$ und eine offene kompakte Untergruppe $H = H(C)$ von G mit den Eigenschaften

$$C + H = C, \tag{18}$$

$$\mu(C) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(H). \tag{19}$$

Dieser Satz entspricht der Aussage IV aus [5] S. 468. Ebenso wie dort die Aussage II S. 464 folgt hier der

Satz 1c. *Gilt die Ungleichung* (1) *nicht, so gibt es zu jeder endlichen Teilmenge E von $A + B$ einen E umfassenden Teil $C = C(E)$ von $A + B$ und eine offene kompakte Untergruppe $H = H(C(E))$ von G mit den Eigenschaften* (18) *und* (19).

Dabei entnimmt man der Konstruktion der Mengen $C(E)$, daß $C(E \cup F) = C(E) \cup C(F)$ ist; die Abbildung $E \to C(E)$ ist also monoton, und wegen $E \subseteq C(E)$ folgt $A + B = \bigcup_E C(E)$. Die Mengen $C(E)$ sind außerdem wegen (18) offen. Ist daher $\mathfrak{S}$ das System aller endlichen Teilmengen von $A + B$ mit der Inklusion als Ordnung, so folgt nach [1] chap. IV, § 1, prop. 7 die Gleichung $\sup_{E \in \mathfrak{S}} \mu(C(E)) = \mu(A + B)$. Insbesondere gibt es eine endliche Menge D mit $\mu(C(D)) > \mu(A + B) - (\mu(A) + \mu(B) - \mu(A + B))$. Wir zeigen, daß dann für $E \supseteq D$ sicher $H(C(E)) \supseteq H(C(D))$ gilt. Aus $D \subseteq E$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} \mu(C(E)) &\leq \mu(A + B) < \mu(C(D)) + \mu(A) + \mu(B) - \mu(A + B) \\ &\leq \mu(C(D)) + \mu(A) + \mu(B) - \mu(C(E)) \leq \mu(C(D)) + \mu(H(C(E))). \end{aligned}$$

Jede in $C(E)$ enthaltene Restklasse modulo $H(C(E))$ enthält also ein Element aus $C(D)$, d.h. es ist $C(E) = C(D) + H(C(E))$. Daraus folgt,

$$C(E) + H(C(D)) = C(D) + H(C(D)) + H(C(E)) = C(D) + H(C(E)) = C(E),$$

also $H(C(D)) \subseteq H(C(E))$ und weiter $A + B + H(C(D)) = \bigcup_{E \supseteq D} (C(E) + H(C(D)))$ $= \bigcup_{E \supseteq D} C(E) = A + B$. Das ist die Formel (2) mit $H = H(C(D))$ und entspricht der Aussage I S. 464 aus [5]. Der Satz 1 folgt nun so wie in [5] der Dichtesatz.

§ 4. Die Grenzfälle

Wir setzen jetzt G kompakt und zusammenhängend voraus, so daß der Satz 1 in den Satz 1a übergeht, und wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen in der Ungleichung (5) das Gleichheitszeichen steht, wann also

$$\mu_*(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{20}$$

ist. Daß dies unter den Voraussetzungen des Satzes 2 der Fall ist, wurde schon in § 1 gezeigt. Es bleibt die Umkehrung zu beweisen. Wir setzen also voraus, daß $\mu(A)$ und $\mu(B)$ positiv sind, daß $\mu(A)+\mu(B)<\mu(G)$ ist und die Gleichung (20) gilt. Wir zeigen anschließend, daß es dann einen Homomorphismus χ von G auf die eindimensionale Torusgruppe T und zwei abgeschlossene Intervalle K und L in T gibt derart, daß A und B äquivalent zu $\chi^{-1}(K)$ und $\chi^{-1}(L)$ sind. Die volle Aussage des Satzes 2 ergibt sich dann so: Ist c ein innerer Punkt von $\chi^{-1}(K+L)$, also $\chi(c)$ innerer Punkt von $K+L$, so haben die Intervalle K und $\chi(c)-L$ innere Punkte gemeinsam. Das Maß $\bar{\mu}$ von $K\cap(\chi(c)+L)$ in T ist also positiv und damit auch ([13], § 9)

$$\mu\big(A\cap(c-B)\big)=\mu\big(\chi^{-1}(K)\cap(c-\chi^{-1}(L))\big)>0,$$

also $c\in A+B$. Abgesehen von einer Nullmenge liegt demnach $\chi^{-1}(K)+\chi^{-1}(L)=\chi^{-1}(K+L)$ in $A+B$. Ist nun d nicht in $\chi^{-1}(K)$ gelegen, so gilt

$$\begin{aligned}\mu\big((\chi^{-1}(K)\cup\{d\})+\chi^{-1}(L)\big)&=\bar{\mu}\big((K\cup\{\chi(d)\})+L\big)>\bar{\mu}(K+L)\\&=\bar{\mu}(K)+\bar{\mu}(L)=\mu\big(\chi^{-1}(K)\big)+\mu\big(\chi^{-1}(L)\big),\end{aligned}$$

also auch $\mu\big((A\cup\{d\})+B\big)>\mu(A)+\mu(B)$. Wegen (20) liegt d also sicher nicht in A, d.h. es gilt $A\subsetneqq\chi^{-1}(K)$ und ebenso $B\subsetneqq\chi^{-1}(L)$. Das ist aber gerade die noch fehlende Aussage des Satzes 2.

Zum Beweis der Behauptungen $A\sim\chi^{-1}(K)$ und $B\sim\chi^{-1}(L)$ ersetzen wir A und B durch Teilmengen von gleichem Maß, die sich als Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Mengen schreiben lassen. Das ändert Voraussetzung und Behauptung nicht, denn es werden ja nur Nullmengen weggelassen, und die linke Seite der Gleichung (20) kann sich nach (5) nicht verkleinern. Dadurch erreichen wir, daß auch die Summe eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen und daher integrierbar ist. Wir können also in (20) den Stern weglassen. Dann bilden wir die in § 2 definierte Untergruppe $H(A+B)$ der x mit $A+B+x\sim A+B$ und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob $H(A+B)$ nur aus der Null besteht oder ein von null verschiedenes Element enthält. Im ersten Fall werden wir zeigen, daß G isomorph T ist, während A und B äquivalent zu zwei Intervallen sind. Den zweiten Fall führen wir dann durch Restklassenbildung modulo $H(A+B)$ auf den ersten zurück.

Erster Fall: $H(A+B)=\{0\}$, d.h. es gibt kein $x\neq 0$ mit $A+B+x\sim A+B$. Wir verwenden wieder die Begriffe e-Transformation und abgeleitete Menge, allerdings in einem etwas weiteren Sinn als in § 3. Wir wollen nämlich nicht mehr voraussetzen, daß $0\in A\cap B$ und $e\in A$ ist. Dann gilt natürlich auch (13) nicht mehr, aber die Formeln (11) und (12) behalten ihre Gültigkeit, und ebenso verhält es sich mit den durch mehrfache Anwendung solcher allgemeinerer e-Transformationen erhaltenen abgeleiteten Mengenpaaren. Das Maß einer abgeleiteten Menge $B'=(A-e)\cap B$ ist

$$\mu\big((A-e)\cap B\big)=\mu\big(A\cap(B+e)\big)=f(e).$$

Aus Hilfssatz 1 folgt die Ungleichung

$$\mu(G)\min_x f(x) \leq \mu(A)\,\mu(B) \leq \mu(G)\max_x f(x).$$

Es gibt also Elemente x, für die $f(x) \leq \mu(A)\,\mu(B)\,\mu(G)^{-1} < \gamma\mu(B)$ mit $\gamma = (\mu(A)+\mu(B))\,\mu(G)^{-1} < 1$ ist, und solche, für die

$$f(x) \geq \mu(A)\,\mu(B)\,\mu(G)^{-1} > 0$$

gilt. Da G zusammenhängend und f stetig ist, gibt es auch ein x, das beiden Ungleichungen genügt: $0 < f(x) < \gamma\mu(B)$. Bei geeigneter Wahl von e wird also $0 < \mu(B') < \gamma\mu(B)$. Da die Konstante γ nach (11) für alle abgeleiteten Mengen die gleiche ist, erhält man durch n-malige Anwendung ein abgeleitetes Mengenpaar A^n, B^n mit $0 < \mu(B^n) < \gamma^n\mu(B)$, also

$$\mu(B^n) > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu(B^n) = 0 \text{ [7]}. \tag{21}$$

Von den weiteren Eigenschaften dieser Mengen brauchen wir im folgenden nur noch die aus (11) fließende Gleichung

$$\mu(A^n) + \mu(B^n) = \mu(A) + \mu(B) \tag{22}$$

und die aus (12) und $\mu(A^n + B^n) \geq \mu(A^n) + \mu(B^n) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A+B)$ folgende Äquivalenz

$$A^n + B^n \sim A + B. \tag{23}$$

Wir beweisen nun nacheinander einige Eigenschaften dieser Mengen, die uns schließlich zu dem gewünschten Resultat führen werden.

1. Zu jeder Umgebung U der Null in G gibt es ein m derart, daß $B^n - B^n$ in U liegt für $n > m$.

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es wegen $B^n \subsetneqq B^{n-1}$ zwei Folgen von Punkten x_n, y_n aus B^n mit $y_n - x_n \notin U$. Da G kompakt ist, besitzt die Folge (x_n, y_n) in $G \times G$ einen Häufungspunkt (x, y), und dabei ist $y - x \neq 0$ wegen $y_n - x_n \notin U$. Nun ist A^n in dem Durchschnitt $(A^n + B^n - y_n) \cap (A^n + B^n - x_n)$ enthalten. Nach Hilfssatz 1 und den Formeln (23) und (20) bis (22) folgt daher die Ungleichung

$$\begin{aligned}\mu\big((A+B)\cap(A+B+y-x)\big) &\geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu\big((A+B)\cap(A+B+y_n-x_n)\big)\\ &= \varlimsup_{n\to\infty} \mu\big((A^n+B^n-y_n)\cap(A^n+B^n-x_n)\big) \geq \lim_{n\to\infty}(A^n)\\ &= \mu(A)+\mu(B) = \mu(A+B),\end{aligned}$$

also $(A+B)+(y-x) \sim A+B$, entgegen der Annahme $H(A+B) = \{0\}$.

[7]) Führt man diese Konstruktion mit zwei beliebigen integrierbaren Mengen A und B durch, so erhält man einen einfachen direkten Beweis für die Formel (5) des Satzes 1a:

$$\begin{aligned}\mu_*(A+B) &\geq \lim_{n\to\infty} \mu_*(A^n+B^n) \geq \lim_{n\to\infty} \mu(A^n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(\mu(A^n)+\mu(B^n)) - \lim_{n\to\infty}\mu(B^n) = \mu(A)+\mu(B).\end{aligned}$$

Da die Formel (6) sehr leicht einzusehen ist, hat man so auch einen direkten Beweis für den ganzen Satz 1a.

2. χ sei ein echter additiver Charakter von G, d.h. ein Homomorphismus von G auf die additive Gruppe T der reellen Zahlen R modulo eins. Sind a und b zwei reelle Zahlen, $a<b\leq a+1$, so verstehen wir unter $I(a,b)$ das abgeschlossene Intervall in T, das aus den Restklassen der Zahlen zwischen a und b besteht. Wenn wir das Maß auf T so normieren, daß die ganze Gruppe das Maß 1 hat, so hat $I(a,b)$ das Maß $b-a$. Wie aus Nr. 1 hervorgeht, liegen die Mengen $\chi(B^n-B^n)$ in Intervallen $I(-a_n, a_n)$, deren Längen $2a_n$ für $n\to\infty$ gegen null gehen. Wählt man a_n minimal, so gilt $a_n\equiv(y_n-x_n) \bmod 1$ mit Elementen x_n und y_n aus der abgeschlossenen Hülle von B^n. Fügen wir die Punkte x_n und y_n zu B^n hinzu, so gelten für die neuen Mengen wieder die Formeln (21), (22) und nach Hilfssatz 5 auch (23). Da wir nur diese Eigenschaften brauchen, setzen wir von jetzt ab $x_n, y_n\in B^n$ voraus. Wir wollen nun die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ verschärfen zu

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n^{-1}\,\mu(B^n)=c>0. \tag{24}$$

Dazu wählen wir die natürliche Zahl c_n so, daß $\frac{1}{3}\leq c_n a_n\leq\frac{2}{3}$ wird. Wäre nun der Grenzwert (24) null, so wäre auch $\varlimsup\limits_{n\to\infty} c_n\mu(B^n)=0$. Durch Übergang zu einer Teilfolge und Umnumerierung können wir $\lim\limits_{n\to\infty} c_n\mu(B^n)=0$ erreichen. Ist z ein Häufungspunkt der Folge $c_n(y_n-x_n)$, so liegt mit $\chi\big(c_n(y_n-x_n)\big)\equiv c_n a_n$ auch $\chi(z)$ in $I(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, so daß $z\neq 0$ folgt. Nun gilt $A^n+B^n\sim A+B$, also nach Hilfssatz 1 und 6

$$\begin{aligned}\mu\big((A+B)\cup(A+B+z)\big)&\leq\varlimsup_{n\to\infty}\big((A^n+B^n)\cup(A^n+B^n+c_n(y_n-x_n))\big)\\&\leq\lim_{n\to\infty}\big(\mu(A^n+B^n)+c_n\mu(B^n)\big)=\mu(A+B).\end{aligned}$$

d.h. $A+B+z\sim A+B$, im Widerspruch zur Annahme $H(A+B)=\{0\}$.

3. Der Kern G' des Homomorphismus χ ist diskret.

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus § 2, also μ' das HAARsche Maß auf G', $\bar\mu$ das auf $T\cong G/G'$. Wäre nun G' nicht diskret, so gäbe es zu der positiven Zahl c aus (24) eine Umgebung U' der Null in G' mit $\mu'(U')<c/2$. Nach Nr. 1 gäbe es ein m derart, daß $G'\cap(B^n-B^n)\subseteq U'$, also $\mu'\big(G'\cap(B^n-B^n)\big)<c/2$ für $n>m$. Nun ist nach § 2 $\mu(B^n)=\int\mu'\big(G'\cap(B^n-x)\big)\,d\bar\mu(\bar x)$. Der Integrand verschwindet nur dann nicht, wenn x in B^n+G', also $\bar x$ in $\chi(B^n)$ liegt. Wegen der Translationsinvarianz von μ' können wir sogar $x\in B^n$ annehmen und erhalten damit $\mu(B^n)\leq\int\limits_{\chi(B^n)}\mu'\big(G'\cap(B^n-B^n)\big)\,d\bar\mu(\bar x)\leq a_n c/2$ im Widerspruch zu (24). G' ist also diskret und G daher lokal isomorph zu T. Da G kompakt ist folgt

4. G ist isomorph der eindimensionalen Torusgruppe T.

Wir setzen daher von jetzt ab voraus, daß G gleich T und χ die identische Abbildung ist. Im übrigen behalten wir die Bezeichnungen aus Nr. 2 bei, nur wollen wir gelegentlich Elemente aus T mit ihren Vertretern in R identifizieren; so sollen z.B. x_n und y_n auch zwei reelle Zahlen mit der Differenz

$y_n - x_n = a_n$ bedeuten. Dann gilt $B^n \subseteq I(x_n, y_n)$. Es sei jetzt C eine integrierbare Menge in T. Einen Punkt v nennen wir einen Grenzpunkt von C, wenn

$$\mu\big(C \cap I(v-s, v)\big) > 0 \tag{25}$$

für jedes positive s und

$$\lim_{t \to 0+} t^{-1} \mu\big(C \cap I(v, v+t)\big) = 0 \tag{26}$$

ist. Dann beweisen wir

5. $A + B$ besitzt höchstens einen Grenzpunkt.

v sei ein Grenzpunkt von $A + B$, c der positive Grenzwert aus (24); $t > 0$ so klein, daß $t^{-1}\mu\big((A+B) \cap I(v, v+t)\big) < c/4$; $s > 0$ so klein, daß auch noch $t^{-1}\mu\big((A+B) \cap I(v-s, v+t)\big) < c/4$. Wegen $A^n + x_n \subseteq A^n + B^n \sim A + B$ und $\lim_{n \to \infty} \mu(A^n + x_n) = \mu(A+B)$ folgt nach (25) $\mu\big((A^n + x_n) \cap I(v-s, v)\big) > 0$ für genügend große n. Es gibt also ein $z_n \in A^n + x_n$ mit $v - s \leq z_n \leq v$. Wir bezeichnen mit $k = k_n$ die größte ganze Zahl, für die $z_n + k_n(y_n - x_n) \leq v + t$, so daß also $(k_n+1)a_n = (k_n+1)(y_n - x_n) > v + t - z_n \geq t$, und betrachten die Menge $C^n = A^n + \bigcup_{i=0}^{k-1} (B^n + i(y_n - x_n))$. C^n enthält die getrennt liegenden Mengen $z_n - x_n + B^n + i(y_n - x_n)$ für $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ und diese liegen wegen der Wahl von k_n in $I(v-s, v+t)$. Der Teil von C^n, der in $I(v-s, v+t)$ aber nicht in $A^n + B^n \sim A + B$ liegt, hat also mindestens das Maß

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mu\big(z_n - x_n + B^n + i(y_n - x_n)\big) - \mu\big((A+B) \cap I(v-s, v+t)\big)$$
$$\geq k_n \mu(B^n) - tc/4 \geq k_n \mu(B^n) - (k_n+1)\, a_n c/4.$$

Für genügend großes n ist $(k_n+1)/2k_n \leq 3/4 < 1$ und daher nach (24) $(k_n+1)a_n c < 2k_n \mu(B^n)$, also das gesuchte Maß größer als $\frac{1}{2}k_n \mu(B^n)$. Gäbe es nun zwei verschiedene Grenzpunkte, so könnte man diese Konstruktion für beide durchführen, und zwar so, daß die Intervalle $I(v-s, v+t)$ nicht übereinandergreifen. Man erhielte dann

$$\mu\Big(A^n + \bigcup_{i=0}^{k-1} \big(B^n + i(y_n - x_n)\big)\Big) = \mu(C^n) > \mu(A^n + B^n) + k_n \mu(B^n)$$

im Gegensatz zu der Aussage des Hilfssatzes 6, die wegen

$$\mu(A^n + B^n) = \mu(A^n) + \mu(B^n)$$

so lautet:

$$\mu(C^n) \leq \mu(A^n + B^n) + (k_n - 1)\mu(B^n).$$

6. $A + B$ besitzt mindestens einen Grenzpunkt.

Das folgt daraus, daß nach Voraussetzung $0 < \mu(A+B) < \mu(G)$ ist. Danach gibt es nämlich zwei getrennt liegende Intervalle K und L mit $\mu\big((A+B) \cap K\big) > 0$ und $\mu\big((A+B) \cap L\big) < \mu(L)$. Durch Einbettung von K

und L in aneinander grenzende Intervalle kann man drei Zahlen $x<y<z\leq x+1$ finden mit $\mu\big((A+B)\cap I(x,y)\big)>0$ und $\mu\big((A+B)\cap I(y,z)\big)<\mu\big(I(y,z)\big)$. Die Behauptung folgt nun aus dem

Hilfssatz 8. *Ist $x<y<z\leq x+1$, C integrierbar und $\mu\big(C\cap I(x,y)\big)>0$, $\mu\big(C\cap I(y,z)\big)<\mu\big(I(y,z)\big)$, so liegt im Inneren des Intervalles $I(x,z)$ mindestens ein Grenzpunkt von C.*

Beweis. Wegen der zweiten Voraussetzung über C gibt es in $I(y,z)$ einen Punkt v, in dem die Dichte von C verschwindet, so daß die Gleichung (26) gilt. Ist (25) erfüllt, so ist v ein Grenzpunkt von C. Anderenfalls sei w die untere Grenze der Zahlen $u<v$ mit $\mu\big(C\cap I(u,v)\big)=0$. w ist offenbar ein Grenzpunkt von C und liegt wegen der ersten Voraussetzung über C im Inneren von $I(x,z)$.

7. $A+B$ ist äquivalent zu einem Intervall.

v sei ein Grenzpunkt von $A+B$ und z die untere Grenze der Zahlen $u\leq v$ mit $\mu\big((A+B)\cap I(u,v)\big)=\mu\big(I(u,v)\big)$. Dann ist $A+B\sim I(z,v)$. Anderenfalls gäbe es nämlich ein zu $I(z,v)$ punktfremdes Intervall $I(x,y)$ mit $\mu\big((A+B)\cap I(x,y)\big)>0$. Nach Definition von z wäre außerdem

$$\mu\big((A+B)\cap I(y,z)\big)<\mu\big(I(y,z)\big).$$

Im Inneren des Intervalls $I(x,z)$ läge also nach Hilfssatz 8 ein zweiter Grenzpunkt von $A+B$, was der Aussage 6 widerspräche.

8. A und B sind äquivalent zu Intervallen.

Liegt b in B, c in dem Komplement $\mathsf{C}(A+B)$ von $A+B$, so liegt $c-b$ sicher nicht in A, d.h. es gilt $\mathsf{C}(A+B)+(-B)\subseteq\mathsf{C}A$. Wegen

$$\mu\big(\mathsf{C}(A+B)\big)+\mu(-B)=1-\mu(A+B)+\mu(B)=1-\mu(A)=\mu(\mathsf{C}A)$$

folgt nach Satz 1a $\mathsf{C}(A+B)+(-B)\sim\mathsf{C}A$ und nach Nr. 7, angewandt auf $\mathsf{C}(A+B)$ und $-B$ an Stelle von A und B, daß $\mathsf{C}A$ äquivalent zu einem Intervall ist. Also ist auch A und ebenso B äquivalent zu einem Intervall.

Zweiter Fall: $H(A+B)\neq\{0\}$. Zur Abkürzung schreiben wir G' für $H(A+B)$ und bezeichnen mit χ den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/G'=\overline{G}$. Es seien jetzt $\overline{A}$ bzw. $\overline{B}$ bzw. $\overline{C}$ die Menge der $\bar{x}\in\overline{G}$ mit $\mu'\big(G'\cap(A-x)\big)>0$ bzw. $\mu'\big(G'\cap(B-x)\big)>0$ bzw. $\mu'\big(G'\cap(A+B-x)\big)>0$. Ist das Maß μ' durch $\mu'(G')=1$ normiert, so folgt $\bar{\mu}(\overline{A})\geq\mu(A)$, $\bar{\mu}(\overline{B})\geq\mu(B)$ und nach Hilfssatz 7 $A+B\sim\chi^{-1}(\overline{C})$, also $\bar{\mu}(\overline{C})=\mu(A+B)$. Außerdem ist $\overline{A}+\overline{B}$ in $\overline{C}$ enthalten und daher $\bar{\mu}(\overline{A}+\overline{B})\leq\bar{\mu}(\overline{C})=\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)\leq\bar{\mu}(\overline{A})+\mu(\overline{B})$. Nach Satz 1a muß hier überall das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt $\overline{A}+\overline{B}\sim\overline{C}$, $A\sim\chi^{-1}(\overline{A})$, $B\sim\chi^{-1}(\overline{B})$. Wir zeigen nun noch, daß $H(\overline{C})$ und damit auch $H(\overline{A}+\overline{B})$ kein Element $\bar{x}\neq 0$ enthält. Ist nämlich $\overline{C}+\bar{x}\sim\overline{C}$, so folgt $\chi^{-1}(\overline{C})+x\sim\chi^{-1}(\overline{C})$ und damit $A+B+x\sim A+B$, d.h. $x\in H(A+B)=G'$ oder $\bar{x}=0$. Damit liegt für $\overline{A}$ und $\overline{B}$ der erste Fall vor, $\overline{G}$ ist also isomorph der Torusgruppe, $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind äquivalent zu zwei Intervallen, und wir sind fertig.

Wir wenden uns jetzt dem Satz 3 zu, also der Frage, wann in einer beliebigen lokalkompakten abelschen Gruppe $\mu_*(A+B)=\mu(A)$ sein kann. Wir zeigen zunächst, daß dies sicher dann der Fall ist, wenn B in einer kompakten Untergruppe G' enthalten ist und $A=C\cup D$ mit $\mu(C)=\mu_*(C+B)=0$ und $\mu(D+G')=\mu(D)$ ist. Dann gilt nämlich $\mu(A)\leq\mu_*(A+B)\leq\mu_*(C+B)+\mu(D+G')=\mu(D)=\mu(A)$, d.h. $\mu_*(A+B)=\mu(A)$ wie behauptet. Ist umgekehrt $0\in B$ und $\mu_*(A+B)=\mu(A)>0$, so gilt für jedes Element b aus B die Ungleichung $\mu\big(A\cup(A+b)\big)\leq\mu_*(A+B)=\mu(A)$, also $A+b\sim A$, d.h. $b\in H(A)$. B und damit auch die von B erzeugte abgeschlossene Untergruppe G' liegen also in der kompakten Gruppe $H(A)$, und daher ist G' kompakt. Nach Hilfssatz 7 gibt es in $\overline{G}=G/G'$ eine integrierbare Menge $\widetilde{A}$ und eine Nullmenge $\widetilde{B}$ mit der Eigenschaft, daß $\mu'\big(G'\cap(A-x)\big)$ den Wert $\mu'(G')$ bzw. 0 hat, falls $\bar{x}$ in $\widetilde{A}$ bzw. nicht in $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ liegt; ist χ der natürliche Homomorphismus von G auf $\overline{G}$, so haben $\chi^{-1}(\widetilde{A})$ und $D=A\cap\chi^{-1}(\widetilde{A})$ das gleiche Maß wie A und außerdem $C=A\cap\chi^{-1}(\mathsf{C}\widetilde{A})$ das Maß null. Es folgt $D+G'=\chi^{-1}(\widetilde{A})\sim D$, also $\mu(D+G')=\mu(D)$ und natürlich auch $\mu(D+B)=\mu(D)=\mu(A)$ und weiter $\mu(A)=\mu_*(A+B)=\mu_*(C+B)+\mu(D+B)=\mu_*(C+B)+\mu(A)$, also $\mu_*(C+B)=0$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes 3 bewiesen.

§ 5. Die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung

Im letzten Abschnitt haben wir uns im wesentlichen auf kompakte Gruppen G beschränkt, und dabei bemerkt, daß für solche die Aussage des Satzes 1 ziemlich scharf ist. Das gilt auch noch, wenn G zwar nicht selbst kompakt ist aber eine offene kompakte Untergruppe enthält. Anders liegen die Verhältnisse, wenn G keine offene kompakte Untergruppe enthält. Eine derartige lokalkompakte abelsche Gruppe kann man als direkte Summe einer Gruppe F und eines reellen Vektorraumes R^n der Dimension $n\geq 1$ darstellen ([13], § 29). Hier kann man nun die Abschätzung des Satzes 1 wesentlich verbessern. Das zeigt schon die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung

$$\mu_*(A+B)^{1/n}\geq\mu(A)^{1/n}+\mu(B)^{1/n} \tag{7}$$

im Falle $G=R^n$ (s. z.B. [2]). Wir wollen daraus folgern, daß die Ungleichung (7) auch für $G=F+R^n$ gilt. Hat eine der Mengen A, B das Maß null, so ist die Ungleichung trivialerweise richtig. Wir können daher $\mu(A)$ und $\mu(B)$ positiv voraussetzen und uns außerdem wie in § 4 auf solche Mengen A und B beschränken, die sich als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen darstellen lassen. Dann sind auch $A+B=C$ und für jedes x aus F die Mengen $A_x=(A-x)\cap R^n$ und die entsprechend gebildeten Mengen B_y und C_z von dieser Art. A_x, B_y und C_z sind daher für das Maß ϱ auf R^n meßbar, und da ersichtlich A_x+B_y in C_{x+y} enthalten ist, folgt nach (7) die Ungleichung

$$\varrho(C_{x+y})^{1/n}\geq\varrho(A_x)^{1/n}+\varrho(B_y)^{1/n} \tag{27}$$

falls nur A_x und B_y nicht leer sind, also sicher dann, wenn beide Summanden rechts positiv sind. Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein. Für posi-

tives t sei $A(t)$ die Menge der Punkte x aus F für die $\varrho(A_x) \geq t^n$ ist; entsprechend $B(t)$ und $C(t)$; die Formel (27) hat dann

$$A(u) + B(v) \subseteqq C(u+v) \tag{28}$$

zur Folge. φ sei das HAARsche Maß auf F und $\alpha(t) = \varphi(A(t))$. $\alpha(t)$ und die entsprechend definierten Funktionen $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ sind monoton abnehmend und linksseitig stetig. Aus (28) folgt

$$\gamma(u+v) \geq \max(\alpha(u), \beta(v)), \tag{29}$$

falls $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ nicht null sind. Ist $\alpha(t)$ oder $\beta(t)$ für alle positiven Zahlen t von null verschieden, so ist A bzw. B unbeschränkt und daher nach [2], Th. 4 $\mu(A+B) = \infty$. Diesen Fall können wir also ausschließen und bezeichnen dann mit a bzw. b die obere Grenze der t mit $\alpha(t) > 0$ bzw. $\beta(t) > 0$. Um die Formeln zu vereinfachen denken wir uns das Maß ϱ auf R^n so normiert, daß $a + b = 1$ wird. Setzt man (29) $u = at$, $v = bt$ mit $0 < t < 1$, so erhält man $\gamma(t) \geq \max(\alpha(at), \beta(bt)) \geq a\,\alpha(at) + b\,\beta(bt)$. Es folgt

$$\begin{cases} \mu(C) = \int \varrho(C_x)\, d\varphi(x) = \int\limits_0^\infty \varphi\big(C(s^{1/n})\big)\, ds \geq \int\limits_0^1 \gamma(t)\, d(t^n) \\ \geq a \int\limits_0^1 \alpha(at)\, d(t^n) + b \int\limits_0^1 \beta(bt)\, d(t^n) = a^{1-n} \int\limits_0^\infty \varphi\big(A(s^{1/n})\big)\, ds + b^{1-n} \int\limits_0^\infty \varphi\big(B(s^{1/n})\big)\, ds \\ = a\big(a^{-1}\mu(A)^{1/n}\big)^n + b\big(b^{-1}\mu(B)^{1/n}\big)^n \geq \big(a(a^{-1}\mu(A)^{1/n}) + b(b^{-1}\mu(B)^{1/n})\big)^n \\ = \big(\mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}\big)^n. \end{cases} \tag{30}$$

Damit sind die Ungleichung (7) und der Satz 4 bewiesen.

Es bleibt zu untersuchen, wann das Gleichheitszeichen gilt. Wegen Satz 3 können wir uns auf Mengen positiven Maßes beschränken. Sind dann in (30) alle Ausdrücke gleich, so folgt für fast alle t

$$\gamma(t) = \alpha(at) = \beta(bt) \qquad \text{für } 0 < t \leq 1, \tag{31}$$

$$\gamma(t) = 0 \qquad \text{für } t > 1. \tag{32}$$

Wegen der linksseitigen Stetigkeit der Funktionen α, β, γ gelten diese Gleichungen sogar ausnahmslos. Die Gleichung (31) besagt wegen (28), daß

$$\varphi\big(A(at) + B(bt)\big) = \varphi\big(A(at)\big) = \varphi\big(B(bt)\big) < \varphi\big(A(at)\big) + \varphi\big(B(bt)\big)$$

ist. Nach Satz 1 folgt daraus die Existenz einer offenen kompakten Untergruppe $H = H(t)$ von F mit folgenden Eigenschaften. Nach (2) besteht $A(at) + B(bt)$ aus vollen Restklassen modulo H. Nach (4) ist

$$\varphi(H) \geq \varphi\big(A(at) + B(bt)\big).$$

Also ist $A(at) + B(bt)$ eine Restklasse modulo H und $A(at)$ und $B(bt)$ stimmen bis auf φ-Nullmengen mit je einer solchen Restklasse überein. Die Mengen $A(at) + B(bt)$ und damit auch die Untergruppen $H(t)$ nehmen mit wachsendem t monoton ab. Für irgend zwei Werte $0 < u < v < 1$ ist daher der

Quotient $\gamma(u)\gamma(v)^{-1}=\varphi(H(u))\varphi(H(v))^{-1}$ gleich dem Gruppenindex $[H(u):H(v)]$ und somit eine ganze Zahl. Die Funktion $\gamma(t)$ kann daher im Intervall (u, v) nur die endlich vielen Werte $k\gamma(v)$ $(k=1, 2, \ldots, [H(u):H(v)])$ annehmen, ist also dort stückweise konstant mit nur endlich vielen Sprungstellen. Wir zeigen jetzt, daß $\gamma(t)$ sogar im ganzen Intervall $(0, 1)$ konstant ist. Wäre nämlich u eine Sprungstelle und $u<v<1$, so hätten wir nach (31)

$$\gamma(au+bv)<\gamma(u)=\max\big(\gamma(u),\gamma(v)\big)=\max\big(\alpha(au),\beta(bv)\big)$$

im Widerspruch zu (29). Die Untergruppe $H=H(t)$ hängt also gar nicht von t ab. Durch zwei Translationen können wir nun erreichen, daß $A(a)$ und $B(b)$ die Null enthalten. Dann gilt

$$A(at), B(bt)\subseteqq H\subseteqq A(at)+B(bt)\subseteqq C(t) \qquad \text{für } 0<t\leqq 1, \tag{33}$$

und alle diese Mengen sind nach (31) φ-äquivalent. Da $A(at)$ und $B(bt)$ für $t>1$ das Maß null haben; liegen A und B bis auf Nullmengen in $H+R^n$. Lassen wir diese Nullmengen weg, so kann sich die Summe $A+B$ auch nur um eine Nullmenge ändern, da ja in (7) schon das Gleichheitszeichen gilt. Wir betrachten zunächst diese abgeänderten Mengen, setzen also A und B in $H+R^n$ voraus; dann liegt natürlich auch $A+B$ in $H+R^n$. Für die Mengen A_x, B_y und C_z ergibt die Aussage (33) in Verbindung mit (32)

$$\varrho(A_x)=a^n, \quad \varrho(B_y)=b^n, \quad \varrho(C_z)=1 \tag{34}$$

für φ-fast alle x, y, z aus H. Ist nun x ein festes Element aus $A(a)$, also $\varrho(A_x)\geq a^n$, so folgt für φ-fast alle y aus H die Ungleichung

$$1=a+b\leq\varrho(A_x)^{1/n}+\varrho(B_y)^{1/n}\leq\varrho(A_x+B_y)^{1/n}\leq\varrho(C_{x+y})^{1/n}=1. \tag{35}$$

Für jedes x aus $A(a)$ gilt also die erste Gleichung (34) und in der BRUNN-MINKOWSKIschen Ungleichung gilt für A_x und B_y das Gleichheitszeichen. A_x und B_y sind daher mit ihren konvexen abgeschlossenen Hüllen ϱ-äquivalent, und diese sind ähnlich und ähnlich gelegen ([2], Th. 2). Dasselbe gilt wegen $0\in A(a)$ auch für A_0 und B_y. Da A_x und A_0 nach (34) das gleiche Maß haben, stimmen ihre konvexen abgeschlossenen Hüllen bis auf eine Translation um einen Vektor a_x aus R^n überein. Es folgt die ϱ-Äquivalenz $A_x\sim a_x+A_0$ und für φ-fast alle y aus H auch $A_x+B_y\sim a_x+A_0+B_y$. Wir betrachten jetzt für festes x aus $A(a)$ die Teilmenge

$$x+A_x+B=(x+A_x)+\bigcup_{y\in H}(y+B_y)=\bigcup_{y\in H}(x+y+A_x+B_y)$$

von $A+B$. Ihr Maß ist nach (35)

$$\mu(x+A_x+B)=\int_H\varrho(A_x+B_y)\,d\varphi(y)=\int_H\varrho(C_{x+y})\,d\varphi(y)=\mu(A+B).$$

Also ist $x+A_x+B$ äquivalent zu $A+B$ und speziell, $x=0$ gesetzt, $A_0+B\sim A+B$. Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned}A+B\sim x+A_x+B&=x+\bigcup_{y\in H}(A_x+B_y+y)\sim x+\bigcup_{y\in H}(a_x+A_0+B_y+y)\\&=x+a_x+A_0+B\sim(x+a_x)+(A+B).\end{aligned}$$

$x+a_x$ liegt also in der nach Hilfssatz 4 kompakten Untergruppe $H(A+B)$ von $F+R^n$. Daraus folgt $a_x=0$. Bezeichnen wir mit K bzw. L die konvexe abgeschlossene Hülle von A_0 bzw. B_0, so sind K und L ähnlich und ähnlich gelegen und es gilt für φ-fast alle x aus H die ϱ-Äquivalenz $A_x \sim K$, also $A \sim H+K$ und entsprechend $B \sim H+L$, und die Äquivalenzen bleiben natürlich erhalten, wenn wir die im Anschluß an die Formel (33) gemachten Abänderungen rückgängig machen. Ganz ähnlich wie zu Beginn von § 4 sieht man auch hier leicht ein, daß A bzw. B keinen Punkt außerhalb $H+K$ bzw. $H+L$ enthalten kann. Macht man schließlich die Translationen von S. 106 rückgängig, so erhält man den Satz 5.

§ 6. Die Dichtesätze der additiven Zahlentheorie

In diesem letzten Abschnitt sollen die am Schluß von § 1 angegebenen Zusammenhänge zwischen HAARschem Maß und asymptotischer Dichte im einzelnen hergestellt werden. Wie dort sei also G eine kompakte abelsche Gruppe und E eine in G dicht liegende Unter-Halbgruppe. Auf E sei jeder beschränkten Funktion $f(x)$ ein Mittelwert Mf zugeordnet; dieser besitze die Eigenschaft (M) (S. 92) und sei durch $M1=1$ normiert, ebenso das HAARsche Maß durch $\mu(G)=1$. Als erstes beweisen wir den

Hilfssatz 9. *Ist $f(x)$ eine stetige Funktion auf G, so ist $Mf=\int f(x)\,dx$.*

Der Beweis ist der v. NEUMANNschen Konstruktion des invarianten Integrals auf einer kompakten Gruppe ([9], § 25) und dem Nachweis der Einzigkeit des HAARschen Maßes ([13], S. 37) nachgebildet. Da $f(x)$ auf der kompakten Menge G stetig ist, gibt es zu vorgegebenen $\varepsilon>0$ eine Umgebung U der Null derart, daß $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ ist, falls $y-x$ in U liegt. Da E in G dicht liegt, gilt $U+E=G$. Endlich viele Mengen $U+a_i$, $a_i \in E$, überdecken also G. $1=\sum_i h_i(x)$ sei eine zu dieser Überdeckung gehörige Zerlegung der Eins in nicht negative stetige Funktionen $h_i(x)$, die außerhalb $U+a_i$ verschwinden. Mit $c_i=\int h_i(y)\,dy$ und $d=\int f(y)\,dy$ folgt

$$d=\int f(x+y)\,dy=\sum_i \int f(x+y)\,h_i(y)\,dy=\sum_i c_i f(x+a_i)+R$$

mit

$$|R|\le \sum_i \int |f(x+y)-f(x+a_i)|\,h_i(y)\,dy \le \varepsilon \sum_i \int h_i(y)\,dy=\varepsilon,$$

da $h_i(y)$ nur dann nicht verschwindet, wenn $y-a_i=(x+y)-(x+a_i)$ in U liegt. Es ist also $(d-\varepsilon)\cdot 1 \le \sum_i c_i f(x+a_i) \le (d+\varepsilon)\cdot 1$ und daraus folgt nach (M) wegen $\sum_i c_i=1$ die Ungleichung $d-\varepsilon \le Mf \le d+\varepsilon$.

Wie in § 1 sagen wir, ein Teil A von G sei eine J-Menge, wenn A das gleiche Maß hat wie seine abgeschlossene Hülle und sein offener Kern, und bezeichnen als Dichte $\delta(B)$ eines Teiles B von E den Mittelwert $M\varphi_B$ der charakteristischen Funktion φ_B von B. Dann gilt der für das Folgende wichtige

Hilfssatz 10. *Ist A ein offener Teil von G, so gilt $\delta(A\cap E)\ge \mu(A)$; ist A abgeschlossen, so ist $\delta(A\cap E)\le \mu(A)$; ist A eine J-Menge, so gilt das Gleichheitszeichen.*

Beweis. Ist A offen, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f \leq \varphi_A$ so, daß $\int f(x)\,dx \geq \mu(A) - \varepsilon$ ist ([1], chap. IV, § 1). Nach Hilfssatz 9 folgt $\delta(A \cap E) = M\varphi_{A\cap E} \geq Mf = \int f(x)\,dx \geq \mu(A) - \varepsilon$ wie behauptet. Die zweite Ungleichung beweist man entsprechend, und die letzte Behauptung folgt aus den beiden ersten nach Definition der J-Menge.

Hilfssatz 11. *Ist e ein Element und L eine Teilmenge von G, so ist* $\delta(L \cap (E+e)) = \delta(L \cap E)$.

Beweis. Ist f die charakteristische Funktion von $L \cap E$, g die von $L \cap (E+e)$, so gilt $f(x+e) = g(x+e)$ für alle x aus E. Die Behauptung folgt daher aus (M).

Nun können wir daran gehen, den Satz 6 zu beweisen. A und B seien also J-Mengen aus G, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ihre abgeschlossenen Hüllen, $\mathring{A}$ und $\mathring{B}$ ihre offenen Kerne und $C = A \cap E$, $D = B \cap E$. Ohne Einschränkung können wir $A = \mathring{A} \cup C$ und $B = \mathring{B} \cup D$ annehmen, denn $\mathring{A} \cup C$ und $\mathring{B} \cup D$ haben auch die von A und B in Satz 6 vorausgesetzten Eigenschaften. Dann ist $\bar{C} = \bar{A}$ und $\bar{D} = \bar{B}$, denn das Komplement von $\bar{C}$ in $\mathring{A}$ ist offen und hat nach Hilfssatz 10 höchstens das Maß

$$\mu(\bar{A}) - \mu(\bar{C}) \leq \mu(A) - \delta(\bar{C} \cap E) \leq \mu(A) - \delta(C) = 0,$$

ist also leer. Wir beweisen nun die Ungleichung

$$\delta(C+D) \geq \mu\big((A + \mathring{B}) \cup (\mathring{A} + B)\big). \tag{36}$$

Zu jedem positiven ε gibt es einen kompakten Teil K von $(A + \mathring{B}) \cup (\mathring{A} + B)$ mit $\mu(K) \geq \mu\big((A + \mathring{B}) \cup (\mathring{A} + B)\big) - \varepsilon$; es genügt offenbar $\delta(C+D) \geq \mu(K)$ zu beweisen. Jeder Punkt von K liegt in einer der offenen Mengen $a + \mathring{B}$ bzw. $\mathring{A} + b$, und da C in A dicht liegt, kann sogar a in C gewählt werden, ebenso b in D. K ist also in einer endlichen Vereinigung $L = \bigcup_i (c_i + \mathring{B}) \cup \bigcup_k (\mathring{A} + d_k)$ enthalten. Wir zeigen jetzt, daß $L \cap \big(E + \sum_i c_i + \sum_k d_k\big)$ in $C + D$ enthalten ist und haben dann auf Grund der Hilfssätze 11 und 10 die gewünschte Ungleichung $\delta(C+D) \geq \delta(L \cap E) \geq \mu(L) \geq \mu(K)$. Ist nun $l = e + \sum_i c_i + \sum_k d_k$ in L, etwa in $c_j + \mathring{B}$, enthalten, so liegt $d = e + \sum_{i \neq j} c_i + \sum_k d_k$ in $\mathring{B} \cap E \subseteq D$, also $l = c_j + d$ in $C + D$ wie behauptet. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem ob für die Mengen A und $\mathring{B}$ in Satz 1 die Ungleichung (1) gilt oder nicht. Im ersten Falle folgt aus (36) die Ungleichung

$$\delta(C+D) \geq \mu(A + \mathring{B}) \geq \mu(A) + \mu(\mathring{B}) = \delta(C) + \delta(D) \tag{8}$$

des Satzes 6. Im zweiten Fall besteht $A + \mathring{B}$ aus vollen Restklassen einer offenen Untergruppe H. Dabei entnehmen wir dem Beweis von Satz 1, daß $H = H(A + \mathring{B})$ die größte Untergruppe von G mit der Eigenschaft $A + \mathring{B} + H = A + \mathring{B}$ ist und unterscheiden wieder zwei Fälle:

1. In $A+B$ gibt es ein Element $a+b$, das nicht in $A+\mathring{B}$ liegt. Dann ist

$$\mu(A+H)-\mu(A)\geqq\mu(a+H)-\mu\left(A\cap(a+H)\right)=\mu(H)-\mu\left(\mathring{A}\cap(a+H)\right),$$

also, da $A+\mathring{B}$ kein Element der Restklasse $a+b+H$ enthält,

$$\begin{aligned}\mu\left((A+\mathring{B})\cup(\mathring{A}+B)\right)&\geqq\mu(A+\mathring{B})+\mu\left((\mathring{A}+b)\cap(a+b+H)\right)\\&=\mu(A+H)+\mu(\mathring{B}+H)-\mu(H)+\mu\left(\mathring{A}\cap(a+H)\right)\geqq\mu(A)+\mu(\mathring{B})\\&=\delta(C)+\delta(D),\end{aligned}$$

und daraus folgt nach (36) die Behauptung (8).

2. $A+B=A+\mathring{B}$. Dann muß auch für A und B in Satz 1 der Ausnahmefall (2), (3) eintreten, und zwar mit derselben Untergruppe $H=H(A+B)=H(A+\mathring{B})$. Aus (3), angewandt auf die Paare A, B und $A, \mathring{B}$, folgt dann $\mu(B+H)=\mu(\mathring{B}+H)$, also $B+H=\mathring{B}+H$, da sich diese Mengen nur um volle Restklassen von H unterscheiden können. Nun ist das Komplement von $A+\mathring{B}$ als Vereinigung von Restklassen von H offen, $A+\mathring{B}$ also kompakt; daher kann im Beweis der Ungleichung (36) $K=L=A+\mathring{B}$ gewählt werden. Setzen wir $F=H\cap E$ und greifen ein Element h aus

$$H\cap\left(E+\sum_i c_i+\sum_k d_k\right)$$

heraus, so erhalten wir

$$(37)\quad C+D+F+h\subseteqq(A+B+H)\cap(E+h)\subseteqq L\cap\left(E+\sum_i c_i+\sum_k d_k\right)\subseteqq C+D.$$

Da umgekehrt $C+D+f$ in $C+D+F$ liegt für jedes f aus F, so folgt die Behauptung (9), daß $C+D$ und $C+D+F$ verwandt sind. Schließlich gilt wegen (37), (3) und Hilfssatz 10 die Ungleichung

$$(10)\quad\begin{cases}\delta(C+D)\geqq\mu(A+B+H)=\mu(A+H)+\mu(B+H)-\mu(H)\\\qquad\qquad\geqq\delta(C+F)+\delta(D+F)-\delta(F).\end{cases}$$

Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen. Der Satz 6a ist ein Spezialfall von Satz 6, braucht also nicht mehr bewiesen zu werden.

Es soll jetzt noch ein Beispiel für einen Mittelwert mit der Eigenschaft (M) gegeben werden. Im reellen n-dimensionalen Vektorraum R^n sei K ein konvexer Kegel mit der Spitze im Nullpunkt und E die Menge der in K gelegenen Vektoren mit ganzen Koordinaten. A sei eine im JORDANschen Sinne meßbare Menge, t_k eine unbeschränkt wachsende Folge von positiven reellen Zahlen, a_k eine Folge von Vektoren derart, daß t_kA+a_k in K liegt. Ist $f(x)$ eine beschränkte Funktion auf E, so sei f_k das arithmetische Mittel von $f(x)$ über alle in t_kA+a_k gelegenen Punkte von E. Dann ist leicht einzusehen, daß der Mittelwert $Mf=\underset{k\to\infty}{\lim}f_k$ die Eigenschaft (M) besitzt. Hierunter fällt

insbesondere die in der additiven Zahlentheorie gebräuchliche untere asymptotische Dichte[8]). Statt des unteren hätte ebenso gut der obere Limes genommen werden können und beide sind nach Hilfssatz 10 für die in § 1 definierten fastperiodischen Mengen gleich. Für diese existiert also der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_k$, und zwar ist er unabhängig von der gewählten Menge A und von den t_k und a_k. Das zeigt, daß die fastperiodischen Mengen nur eine sehr enge Klasse von Mengen bilden und der Satz 6a daher im Falle der gewöhnlichen asymptotischen Dichte wesentlich schwächer ist als der in [5] bewiesene Satz.

Zum Schluß sei als Anwendung des Hilfssatzes 10 noch ein Beispiel zweier Mengen A und B von natürlichen Zahlen gegeben, für welche die asymptotischen Dichten vorgeschriebene Werte α und β haben, während ihre Summe $A+B$ die Dichte $\alpha+\beta$ hat (vgl. dazu [8], § 13). ξ sei eine irrationale Zahl. Durch die Abbildung von n auf die Restklasse von $n\xi$ modulo eins erhalten wir eine Einbettung der Halbgruppe E der natürlichen Zahlen in die Gruppe T der reellen Zahlen modulo eins. Sind nun K und L zwei Intervalle aus T mit den Längen α und β, so hat $K+L$ die Länge $\alpha+\beta$. Die Menge A bzw. B der Zahlen n, für die der Rest von $n\xi$ modulo eins in K bzw. L liegt, hat nach Hilfssatz 10 die Dichte α bzw. β und ihre Summe $A+B$ die Dichte $\alpha+\beta$. Sind speziell α und β Vielfache von ξ und $K=I(0,\alpha)$, $L=I(0,\beta)$, so stimmt die asymptotische Dichte mit der finiten (SCHNIRELMANNschen) überein, so daß man hier weitere Beispiele für das Eintreten des Gleichheitszeichen im MANNschen Satz [7] hat (vgl. [8], § 13).

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Éléments de Mathématique. VI: Intégration (Actual. Scient. et Ind. 1175). Paris: Hermann 1952. — [2] HENSTOCK, R., and A. M. MACBEATH: On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **3**, 182—194 (1953). — [3] MACBEATH, A. M.: On measure of sum-sets. II. The sum-theorem for the torus. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 40—43 (1953). — [4] KASCH, F.: Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. Erscheint demnächst im J. reine angew. Math. — [5] KNESER, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Z. **58**, 459—484 (1953). — [6] KNESER, M.: Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. Math. Z. **61**, 429—434 (1955). — [7] MANN, H. B.: A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. Ann. of Math. **43**, 523—527 (1942). — [8] OSTMANN, H. H.: Additive Zahlentheorie, 1. Teil, Allgemeine Untersuchungen (Ergebnisse d. Math.). Berlin: Springer 1956. — [9] PONTRJAGIN, L.: Topological groups. Princeton 1946. — [10] RAIKOV, D.: Über die Addition von Punktmengen im Sinne von Schnirelmann (russisch). Mat. Sbornik **5**, 425—440 (1939). — [11] SHIELDS, A.: Sur la mesure d'une somme vectorielle. Fund. Math. **42**, 57—60 (1955). — [12] VOSPER, G.: The critical pairs of subsets of a group of prime order. J. Lond. Math. Soc. **31**, 200—205 (1956). — [13] WEIL, A.: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (Actual. Scient. et Ind. 869—1145). Paris: Hermann 1951.

[8]) Die in [4] betrachteten Dichtebegriffe sind nicht translationsinvariant und können daher nicht aus einem Mittelwert mit der Eigenschaft (M) gewonnen werden.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1956)

SCHRÖDER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 111—116 (1956)

Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff *)

Von
JOHANN SCHRÖDER

Das Iterationsverfahren $u_{n+1} = T u_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ zur Lösung einer gegebenen Gleichung $u = T u$ für Elemente u eines Raumes $\mathfrak{R}$ mit einem (nicht notwendig linearen) Operator T wird für den Fall behandelt, daß in $\mathfrak{R}$ für jedes Elementepaar u, v ein Abstand $\varrho(u, v)$ als Element eines halbgeordneten linearen Raumes $\mathfrak{R}$ erklärt ist. Die vorkommenden Begriffe werden (in § 1) so definiert, wie es für die Anwendungen günstig erscheint[1]). Man kommt dann zu formal ähnlichen Ergebnissen (§ 2) wie bei Zahlen als Abstand (vgl. [1], [6]). Statt einer LIPSCHITZ-Konstanten tritt darin jedoch ein Operator P auf. Deshalb sind oft weitere Abschätzungen zweckmäßig (§ 3). Bei derartig verallgemeinertem Abstandsbegriff lassen sich im konkreten Fall die speziellen Eigenschaften der Elemente u und des Operators T stärker erfassen. Eine anschließende Arbeit [5] zeigt an verschiedenen Beispielen, daß man dadurch zu teilweise erheblich engeren Fehlerschranken und schwächeren Konvergenzforderungen gelangt.

§ 1. Bezeichnungen und Hilfssatz

Es sei $\mathfrak{R}$ ein *halbgeordnetes lineares System* von Elementen $\varrho, \sigma, \ldots$, d.h. eine Menge, in der $\varrho + \sigma$ und $\alpha \cdot \varrho$ ($\alpha, \beta, \ldots$ reelle Zahlen) mit den gewohnten Rechenregeln erklärt und gewisse Elemente ϱ als positiv ($\geq o$ = Nullelement von $\mathfrak{R}$) definiert sind, wobei $\varrho \geq o$, $-\varrho \geq o$ (gleichzeitig) nur für $\varrho = o$ gilt und $\varrho + \sigma \geq o$ aus $\varrho, \sigma \geq o$, sowie $\alpha \varrho \geq o$ aus $\alpha \geq 0$, $\varrho \geq o$ folgt. $\varrho \geq \sigma$ oder $\sigma \leq \varrho$ bedeutet $\varrho - \sigma \geq o$.

Wir nennen $\mathfrak{R}$ einen *halbgeordneten linearen Raum*, wenn gewissen (konvergent genannten) Folgen $\varrho_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein (eindeutig bestimmtes) Grenzelement $\lim \varrho_n \in \mathfrak{R}$ zugeordnet ist und dabei folgende Bedingungen erfüllt sind[2]):

(1)
a) aus $\varrho_n = \varrho$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit einem festen Element ϱ folgt $\lim \varrho_n = \varrho$,
b) aus $\lim \varrho_n = \varrho$ folgt $\lim \varrho_{k_n} = \varrho$ für jede monotone Folge natürlicher Zahlen k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,
c) aus $\lim \varrho_n = \varrho$ und $\lim \sigma_n = \sigma$ folgt $\lim (\varrho_n + \sigma_n) = \varrho + \sigma$,
d) aus $\lim \alpha_n = \alpha$ und $\lim \varrho_n = \varrho$ folgt $\lim \alpha_n \varrho_n = \alpha \varrho$,
e) aus $o \leq \varrho_n \leq \sigma_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lim \sigma_n = o$ folgt $\lim \varrho_n = o$,
f) aus $\varrho_n \geq o$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lim \varrho_n = \varrho$ folgt $\varrho \geq o$.

*) Über diese Arbeit trug der Verf. auf der DMV-Tagung 1955 in Göttingen vor.

[1]) KANTOROVITCH [3] benutzte bei der Untersuchung des Iterationsverfahrens als verallgemeinerte Normen in einem linearen Raum $\mathfrak{R}$ Elemente eines halbgeordneten linearen Raumes, definierte diesen Begriff jedoch so, daß der für die Anwendungen wichtige Raum der stetigen Funktionen nicht erfaßt wird. Im übrigen sind die Ergebnisse von KANTOROVITCH von anderer Gestalt.

[2]) Die Bedingungen (1a, b) verwendete FRÉCHET in [2].

Diese Bedingungen sind im praktischen Fall leicht nachzuprüfen, und es werden damit sehr allgemeine Räume $\mathfrak{R}$ erfaßt.

Beispiele. A. Der Raum $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}_m$ der reellen m-dimensionalen Vektoren $\varrho=(\varrho_{(i)})$; $\varrho \gtrsim o$ bedeutet $\varrho_{(i)} \geq 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, $\lim \varrho_n = \varrho$ koordinatenweise Konvergenz.

B. Der Raum $\mathfrak{R}=\mathfrak{C}[a, b]$ der im Intervall $[a, b]$ stetigen reellen Funktionen $\varrho(x)$; $\varrho \gtrsim o$ bedeutet $\varrho(x) \geq 0 (a \leq x \leq b)$, $\lim \varrho_n = \varrho$ gleichmäßige Konvergenz [der Funktionenfolge $\varrho_n(x)$ gegen $\varrho(x)$] im Intervall $[a, b]$.

Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ ein halbgeordneter linearer Raum. P bedeute einen Operator, der $\mathfrak{R}$ in sich (eindeutig) abbildet ($P\varrho \in \mathfrak{R}$ für $\varrho \in \mathfrak{R}$). P sei *linear* ($P(\alpha\varrho+\beta\sigma)=\alpha P\varrho+\beta P\sigma$), *stetig* ($\lim P\varrho_n = P\varrho$, wenn $\lim \varrho_n = \varrho$) und *positiv* ($P\varrho \gtrsim o$, wenn $\varrho \gtrsim o$).

Beispiele für solche Operatoren P {in Klammern: eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe in (2) bei beliebigem $\varrho \in \mathfrak{R}$ (im Sinne der in $\mathfrak{R}$ gegebenen Definition)}:

A. $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}_m$: $P=m\times m$-Matrix (p_{ik}), $p_{ik} \gtrsim 0$ $(i, k=1, 2, \ldots, m)$ $\{|\lambda|<1$ für jeden Eigenwert der Matrix P, [4]$\}$.

B. $\mathfrak{R}=\mathfrak{C}[a, b]$: a) $P\varrho = p(x)\varrho(x)$; $p(x) \gtrsim 0$, stetig $(a \leq x \leq b)$ $\{p(x)<1\}$;

b) $P\varrho = \int_a^x \varrho(\xi)\, d\xi$ {keine zusätzliche Forderung};

c) $P\varrho = \int_a^b p(x, \xi)\, \varrho(\xi)\, d\xi$; $p(x, \xi) \gtrsim 0$, stetig $(a \leq x, \xi \leq b)$ {P besitzt keinen Eigenwert λ $(P\varrho=\lambda\varrho)$ mit $|\lambda| \geq 1$[3]}.

Hilfssatz. *Konvergiert für jedes Element $\varrho \in \mathfrak{R}$ die* NEUMANN*sche Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho$ *(d.h. die Folge* $\sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\varrho$*), dann existiert der Operator* $(E-P)^{-1}$ *(*E *= Einheitsoperator)*[4] *und ist in ganz* $\mathfrak{R}$ *erklärt durch*

$$(E-P)^{-1}\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho. \tag{2}$$

Beweis. a) Aus $(E-P)\sigma=o$ folgt $\sigma=P\sigma=P^2\sigma=\cdots=P^n\sigma$. Nach Voraussetzung existiert dann $\lim \sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\sigma = \lim n\sigma$. Mit (1a) und (1d) ergibt sich

$$\sigma = \lim \frac{1}{n}(n\sigma) = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim n\sigma = o.$$

b) Die Gleichung $(E-P)\sigma=\varrho$ besitzt bei beliebigem ϱ die Lösung

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}\varrho = \lim \sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\varrho,$$

[3]) Die Reihe $p(x, \xi)+p_2(x, \xi)+p_3(x, \xi)+\ldots$ mit den iterierten Kernen $p_i(x, \xi)$ konvergiert unter dieser Voraussetzung wegen $p_i(x, \xi) \gtrsim 0$ gleichmäßig gegen ihre stetige Grenzfunktion, den zur Integralgleichung 2. Art $\varrho=\sigma+P\varrho$ gehörigen lösenden Kern.

[4]) Der Operator $(E-P)^{-1}$ existiert, wenn aus $(E-P)\sigma=o$ folgt, daß $\sigma=o$ ist; in seinem Definitionsbereich $(E-P)\mathfrak{R}$ ist der Operator dann durch $(E-P)^{-1}(E-P)\varrho=\varrho$ erklärt.

denn wegen (1b) gilt auch $\sigma = \lim \sum_{i=1}^{n+1} P^{i-1}\varrho$, und infolge der Stetigkeit von P, (1c) und (1a) hat man daher

$$(E-P)\sigma = \sigma - P\sigma = \lim \sum_{i=1}^{n+1} P^{i-1}\varrho - \lim \sum_{i=1}^{n} P^{n}\varrho = \lim \varrho = \varrho.$$

Es ist also $(E-P)\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$.

c) Sei bei gegebenen σ: $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}(E-P)\sigma$, so folgt mit b) $(E-P)\tau = (E-P)\sigma$, also wegen a) $\sum_{i=1}^{\infty} P^{i-1}(E-P)\sigma = \tau = \sigma$, mithin (2).

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen $u, v, \ldots$ heiße ein *bezüglich* $\mathfrak{R}$ *metrischer Raum*, falls jedem Paar von Elementen $u, v \in \mathfrak{R}$ ein Element $\varrho(u, v) \in \mathfrak{R}$ als deren Abstand zugeordnet ist, derart, daß gilt:

a) $\varrho(u, v) = o$ genau dann, wenn $u = v$,

b) $\varrho(u, v) \leq \varrho(u, w) + \varrho(v, w)$ für jedes Elementetripel u, v, w.

Es folgt $\varrho(u, v) = \varrho(v, u)$ und $\varrho(u, v) \geq o$. Konvergenz und (eindeutiges) Grenzelement einer Folge u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ werden in $\mathfrak{R}$ dadurch definiert, daß $u = \lim u_n$ mit $\lim \varrho(u, u_n) = o$ äquivalent ist.

Ein solcher Raum $\mathfrak{R}$ werde *vollständig* genannt, falls jede Folge $u_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein Grenzelement $u \in \mathfrak{R}$ besitzt, für die $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = o$ ist bei beliebiger monotoner Folge natürlicher Zahlen k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Beispiele ($\mathfrak{R}$ vollständig)[5]:

A. $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_1$: a) Der Raum $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_m$ der m-dimensionalen (reellen oder komplexen) Vektoren $u = (u_{(i)})$ mit $\varrho(u, v) = \max_i |u_{(i)} - v_{(i)}|$.

b) Der Raum $\mathfrak{C}[a, b, \tau(x)]$ der, im Intervall $[a, b]$ erklärten (reell- oder komplexwertigen) Funktionen $u(x)$ der Gestalt $u(x) = \tau(x)\,\tilde{u}(x)$ mit beliebiger stetiger Funktion $\tilde{u}(x)$ und einer festen stetigen Funktion $\tau(x) \geq 0$, die (in $[a, b]$) höchstens endlich viele Nullstellen besitzt;

$$\varrho(u, v) = \max_{a \leq x \leq b} |\tilde{u}(x) - \tilde{v}(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{\tau(x)} \tag{3}$$

B. $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_m$: a) $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_m$ (wie in A, a) mit dem Vektor $\varrho(u, v) = (|u_{(i)} - v_{(i)}|)$.

b) Der Raum $\mathfrak{C}_m[a, b, \tau_1(x), \ldots, \tau_m(x)]$ der m-dimensionalen Vektoren $u = (u_{(i)}(x))$, deren Koordinaten $u_{(i)}(x)$ Elemente aus (gleichen oder verschiedenen) Räumen $\mathfrak{C}[a, b, \tau_i(x)]$ sind, mit dem Vektor

$$\varrho(u, v) = \left(\max_{a \leq x \leq b} \frac{|u_{(i)}(x) - v_{(i)}(x)|}{\tau_i(x)} \right).$$

C. $\mathfrak{R} = \mathfrak{C}[a, b]$: $\mathfrak{R} = \mathfrak{C}[a, b, \tau(x)]$ (wie in A, b) mit der Funktion $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$.

[5]) Bei diesen Beispielen ist das Kriterium $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = o$ (für jede monotone Folge k_n), welches den in $\mathfrak{R}$ definierten lim-Begriff benutzt, identisch mit dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium in seiner üblichen Form. — Die für die reellen Räume $\mathfrak{R}$ benutzten Bezeichnungen $\mathfrak{E}_m$, $\mathfrak{C}[a, b]$ verwenden wir entsprechend auch für die (reellen oder komplexen) Räume $\mathfrak{R}$. Verwechselungen sind kaum zu befürchten.

§ 2. Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzungen

Es sei $\mathfrak{R}$ ein halbgeordneter linearer Raum und $\mathfrak{R}$ ein bezüglich $\mathfrak{R}$ vollständiger metrischer Raum. T bedeute einen (nicht notwendig linearen) Operator, der einer Teilmenge $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{R}$, den Definitionsbereich von T, in $\mathfrak{R}$ (eindeutig) abbildet. Die Gleichung $u = Tu$ soll — ausgehend von einem (beliebigen) Element $u_0 \in \mathfrak{D}$ — mit dem Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = T u_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

gelöst werden. Ein Operator P (der $\mathfrak{R}$ in sich abbildet und linear, stetig und positiv ist) heiße eine *Schranke* des Operators T, wenn für jedes Elementepaar $u, v \in \mathfrak{D}$ gilt:

$$\varrho(Tu, Tv) \leq P\varrho(u, v). \tag{5}$$

Satz. *Besitzt der Operator T eine Schranke P, mit der die* NEUMANNsche *Reihe in* (2) *bei beliebigem $\varrho \in \mathfrak{R}$ konvergiert*[6]*, und enthält $\mathfrak{D}$ alle Elemente $w \in \mathfrak{R}$, für die*

$$\varrho(w, u_1) \leq \sigma \tag{6}$$

gilt mit $\sigma = (E - P)^{-1} P\sigma_0$ und $\sigma_0 = \varrho(u_1, u_0)$[7]*, so konvergiert die dann durch* (4) *definierte Folge $u_n \in \mathfrak{D}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen ein Element u, das die einzige Lösung der Gleichung $u = Tu$ aus $\mathfrak{D}$ ist, und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\varrho(u, u_1) \leq \sigma. \tag{7}$$

Beweis. Wegen (6) liegt u_1 in $\mathfrak{D}$, denn es ist $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} P^i \sigma_0 \geq 0$ nach (1f). Sei w ein Element, für das (6) richtig ist, so gilt

$$\varrho(Tw, u_1) \leq \varrho(Tw, Tu_1) + \varrho(Tu_1, Tu_0) \leq P\varrho(w, u_1) + P\varrho(u_1, u_0)$$
$$\leq \left(P(E - P)^{-1} + E\right) P\sigma_0 = (E - P)^{-1} P\sigma_0 = \sigma.$$

Also liegt mit w auch Tw und damit jedes u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in der durch (6) gegebenen Kugel. — Aus (5) folgt

$$\varrho(u_i, u_{i-1}) = \varrho(Tu_{i-1}, Tu_{i-2})$$
$$\leq P\varrho(u_{i-1}, u_{i-2}) \leq \cdots \leq P^{i-1}\varrho(u_1, u_0) = P^{i-1}\sigma_0 \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

[6]) WEISSINGER [6] verlangt bei einem Zahlenabstand $\varrho(u, v)$ nur $\varrho(T^i u, T^i v) \leq P_i \varrho(u, v)$ mit konvergenter Reihe $\sum P_i$. — Dadurch gelingt es z.B., den bezüglich der Konvergenz wesentlichen Unterschied zwischen einem VOLTERRAschen und einem FREDHOLMschen Integraloperator zu erfassen. Dieser Unterschied wird hier unmittelbar berücksichtigt, wenn man $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$ benutzt, weil man dann als P einen Integraloperator vom gleichen Typ wie T verwenden kann. — Entsprechendes wie in [6] ließe sich aber auch bei verallgemeinertem Abstandsbegriff durchführen.

[7]) An Stelle dieser Voraussetzung über $\mathfrak{D}$ kann man verlangen, daß T irgendeinen (u_1 enthaltenden) vollständigen Teilraum $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{D}$ in sich abbildet. Im Satz wird die Kugel (6) als $\mathfrak{D}^*$ benutzt.

und daher für jede monotone Folge natürlicher Zahlen k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$o \leq \varrho(u_{k_n}, u_n) \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} \varrho(u_i, u_{i-1}) \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} P^{i-1}\sigma_0 = \sum_{i=1}^{k_n} P^{i-1}\sigma_0 - \sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\sigma_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wegen (1b, c) konvergiert die rechte Seite gegen Null, so daß sich mit (1e) $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = o$ ergibt. Da $\mathfrak{R}$ vollständig ist, besitzt die Folge u_n ein Grenzelement $u \in \mathfrak{R}$. u liegt sogar in der Kugel (6) und damit in $\mathfrak{D}$, denn es gilt

$$\varrho(u, u_1) \leq \varrho(u, u_n) + \varrho(u_n, u_1) \leq \varrho(u, u_n) + \sigma,$$

d.h.

$$\varrho(u, u_n) + \sigma - \varrho(u, u_1) \geq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wegen (1f) also $\sigma - \varrho(u, u_1) \geq o$. — Man schätzt ab:

$$o \leq \varrho(Tu, u) \leq \varrho(Tu, Tu_n) + \varrho(u, u_{n+1}) \leq P\varrho(u, u_n) + \varrho(u, u_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da P stetig ist, folgt mit (1e) $\varrho(Tu, u) = o$, d.h. $u = Tu$. Gäbe es zwei verschiedene Lösungen $u, u^* \in \mathfrak{D}$ so wäre

$$\varrho(u, u^*) = \varrho(Tu, Tu^*) \leq P\varrho(u, u^*) \leq P^2\varrho(u, u^*) \leq \cdots \leq P^n\varrho(u, u^*),$$

also wegen $\lim P^n\varrho = o$ und (1f) $\varrho(u, u^*) = o$ im Widerspruch zu $u \neq u^*$ $\left(\lim P^n\varrho = \lim \sum_{i=1}^{n+1} P^{i-1}\varrho - \lim \sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\varrho = o \text{ nach } (2b, c)\right)$.

§ 3. Zur praktischen Durchführung der Fehlerabschätzung

Bei vielen Anwendungen ist es möglich, den Operator $(E - P)^{-1}P$ in geschlossener Form anzugeben. Dabei ergibt sich eine für beliebiges σ_0 gültige Formel für die Schranke σ. — Gelingt dies nicht (oder ist der Rechenaufwand zu groß), so kann man die Gleichung

$$(E - P)\sigma = P\sigma_0 \tag{8}$$

vielfach doch für das vorliegende spezielle Element σ_0 lösen. — Wenn σ_0 dafür zu komplizierte Gestalt hat, ist es zweckmäßig, σ_0 zu einem einfacheren Element zu vergrößern:

$$\sigma_0 \leq \alpha\tau \tag{9}$$

$(\tau \geq o)$. Für die Lösung ϱ der Gleichung

$$(E - P)\varrho = \alpha P\tau \tag{10}$$

gilt dann $\sigma \leq \varrho$ [denn der Operator $(E - P)^{-1}P$ ist positiv]. — Kann man sogar ein Element τ angeben, für das neben (9) die Ungleichung

$$P\tau \leq \gamma\tau \tag{11}$$

mit einer Zahl $\gamma < 1$ gilt, so erhält man eine besonders bequeme Abschätzung in Gestalt einer fertigen Formel:

$$\sigma \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} P\tau \tag{12}$$

und daraus weiter mit (11)

$$\sigma \leqq \frac{\alpha\gamma}{1-\gamma}\,\tau, \tag{13}$$

denn für die Lösung $\varrho\,(\geqq \sigma)$ der Gl. (10) gilt wegen (11)

$$\varrho = \alpha(E-P)^{-1}P\tau = \alpha\,P\lim\sum_{i=1}^{n} P^{i-1}\tau \leqq \alpha\,P\lim\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma^{i-1}\right)\tau = \frac{\alpha}{1-\gamma}\,P\tau.$$

Die Schranken σ in (8), ϱ in (10), $\frac{\alpha}{1-\gamma}\,P\tau$ in (12), $\frac{\gamma\alpha}{1-\gamma}\,\tau$ in (13) werden schrittweise schlechter. Die aus (13) folgende gröbste Abschätzung ist oft auch mit Zahlen ϱ als Abstand zu erhalten. — Es sei etwa $\mathfrak{R} = \mathfrak{C}[a, b, \tau(x)]$ und $\varrho(u, v) = |u(x) - v(x)|$. Die bei $\mathfrak{C}$ vorkommende Funktion $\tau(x)$ werde als Gewichtselement τ in (9) und (11) verwendet. (13) ergibt

$$|u(x) - u_1(x)| \leqq \frac{\alpha\gamma}{1-\gamma}\,\tau(x) \quad \text{mit} \quad \alpha = \max_{a \leqq x \leqq b}\frac{|u_1(x) - u_0(x)|}{\tau(x)}.$$

Diese Abschätzung ist identisch mit (7) bei dem Abstand (3) und γ statt P in σ; γ ist bei diesem Abstand wegen (11) statt P Schranke des Operators T.

Gegenüber (13) stellt die ähnlich einfache Abschätzung (12) meistens schon eine merkbare Verbesserung dar. Die Abschätzung (12) ist um so genauer, je weniger sich die rechten und linken Seiten in (9) und (11) unterscheiden. (9) geht in eine Gleichung über, wenn man $\tau = \sigma_0$ verwendet (zuweilen möglich, dann $\alpha = 1$); (11) wird eine Gleichung, wenn τ Eigenelement des Operators P zum Eigenwert γ ist.

σ läßt sich manchmal auch dadurch abschätzen, daß man durch systematisches Probieren — etwa mit Hilfe der Relaxationsrechnung — ein Element ϱ ermittelt, für das

$$(E - P)\,\varrho \geqq P\sigma_0$$

gilt. Damit ist dann $\sigma \leqq \varrho$.

Literatur

[1] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., S. 35ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [2] FRÉCHET, M.: Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Circ. Mat. Palermo **12**, 1—74 (1906). — [3] KANTOROVITCH, L.: The Method of Successive Approximations for Functional Equations. Acta Math. **71**, 63—97 (1939). — [4] SCHMEIDLER, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen, S. 85ff. Berlin 1949. — [5] SCHRÖDER, J.: Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. **36**, 168—181 (1956). — [6] WEISSINGER, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. **8**, 193—212 (1952).

Hannover, Schneiderberg 5

(Eingegangen am 13. April 1956)

PAASCHE, I.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 117—120 (1956)

Bemerkung zu einem Desideratum von PERRON

Von
IVAN PAASCHE

§ 1. Bezeichnungen. Das Desideratum

Mit Hilfe der unbestimmten Koeffizienten s_ν der Funktion

$$s(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu t^\nu \qquad (t \text{ unbestimmt})$$

sowie der Unbestimmten ε definieren wir Koeffizienten w_ν, R_ν, V_ν wie folgt:

$$(1) \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu t^\nu = w(t), \qquad \frac{t\,w'(t)}{w(t)} = s(t) - s(\varepsilon t)$$

$$(2) \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu t^\nu = R(t), \qquad \frac{t\,R'(t)}{R(t)} = -s(t),$$

$$(3) \qquad 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu t^\nu = V(t), \qquad \frac{V(\varepsilon t)}{V(t)} = w(t).$$

Nach Multiplikation der drei (rechten) Definitionsgleichungen für die w_ν, R_ν, V_ν mit der jeweiligen Nennerfunktion w, R, V ergibt sich durch Koeffizientenvergleich bei $t^1, t^2, t^3, \ldots$, wenn man noch abkürzend

$$(1 - \varepsilon^\nu)\, s_\nu = \sigma_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

setzt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & & \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & -3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix},$$

also

$$w_\nu = \frac{1}{\nu!} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdots & & \sigma_1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad R_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu-1 \\ s_\nu & s_{\nu-1} & \cdots & & s_1 \end{vmatrix};$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^1 & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ w_3 & w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}, \\ \text{also} \quad V_\nu = \dfrac{1}{(\varepsilon^1-1)\dots(\varepsilon^\nu-1)} \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^1 & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \dots & & w_1 \end{vmatrix}; \end{cases}$$

$(\nu = 1, 2, 3, \dots)$.

Als kleines Desideratum von PERRON werde nun die folgende Aufgabe bezeichnet[1]): Die ν-reihigen Determinanten

$$(6)\qquad W_\nu = (\varepsilon^1 - 1)\dots(\varepsilon^\nu - 1)\, V_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

sind durch geeignete (sc. übliche erlaubte) Umformungen in die ν-reihige Gestalt

$$(7)\qquad S_\nu = (\varepsilon^1 - 1)\dots(\varepsilon^\nu - 1)\, R_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

überzuführen.

§ 2. Die gesuchte lineare Transformation

Wir setzen abkürzend

$$\frac{1-\varepsilon^i}{i} s_k = \sigma_{ik} \qquad \begin{matrix} i, k = 1, 2, 3, \dots \\ i \geq k, \end{matrix}$$

ziehen in S_ν die Faktoren $(1-\varepsilon^1)/1, \dots, (1-\varepsilon^\nu)/\nu$ bzw. in die Zeilen Nr. $1, \dots, \nu$ hinein und zeigen in § 2 und § 3, daß die dann gesuchte Transformation

$$(8)\qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ A_{11} & 1 & & \\ A_{22} & A_{21} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^1 & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ w_3 & w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1-\varepsilon^1 & & & \\ \sigma_{22} & \sigma_{21} & 1-\varepsilon^2 & & \\ \sigma_{33} & \sigma_{32} & \sigma_{31} & 1-\varepsilon^3 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{cases}$$

[1]) Vgl. Math. Z. **64**, 108—109 u. 111—112 (1956). Dort wird auch noch eine andere, schwierigere Aufgabe gestellt, von der durch das Folgende nur ein ganz kleiner Teil (der dortige Fall $m = k$) miterledigt ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll. Die Fälle (a. a. O.) $m < k$, $m = k$, $m > k$ können bzw. als kleines, mittleres, großes Desideratum von PERRON bezeichnet werden.

von den folgenden Koeffizienten A_{ik} geleistet wird:

$$(9)\quad \begin{cases} A_{\nu-1,1} = (w_1 - \sigma_{\nu 1}) : (\varepsilon^{\nu-1} - 1) & \nu = 2,3,4,\dots \\ A_{\nu-1,2} = \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_2 - \sigma_{\nu 2} & w_1 - \sigma_{\nu 1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon^{\nu-2} - 1 & \\ & \varepsilon^{\nu-1} - 1 \end{vmatrix} & \nu = 3,4,5,\dots \\ A_{\nu-1,3} = \begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^{\nu-2} & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_3 - \sigma_{\nu 3} & w_2 - \sigma_{\nu 2} & w_1 - \sigma_{\nu 1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon^{\nu-3} - 1 & & \\ & \varepsilon^{\nu-2} - 1 & \\ & & \varepsilon^{\nu-1} - 1 \end{vmatrix} & \nu = 4,5,6,\dots \\ \dots\dots\dots\

Hat man bereits $V_1, \ldots, V_{\nu-1} = R_1, \ldots, R_{\nu-1}$ festgestellt [$V_1 = R_1$ ist wegen $V_1 = w_1/(\varepsilon - 1) = \sigma_1/(\varepsilon - 1) = -s_1 = R_1$ klar], so lautet (12) gemäß (4), (5)

$$(\varepsilon^\nu - 1)\, V_\nu - (\varepsilon^\nu - 1)\, R_\nu = 0, \tag{13}$$

d.h. es ist dann auch $V_\nu = R_\nu$, also nach (6), (7)

$$W_\nu = S_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Da sich die 5 Gleichungen (10) bis (14) auch rückwärts durchlaufen lassen, folgt, auch umgekehrt (10) aus (14).

§ 3. Vervollständigung des Beweises

Beweisen wir daher etwa $V_\nu = R_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$: Aus (3) folgt durch logarithmische Ableitung nach t

$$\frac{t\, w'(t)}{w(t)} = \frac{\varepsilon t\, V'(\varepsilon t)}{V(\varepsilon t)} - \frac{t\, V'(t)}{V(t)} \tag{15}$$

und gemäß (2) ist

$$s(t) - s(\varepsilon t) = \frac{\varepsilon t\, R'(\varepsilon t)}{R(\varepsilon t)} - \frac{t\, R'(t)}{R(t)}\,. \tag{16}$$

Da nach (1) die linken Seiten von (15) und (16) übereinstimmen, tun es auch die rechten, d.h. es ist

$$R(\varepsilon t)\, R(t) \begin{vmatrix} \varepsilon t\, V'(\varepsilon t) & t\, V'(t) \\ V(\varepsilon t) & V(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon t\, R'(\varepsilon t) & t\, R'(t) \\ R(\varepsilon t) & R(t) \end{vmatrix} V(\varepsilon t)\, V(t).$$

Vergleicht man hierin die Koeffizienten von $t^1, t^2, t^3, \ldots$, so folgt, unter Berücksichtigung der bereits als gleich erkannten V_ν und R_ν mit niedrigerem Index, nacheinander

$$\begin{aligned} t^1)&\quad 1(\varepsilon^1 - 1)\, V_1 = 1(\varepsilon^1 - 1)\, R_1 \\ t^2)&\quad 2(\varepsilon^2 - 1)\, V_2 = 2(\varepsilon^2 - 1)\, R_2 \\ t^3)&\quad 3(\varepsilon^3 - 1)\, V_3 = 3(\varepsilon^3 - 1)\, R_3 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

also $V_\nu = R_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, qed. Damit ist das kleine Desideratum von PERRON in der mit (8) gleichbedeutenden Gestalt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ A_{11} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{\nu-1,\nu-1} & \cdots & A_{\nu-1,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_\nu & \cdots & & w_1 \end{pmatrix} \right. \tag{17}$$

$$\left. = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1-\varepsilon^1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ \sigma_{\nu\nu} & \cdots & & \sigma_{\nu 1} \end{pmatrix} \right\} \qquad \nu = 2, 3, 4, \ldots$$

gelöst. Die inverse Transformation läßt sich ebenso leicht behandeln.

(13b) Stockdorf (Landkr. Starnberg), Kobellstr. 1

(Eingegangen am 3. Mai 1956)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 121—128 (1956)

Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren

Von
IVAN VIDAV

1. Die beschränkten Operatoren des HILBERTschen Raumes bilden eine BANACHsche Algebra, in der die Involution $X \to X^*$ der adjungierten Operatoren den folgenden fünf Bedingungen genügt:

1°. $X^{**} = X$, 2°. $(\lambda X + \mu Y)^* = \bar{\lambda} X^* + \bar{\mu} Y^*$,

3°. $(XY)^* = Y^* X^*$, 4°. $\|X^* X\| = \|X\|^2$,

5°. Es existiert $(1 + X^* X)^{-1}$.

Hier bedeuten X, Y beliebige Operatoren und λ, μ komplexe Zahlen.

Wie bekannt, haben I. M. GELFAND und M. A. NEUMARK bewiesen [*1*], daß die Postulate 1° bis 5° die Unteralgebren dieser Algebra vollständig charakterisieren: Jede BANACHsche Algebra mit einer Involution, die den Bedingungen 1° bis 5° genügt, läßt sich isometrisch-isomorph auf eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes abbilden. Das fünfte Postulat erwies sich übrigens als überflüssig, weil es aus den vier anderen Postulaten folgt (s. [*6*], S. 884).

Wenn $X^* = X$, so nennt man den Operator X selbstadjungiert. Das Ziel dieser Arbeit ist nun, ein anderes System von Postulaten aufzustellen, das die genannten Algebren mittels einer metrischen Kennzeichnung der in ihnen enthaltenen selbstadjungierten Operatoren charakterisiert. Sei also $\mathfrak{B}$ eine BANACHsche Algebra mit Einheitselement, das wir mit 1 bezeichnen wollen. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

I. *Es sei H eine Untermenge von $\mathfrak{B}$, die folgenden drei Bedingungen genügt:*

A. *Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ läßt sich mindestens in einer Weise in der Form $x = h + ig$ schreiben, wo $h, g \in H$ und $i^2 = -1$.*

B. *Gehört h zu H und ist ξ eine reelle Zahl, so gilt $\|1 + i\xi h\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn ξ gegen Null strebt.*

C. *Für jedes $h \in H$ existiert eine Zerlegung $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, so, daß $uv = vu$ ist.*

Dann hat die Algebra $\mathfrak{B}$ die folgenden Eigenschaften:

1. *Die Zerlegung $x = h + ig$ ist für jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig.*

2. *Wird $x^* = h - ig$ gesetzt, falls $x = h + ig$ gilt, so ist die Abbildung $x \to x^*$ eine Involution in $\mathfrak{B}$, die den Postulaten 1°, 2°, 3° und 5° genügt. Für die Elemente $h \in H$ gilt auch 4°, also $\|h^2\| = \|h\|^2$.*

3. *$\|x\|_0 = \|x^* x\|^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm in $\mathfrak{B}$, die der ursprünglichen $\|x\|$ äquivalent ist.*

Für diese Norm gilt offenbar allgemein $\|x^* x\|_0 = \|x\|_0^2$, d.h. das Postulat 4° besteht. Daher läßt sich $\mathfrak{B}$ isomorph und stetig auf eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes so abbilden, daß die Elemente aus H in die selbstadjungierten Operatoren mit derselben Norm übergehen.

2. Es sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige BANACHsche Algebra mit Einheitselement 1.

Definition 1. *Die Elemente $u \in \mathfrak{B}$, die der Bedingung* B *aus Satz I genügen, werden wir die selbstadjungierten Elemente von $\mathfrak{B}$ nennen. Es gilt also $\|1 + i\xi u\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn ξ reell ist und gegen Null strebt.*

Sei H' die Menge aller selbstadjungierten Elemente von $\mathfrak{B}$. Wir wollen zunächst einige Eigenschaften dieser Elemente ableiten. Offenbar enthält H' alle Elemente von der Form $\xi \cdot 1$, wo ξ eine reelle Zahl bedeutet. In der Algebra aller beschränkten Operatoren eines HILBERTschen Raumes sind die selbstadjungierten Operatoren und nur diese auch im Sinne der Definition 1 selbstadjungiert, was leicht einzusehen ist.

Die Norm $\|1 + i\xi u\|$ ist eine konvexe Funktion des reellen Parameters ξ. Es gilt daher $\|1 + i\xi u\| \leq 1 + o(\xi)$ für $\xi \to 0$ nur dann, wenn $\|1 + i\xi u\| = 1 + o(\xi)$ bei $\xi \to 0$ ist.

Hilfssatz 1. *Es gilt $\|e^{i\xi u}\| = 1$ und allgemeiner $\|a e^{i\xi u}\| = \|a\|$, wobei $u \in H'$ und $a \in \mathfrak{B}$ beliebig sind und ξ eine reelle Zahl bedeutet.*

Beweis. Die Funktion $e^{\zeta u}$ ist definiert durch die Reihe

$$e^{\zeta u} = 1 + \frac{\zeta u}{1!} + \frac{\zeta^2 u^2}{2!} + \cdots .$$

Wird $\varphi(\xi) = \log \|e^{i\xi u}\|$ bei reellem ξ gesetzt, so hat man $\varphi(\xi_1 + \xi_2) = \log \|e^{i(\xi_1 + \xi_2)u}\| \leq \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)$. Die stetige Funktion $\varphi(\xi)$ ist daher im Intervall $-\infty < \xi < \infty$ subadditiv. Nach Definition 1 hat man

$$\varphi'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\log \|1 + i\xi u\|}{\xi} = 0.$$

Daraus folgt, daß $\varphi(\xi)$ identisch verschwindet (s. [2], S. 144). Es ist also $\|e^{i\xi u}\| = 1$.

Sei nun $a \in \mathfrak{B}$ beliebig. Man bekommt leicht

$$\|a e^{i\xi u}\| \leq \|a\| \cdot \|e^{i\xi u}\| = \|a\|, \quad \|a\| = \|a e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi u}\| \leq \|a e^{i\xi u}\|,$$

d.h. $\|a e^{i\xi u}\| = \|a\|$. Im besonderen hat man $\|e^{\zeta u}\| = \|e^{\xi u}\|$ für $\zeta = \xi + i\eta$, wenn ξ und η reell sind. Ebenso beweist man, daß $\|e^{i\xi u} a\| = \|a\|$ ist.

Hilfssatz 2. (a) *Aus $u \in H'$ folgt $\xi u \in H'$ für jede reelle Zahl ξ.*

(b) *Mit u und v gehören auch $u + v$ und $i(uv - vu)$ zu H'.*

(c) *Es ist $u + iv = 0$ nur für $u = v = 0$, wenn $u, v \in H'$.*

(d) *Die Menge H' ist in $\mathfrak{B}$ abgeschlossen.*

(e) *Das Spektrum von $u \in H'$ ist reell.*

Beweis. Die Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Definition 1.

(b) Nach Hilfssatz 1 ergibt sich, wenn $u, v \in H'$, daß

$$\|e^{i\xi u} \cdot e^{i\xi v}\| = \|e^{i\xi u}\| = 1.$$

Daraus erhält man $\|1+i\xi(u+v)\| = 1+O(\xi^2)$ für $\xi \to 0$. Die Summe $u+v$ gehört also zu H'. Ebenso bekommt man

$$\|e^{i\xi u} \cdot e^{i\xi v} \cdot e^{-i\xi u} \cdot e^{-i\xi v}\| = 1, \quad \|e^{i\xi v} \cdot e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi v} \cdot e^{-i\xi u}\| = 1$$

und daraus

$$\|1 - \xi^2(uv - vu)\| = 1 + O(\xi^3), \quad \|1 + \xi^2(uv - vu)\| = 1 + O(\xi^3).$$

Es ist also $\|1+\xi(uv-vu)\| = 1+o(\xi)$ für $\xi \to 0$, d.h. $i(uv-vu) \in H'$.

(c) Sei $u+iv \neq 0$ und $u, v \in H'$. Betrachten wir die Funktion $f(\zeta) = e^{\zeta u}$, $\zeta = \xi + i\eta$. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich

$$\|f(\zeta)\| = \|e^{\xi u}\| = \|e^{-i\xi v}\| = 1.$$

Nach dem verallgemeinerten Satz von LIOUVILLE ([2], S. 59) ist die Funktion $f(\zeta)$ konstant $= 1$, also $u = 0$.

(d) Sei a ein Häufungspunkt der Menge H'. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $u_\varepsilon \in H'$ so, daß $\|u_\varepsilon - a\| < \varepsilon$ ist. Es ist also

$$\|1 + i\xi a\| \leq \|1 + i\xi u_\varepsilon\| + \xi\|u_\varepsilon - a\| < 1 + 2\varepsilon\xi,$$
$$\|1 - i\xi a\| \geq \|1 - i\xi u_\varepsilon\| - \xi\|u_\varepsilon - a\| > 1 - 2\varepsilon\xi$$

für jede genügend kleine positive Zahl ξ. Daraus folgt $\|1+i\xi a\| = 1+o(\xi)$ für $\xi \to 0$, d.h. $a \in H'$.

(e) Da $\|e^{iu}\| = \|e^{-iu}\| = 1$ ist, liegt das Spektrum von e^{iu}, $u \in H'$, auf dem Einheitskreis, das von u also auf der reellen Achse.

Aus den Eigenschaften (a) bis (d) erkennt man, daß die Elemente $u \in H'$ einen reellen BANACHschen Raum bilden.

Hilfssatz 3. *Ist $(\lambda, \varkappa)$, $\lambda \leq \varkappa$, das kleinste Intervall der reellen Achse, auf dem das Spektrum des Elementes $u \in H'$ liegt, so ist $\|e^{\xi u}\| = e^{\varkappa\xi}$ und $\|e^{-\xi u}\| = e^{-\lambda\xi}$ für alle Zahlen $\xi \geq 0$.*

Beweis. Betrachten wir die Funktion $\varphi(\xi) = \log\|e^{\xi u}\|$, die für $\xi > 0$ stetig und subadditiv ist. Folglich existiert

$$\varkappa = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \inf_{\xi > 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}.$$

Die Zahl $\varkappa$ liegt wegen $\|e^{\xi u}\| \leq e^{\xi\|u\|}$ und $\|e^{\xi u}\| \geq \|e^{-\xi u}\|^{-1} \geq e^{-\xi\|u\|}$ zwischen $-\|u\|$ und $\|u\|$. Aus $\varphi(\xi) \geq \varkappa\xi$ bekommt man $\|e^{\xi u}\| \geq e^{\varkappa\xi}$ für jedes $\xi \geq 0$.

Die Funktion $f(\zeta) = e^{\zeta(u-\varkappa)}$, $\zeta = \xi + i\eta$, wo ξ und η reelle Zahlen sind, ist in der komplexen Ebene im Endlichen überall regulär. Da $\|f(\zeta)\| = \|e^{\xi(u-\varkappa)}\|$ und $\|f(i\eta)\| = 1$ nach Hilfssatz 1 ist, folgt aus der Bedeutung der Zahl $\varkappa$, daß der Ausdruck $\|f(\zeta)e^{-\varepsilon\zeta}\|$ für jedes $\varepsilon > 0$ gegen Null strebt, wenn $\xi \to \infty$.

Aus der Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von G. POLYA und G. SZEGÖ ([5], S. 147, s. auch [2], S. 60) ergibt sich nun, daß überall in der Halbebene $\xi > 0$ die Abschätzung $\|e^{\zeta(u-\varkappa)}\| \leq 1$ gilt, insbesondere also $\|e^{\xi u}\| \leq e^{\varkappa \xi}$. Unter Berücksichtigung der Ungleichung $\|e^{\xi u}\| \geq e^{\varkappa \xi}$ bekommt man so $\|e^{\xi u}\| = e^{\varkappa \xi}$.

Ähnlich erhält man für $\xi > 0$ die Gleichung $\|e^{-\xi u}\| = e^{-\lambda \xi}$, wo

$$\lambda = -\lim_{\xi \to \infty} [\log \|e^{-\xi u}\|]/\xi$$

bedeutet. Wird nun $\tau = \operatorname{Max}(\varkappa, -\lambda)$ gesetzt, dann gilt $\|e^{\zeta u}\| \leq e^{\tau |\zeta|}$ für alle ζ. Offenbar hat man

$$\tau = \limsup_{\zeta \to \infty} \frac{\log \|e^{\zeta u}\|}{|\zeta|}.$$

Wir werden aber zeigen, daß $\tau = \lim_{n \to \infty} \|u^n\|^{1/n} = \|u\|_{sp}$ ist, wenn allgemein $\|x\|_{sp}$ den Spektralradius von x bedeutet. Man sieht zunächst leicht, daß $\tau \leq \|u\|_{sp}$ gilt. Um die Abschätzung $\tau \geq \|u\|_{sp}$ abzuleiten, betrachten wir das Integral

$$c = \int_0^\infty e^{\xi(u-\varrho)} d\xi.$$

Dieses Integral konvergiert, wenn die reelle Zahl $\varrho > \varkappa$ und es ist dann $c(u-\varrho) = -1$. Es existiert also $(u-\varrho)^{-1}$ für $\varrho > \varkappa$. Ebenso beweist man die Existenz von $(u-\varrho)^{-1}$ für $\varrho < \lambda$. Das Spektrum von u liegt daher zwischen λ und $\varkappa$. Daraus folgt $\|u\|_{sp} \leq \tau$ und dann $\|u\|_{sp} = \tau$.

Sei nun (α, β), $\alpha \leq \beta$, das kleinste Intervall, auf dem das Spektrum von u liegt. Es gilt $\operatorname{Max}(\beta, -\alpha) = \|u\|_{sp}$ und $\lambda \leq \alpha \leq \beta \leq \varkappa$. Betrachten wir jetzt das Element $u - \lambda$. Hier bekommt man $\|u-\lambda\|_{sp} = \operatorname{Max}(\beta - \lambda, \lambda - \alpha)$ und $\|u-\lambda\|_{sp} = \operatorname{Max}(\varkappa - \lambda, 0)$. Da $\lambda - \alpha < 0$ ist, folgt daraus $\beta - \lambda = \varkappa - \lambda$, also $\beta = \varkappa$. Ebenso erkennt man, daß $\alpha = \lambda$ ist. Damit haben wir den Hilfssatz 3 bewiesen.

Als eine leichte Folge davon ergibt sich:

Hilfssatz 3*. *Für jedes $u \in H'$ und $\xi > 0$ gilt $\|1 + \xi u\| = 1 + \varkappa \xi + o(\xi)$ und $\|1 - \xi u\| = 1 - \lambda \xi + o(\xi)$, wenn $\xi \to 0$.*

Die Zahlen $\varkappa$ und λ haben hier dieselbe Bedeutung wie oben. Sind diese Zahlen beide gleich Null, so gehört $iu \in H'$. Daraus folgt $u = 0$ (Hilfssatz 2c).

Definition 2. *Ein Element $u \in H'$ werden wir als positiv bezeichnen, wenn sein Spektrum nicht negativ ist.*

Ein Element $u \in H'$ ist also positiv dann und nur dann, wenn $\lambda \geq 0$.

Hilfssatz 4. *Die positiven Elemente $u \in H'$ bilden einen abgeschlossenen Kegel $\mathfrak{P}$, der im Raum H' innere Punkte besitzt.*

Beweis. Offenbar folgt aus $u \in \mathfrak{P}$ und $\xi > 0$, daß auch $\xi u \in \mathfrak{P}$. Sind nun u und v zwei Elemente aus $\mathfrak{P}$, so ist nach Hilfssatz 3*: $\|1 - \xi u\| \leq 1 + o(\xi)$ und $\|1 - \xi v\| \leq 1 + o(\xi)$ für $\xi > 0$. Daraus folgt $\|1 - \xi(u+v)\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn $\xi \to 0$ und $\xi > 0$. Für die Summe $u + v$ ist die zugehörige Zahl $\lambda \geq 0$, also $u + v \in \mathfrak{P}$. Damit ist bewiesen, daß die positiven Elemente einen Kegel $\mathfrak{P}$

im Raum H' bilden. Da sich das Spektrum von u stetig mit u ändert, ist $\mathfrak{P}$ abgeschlossen. Alle $u \in H'$ mit $\|1-u\| \leq 1$ gehören offenbar zu $\mathfrak{P}$. Also besitzt $\mathfrak{P}$ innere Punkte im Raum H'.

3. Von nun an genüge die Algebra $\mathfrak{B}$ den Bedingungen A, B, C aus Satz I. Die Mengen H' und H sind hier offenbar identisch und die Zerlegung $x = h + ig$ ist nach Hilfssatz 2(c) eindeutig.

Hilfssatz 5. *Aus $h \in H$ folgt $h^2 \in H$.*

Beweis. Sei $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, wo wegen C $uv = vu$ ist. Da h ein reelles Spektrum hat, gilt dasselbe für h^2. Das Spektrum von e^{ih^2} liegt daher auf dem Einheitskreis. Daraus folgt

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \|e^{inh^2}\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|e^{-nv}\|^{1/n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \|e^{nv}\|^{1/n} = \lim \|e^{-inh^2}\|^{1/n} = 1.$$

Betrachten wir jetzt die Funktion $e^{\xi v} = e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi h^2}$ der reellen Variablen ξ. Nach Hilfssatz 3 gibt es zwei solche Zahlen $\lambda, \varkappa$, $\lambda < \varkappa$, daß $\|e^{\xi v}\| = e^{\varkappa\xi}$ und $\|e^{-\xi v}\| = e^{-\lambda\xi}$ für $\xi > 0$ gilt. Wegen (1) ist aber $\varkappa = \lambda = 0$. Daraus folgt $v = 0$, d.h. $h^2 \in H$.

Ist nun $x = h + ig$, $h, g \in H$, so setze man $x^* = h - ig$. Man erkennt leicht, daß die Abbildung $x \to x^*$ eine Involution definiert, die den Postulaten 1°, 2°, 3° genügt.

Sei nun $h \in H$ beliebig. Für reelle ξ gehört auch $e^{\xi h}$ zu H und es gilt $\|e^{nh}\| = \|e^h\|^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (Hilfssatz 3).

Das Spektrum des Elementes $1 + i\xi h$ liegt auf einer Parallelen zur imaginären Achse. Da der Punkt $\lambda = 0$ für $\xi \neq 0$ zu der sog. Hauptkomponente der Resolventenmenge gehört, so existiert $\log(1 + i\xi h)$. Es ist

$$\log(1 + i\xi h) = ih \int_0^\xi (1 + i\tau h)^{-1} d\tau = u + iv,$$

wo

$$u = h^2 \int_0^\xi (1 + \tau^2 h^2)^{-1} \tau \, d\tau, \qquad v = h \int_0^\xi (1 + \tau^2 h^2)^{-1} d\tau$$

bedeuten. Aus den Hilfssätzen 2 und 5 folgt nun, daß u und v zu H gehören und daß sie miteinander vertauschbar sind. Daraus erhält man

$$1 + i\xi h = e^u \cdot e^{iv}, \qquad 1 - i\xi h = e^u \cdot e^{-iv}.$$

Es ist also $\|1 + i\xi h\| = \|e^u\|$ und

$$\|1 + \xi^2 h^2\| = \|e^{2u}\| = \|e^u\|^2 = \|1 + i\xi h\|^2.$$

Dies gilt für jede reelle Zahl ξ. Wegen der Stetigkeit der Norm folgt daraus

$$(2) \qquad \|h^2\| = \|h\|^2, \quad \text{wenn } h \in H.$$

Die selbstadjungierten Elemente aus H erfüllen also das Postulat 4°.

Aus (2) ergibt sich nun leicht, daß ganz allgemein $\|h^n\| = \|h\|^n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Daraus folgt $\|h\|_{sp} = \|h\|$, wenn $h \in H$.

Läßt sich ein Element $x \in \mathfrak{B}$ in der Form $x = e^{iu}h$, $u, h \in H$, schreiben, so hat man $\|x\| = \|h\|$, $x^* x = h^2$ und $\|x^* x\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$. Für die Elemente dieser Form gilt also allgemein das Postulat 4°.

Hilfssatz 6. *Jedes positive Element h hat eine Quadratwurzel, d.h. es gibt ein $u \in \mathfrak{P}$ so, daß $h = u^2$ ist.*

Offenbar kann man beim Beweis $\|h\| \leq 1$ annehmen. Dann liegen die Spektra von h und $1-h$ zwischen 0 und 1 und es ist deshalb auch $\|1-h\| \leq 1$. Nun konvergiert die TAYLORsche Reihe für $(1-\xi)^{\frac{1}{2}}$ absolut und gleichmäßig für $|\xi| \leq 1$. Die Reihe

$$u = 1 - \frac{1}{2}(1-h) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}(1-h)^2 - \cdots$$

bestimmt daher eindeutig ein Element $u \in H$. Dieses u hat ein positives Spektrum, da alle endlichen Abschnitte der Reihe $(1-\xi)^{\frac{1}{2}}$ für $0 \leq \xi \leq 1$ positiv sind. Es ist also $h = u^2$ und $u \in \mathfrak{P}$. Sind h und g zwei vertauschbare positive Elemente, u und v die zugehörigen Quadratwurzeln, so ist auch $uv = vu$. Daraus folgt $hg = u^2 v^2 = (uv)^2 \in \mathfrak{P}$.

Es bedeute $|h|$ die positive Quadratwurzel aus h^2, wo $h \in H$. Man kann sich leicht überzeugen, daß $|h| + h$ und $|h| - h$ positiv sind. Wird also $p = \frac{1}{2}(|h| + h)$ und $q = \frac{1}{2}(|h| - h)$ gesetzt, so ist $h = p - q$, $pq = 0$ und $p, q \in \mathfrak{P}$. Daraus folgt in bekannter Weise [6], daß für jedes $x \in \mathfrak{B}$ das Produkt $x^* x$ positiv ist und $x^* x = 0$ nur für $x = 0$ gilt.

Hilfssatz 7. *Die Involution $x \to x^*$ ist stetig.*

Beweis. Sei $y \in \mathfrak{B}$ beliebig und $g \in H$. Es ist

$$\|y(1 + i\xi g)\| = \|y e^{i\xi g}\| + o(\xi) = \|y\| + o(\xi),$$

wenn $\xi \to 0$. Setzt man in diese Gleichung $y = 1 + \xi h$, $h \in H$, so bekommt man $\|1 + \xi(h + ig)\| = \|1 + \xi h\| + o(\xi)$. Bei passend gewähltem Vorzeichen von ξ ist dann $\|1 + \xi(h + ig)\| = 1 + |\xi| \cdot \|h\| + o(\xi)$ (s. Hilfssatz 3*). Daraus ergibt sich $\|h + ig\| \geq \|h\|$ und $\|h + ig\| \geq \|g\|$. Es ist also

$$\|h\| + \|g\| \geq \|h + ig\| \geq \operatorname{Max}(\|h\|, \|g\|).$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x^*\| \leq 2\|x\|. \tag{3}$$

Die Involution $x \to x^*$ ist daher stetig.

4. Betrachten wir nun zwei beliebige BANACHsche Algebren $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Es seien H_1' und H_2' die zugehörigen Mengen der selbstadjungierten Elemente im Sinne der Definition 1. Wir wollen zunächst den folgenden allgemeinen Satz beweisen [3]:

II. *Sei $f(x)$ eine solche lineare Abbildung der Elemente von $\mathfrak{B}_1$ auf Elemente von $\mathfrak{B}_2$, daß α) $f(1) = 1$[1]) und β) $\|f(x)\| \leq \|x\|$ ist. Dann folgt aus $u \in H_1'$, daß*

[1]) Das heißt das Einheitselement von $\mathfrak{B}_1$ bildet sich auf das Einheitselement von $\mathfrak{B}_2$ ab.

$f(u) \in H_2'$. Gehören auch u^2 zu H_1' und $f^2(u)$ zu H_2', so ist $f(u^2) \geq f^2(u)$, d.h. die Differenz $f(u^2) - f^2(u)$ ist positiv oder Null.

Beweis. Da $u \in H_1'$, so ist $\|e^{i\xi u}\| = 1$ für reelle ξ. Es gilt also nach β): $\|f(e^{i\xi u})\| \leq 1$. Daraus folgt $\|1 + i\xi f(u)\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn $\xi \to 0$. Das Bild $f(u)$ genügt also der Bedingung B aus Satz I, d.h. $f(u) \in H_2'$. Nehmen wir nun an, daß auch $u^2 \in H_1'$ und $f^2(u) \in H_2'$. Weil $\|f(e^{i\xi u}) e^{-i\xi f(u)}\| \leq \|f(e^{i\xi u})\| \cdot \|e^{-i\xi f(u)}\| \leq 1$ für reelle ξ gilt, folgt daraus

$$\|1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 [f(u^2) - f^2(u)] + \cdots\| \leq 1. \tag{4}$$

Möge das Spektrum der Differenz $f(u^2) - f^2(u)$ zwischen λ und $\varkappa$, $\lambda < \varkappa$, liegen. Wäre nun diese Differenz nicht positiv, so wäre $\lambda < 0$. Nach dem Hilfssatz 3* hat man aber

$$\|1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 [f(u^2) - f^2(u)]\| = 1 - \tfrac{1}{2}\lambda\xi^2 + o(\xi^2), \qquad \xi \to 0,$$

was für $\lambda < 0$ der Ungleichung (4) widerspricht. Damit ist der Satz II bewiesen.

Sei jetzt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ unsere Algebra, die den Bedingungen A, B, C genügt. Man erkennt leicht, daß der Satz II in diesem Fall auch dann gilt, wenn man $\|f(x)\|^2 \leq \|x^* x\|$ fordert.

Ist $\mathfrak{B}_2$ die Algebra der komplexen Zahlen, so bedeutet $f(x)$ ein lineares Funktional. Gilt die Abschätzung $|f(x)| \leq \|x\|$ oder $|f(x)|^2 \leq \|x^* x\|$ und ist $f(1) = 1$, so folgt aus dem Satz II, daß $f(x)$ für $h \in H$ reelle Werte annimmt und $f(h^2) \geq f^2(h) \geq 0$ ist. Da sich jedes positive Element h als Quadrat eines selbstadjungierten Elementes schreiben läßt, ist $f(h) \geq 0$ für ein solches h. Im besonderen gilt also $f(x^* x) \geq 0$. *Es ist also $f(x)$ ein positives Funktional.* Umgekehrt: Ist das Funktional $f(x)$ positiv und $f(1) = 1$, so gilt bekanntlich die Abschätzung $|f(x)|^2 \leq \|x^* x\|$.

Hilfssatz 8. *Ist $\mathfrak{J}_l$ ein eigentliches abgeschlossenes Linksideal von $\mathfrak{B}$, so existiert ein positives Funktional $f(x)$ derart, daß $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathfrak{J}_l$.*

Beweis [4]. Alle Elemente von der Form $y + \lambda$, wo $y \in \mathfrak{J}_l$ und λ komplex ist, bilden einen Unterraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$. Setzt man $f(y + \lambda) = \lambda$, so ist das Funktional $f(x)$ überall in $\mathfrak{R}$ erklärt und $f(1) = 1$. Bei jedem $y \in \mathfrak{J}_l$ ist aber $\|1 + y\| \geq 1$, da andernfalls y ein inverses Element besäße, was wegen $y \in \mathfrak{J}_l$ nicht möglich ist. Es ist daher $|f(x)| \leq \|x\|$, wenn x in $\mathfrak{R}$ liegt. Nach dem bekannten Satz von HAHN-BANACH kann man aber $f(x)$ auf den ganzen Raum $\mathfrak{B}$ so erweitern, daß überall $|f(x)| \leq \|x\|$ gilt. Dieses Funktional ist nach Satz II positiv und man hat $f(x) = 0$, also auch $f(x^* x) = 0$, für jedes $x \in \mathfrak{J}_l$.

Hilfssatz 9. *Wenn die reelle Zahl λ zu dem Spektrum des selbstadjungierten Elementes h gehört, dann gibt es ein positives Funktional $f(x)$ so, daß $f(h) = \lambda$ und $f(1) = 1$.*

Die abgeschlossene Menge $[z = a(h - \lambda),\ a \in \mathfrak{B}]$ ist bekanntlich ein eigentliches Linksideal $\mathfrak{J}_l$. Es existiert also ein $f(x)$ so, daß $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathfrak{J}_l$. Im besonderen ergibt sich daraus $f(h - \lambda) = 0$, also $f(h) = \lambda$.

Für jedes $x \in \mathfrak{B}$ ist x^*x positiv und die Zahl $\|x^*x\|$ gehört zu dem Spektrum von x^*x. Es existiert daher ein positives Funktional so, daß $f(x^*x) = \|x^*x\|$. Da anderseits stets $f(x^*x) \leq \|x^*x\|$ gilt, folgt daraus

$$\|x^*x\| = \sup f(x^*x),$$

wo $\sup f(x^*x)$ bei festem x für alle positiven Funktionale $f(x)$ mit $f(1) = 1$ zu nehmen ist.

Wie bekannt [4], ist $\|x\|_0 = [\sup f(x^*x)]^{\frac{1}{2}}$, d.h. $\|x\|_0 = \|x^*x\|^{\frac{1}{2}}$, eine neue Norm in $\mathfrak{B}$. Die Äquivalenz dieser Norm $\|x\|_0$ mit der ursprünglichen $\|x\|$ erkennt man so: Nach (3) hat man zunächst $\|x\|_0^2 = \|x^*x\| \leq 2\|x\|^2$. Die Produkte x^*x und xx^* haben dasselbe Spektrum. Folglich ist $\|x^*x\| = \|x\,x^*\|$. Sei nun $x = h + ig$, $h, g \in H$. Es gilt also

$$\|x\|_0^2 = \tfrac{1}{2}\,(\|x^*x\| + \|xx^*\|) \geq \tfrac{1}{2}\,\|x^*x + xx^*\| = \|h^2 + g^2\| \geq \operatorname{Max}(\|h\|^2, \|g\|^2) \geq \tfrac{1}{4}\,\|x\|^2.$$

Daraus folgt $\frac{1}{2}\,\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \|x\|\sqrt{2}$. Damit ist der Beweis des Satzes I vollständig erbracht.

Literatur

[1] GELFAND, I., and M. NEUMARK: On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. Mat. Sbornik, N. S. **12** (54), 197—213 (1943). — [2] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Coll. Publ. **31** (1948). — [3] KADISON, R. V.: A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. Ann. of Math. (2) **56**, 494—503 (1952). — [4] NAIMARK, M. A.: Involutive Algebren. Uspechi mat. Nauk **3**, Nr. 5 (27), 52—145 (1948) [Russisch]. — [5] POLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. Die Grundlehren der Math. Wiss., Bd. XIX. 1925. — [6] SCHATZ, J. A.: Besprechung einer Abhandlung von M. FUKAMIYA. Math. Reviews **14**, 884 (1953).

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 28. Dezember 1955)

NEF, W.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 129—142 (1956)

Über die Fortsetzung monotoner Linearformen

Von
WALTER NEF

1. Teil: Einleitung

In einer kürzlich publizierten Arbeit habe ich die *monotonen Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen untersucht*[1]). Dabei galt das hauptsächliche Interesse den folgenden beiden Fragen:

1. Gegeben ist ein teilgeordneter Vektorraum M. Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß auf M eine von der Nullform verschiedene monotone Linearform existiert[2]).

2. Wieder sei M ein teilgeordneter Vektorraum, L ein Unterraum von M und F_0 eine Linearform auf L. Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß F_0 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann[3]).

Wenn im Falle der zweiten Fragestellung die Linearform F_0 monoton und linear auf M fortgesetzt werden kann, so braucht diese Fortsetzung nicht eindeutig bestimmt zu sein. Ist also y ein Element von M, das nicht zu L gehört, so gibt es möglicherweise monotone und lineare Fortsetzungen F_1 und F_2 von F_0 auf M, für die $F_1(y) \neq F_2(y)$ ist. Es stellt sich demnach die Frage nach der Menge aller Werte $F(y)$, wo F alle monotonen und linearen Fortsetzungen von F_0 auf M durchläuft. Sie wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit in allgemeiner Form behandelt, wo (Sätze 18 und 19) gezeigt wird, daß zu jedem $y \in M$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall $I(y)$ auf der reellen Zahlengeraden existiert (das auch aus einem einzigen Punkt bestehen oder leer sein kann), so daß

a) für jede monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M $F(y) \in I(y)$ ist und

b) zu jeder reellen Zahl $\eta \in I(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M existiert, für die $F(y) = \eta$ ist. Die Grenzen von $I(y)$ werden bestimmt.

Von besonderem Interesse sind die Elemente $y \in M$, für die $I(y)$ aus einem einzigen Punkt $\eta(y)$ besteht. Es gilt dann $F(y) = \eta(y)$ für jede monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M. Wir zeigen, daß die Elemente y mit dieser Eigenschaft einen Zwischenraum von L und M bilden, auf dem $F(y) = \eta(y)$ eine monotone Linearform ist, die F_0 fortsetzt (Satz 20).

Mit dem vorhergehenden verwandt ist das im dritten Teil behandelte Problem, das vor allem für die von H. HADWIGER begründete *axiomatische*

[1]) [8].
[2]) [8], Hauptsatz 6.
[3]) [8], Hauptsatz 5.

Integrationstheorie[4]) von Bedeutung ist. Hier wird ein teilgeordneter Vektorraum $\{L, y\}$ zugrunde gelegt, der aus seinem Unterraum L durch Adjunktion eines einzigen Elementes y hervorgeht. Ist F_0 eine monotone Linearform auf L, die auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann, so gehört zu y ein (eigentliches oder uneigentliches) reelles Intervall $J(y)$ (das eventuell nur aus einem Punkt besteht) mit der folgenden Bedeutung: Die auf $\{L, y\}$ definierte, F_0 fortsetzende Linearform

$$F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta \qquad (x \in L)$$

ist dann und nur dann monoton, wenn $\eta \in J(y)$ ist. Die Grenzen von $J(y)$ werden bestimmt[5]). Besteht $J(y)$ aus einer einzigen reellen Zahl $\eta(y)$, so kann also F_0 auf genau eine Weise monoton und linear auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden. Wir nennen in diesem Fall y „*über* (L, F_0) *eindeutig bewertet*".

Wiederum sei nun M ein teilgeordneter Vektorraum, L ein Unterraum von M und F_0 eine monotone Linearform auf L. Man kann nun nach den Elementen $y \in M$ fragen, die über (L, F_0) eindeutig bewertet sind. Es sind dies offenbar diejenigen Elemente $y \in M$, zu denen eine reelle Zahl $\eta(y)$ mit folgender Eigenschaft existiert: Eine lineare Fortsetzung F von F_0 auf $\{L, y\}$ ist dann und nur dann monoton, wenn $F(y) = \eta(y)$ ist. [Es ist dann auch $F(y) = \eta(y)$ für jede lineare und monotone Fortsetzung F von F_0 auf irgendeinen Zwischenraum von $\{L, y\}$ und M.] Es wird nun gezeigt:

1. Die in M gelegenen, über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente bilden einen Zwischenraum $L^\times(F_0)$, $L \subset L^\times(F_0) \subset M$, auf dem $F(y) = \eta(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 ist (Satz 36). Wir nennen $L^\times(F_0)$ die *eindeutig bewertete Hülle von* (L, F_0) *in* M.

2. Der Übergang von L zu $L^\times(F_0)$ ist eine *Abschließungsoperation* (Satz 37). Das bedeutet insbesondere: Ist ein Element $z \in M$ über $(L^\times(F_0), F)$[6]) eindeutig bewertet, so ist es schon über (L, F_0) eindeutig bewertet.

Diese Resultate sind für die axiomatische Integrationstheorie von besonderer Bedeutung. Um diese Theorie von unserem Standpunkt aus erfassen zu können, muß auf M eine Gruppe Γ von linearen Transformationen eingeführt werden. Ein Integral ist dann eine monotone Linearform, die gegenüber Γ invariant ist[7]). Naturgemäß ist hier $\{L, y\}$ zu ersetzen durch den kleinsten Unterraum $\{L, y\}^*$ von M, der L und y enthält und gegenüber Γ invariant ist. Ist nun F_0 ein Integral auf L, so wird man y „*eindeutig integrierbar über* (L, F_0)" nennen, wenn F_0 auf genau eine Weise zu einem Integral auf $\{L, y\}^*$ fortgesetzt werden kann.

Ist L das sog. elementare Integralfeld und F_0 das elementare Integral[8]), so sind die über (L, F_0) eindeutig integrierbaren Funktionen die „*absolut integrierbaren*" Funktionen[9]), denen in jedem Integrationssystem, in dem sie

[4]) Vgl. [2] bis [6].
[5]) Vgl. Sätze 21 und 22.
[6]) F ist die eindeutig bestimmte monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $L^\times(F_0)$.
[7]) Vgl. etwa [3], § 3, oder [5], S. 307.
[8]) Vgl. [5], Definition 4.
[9]) Vgl. [5], S. 310ff.

integrierbar sind, immer dasselbe Integral zukommt. Die absolut integrierbaren Funktionen bilden ein Integralfeld, auf dem (wie auch auf jedem seiner Unterfelder) genau ein Integral existiert[10]). Im Falle der invarianten Integration auf Gruppen enthält dieses Feld alle stark ergodischen, insbesondere also die fastperiodischen Funktionen und das eindeutig bestimmte Integral einer solchen Funktion ist ihr Mittelwert im Sinne von J. VON NEUMANN[11]). Handelt es sich insbesondere um die invariante Integration auf einer kompakten topologischen Gruppe, so sind z.B. die stetigen Funktionen ergodisch[12]), also absolut integrierbar.

2. Teil: Fortsetzung monotoner Linearformen

Es sei M ein *teilgeordneter Vektorraum über dem Körper R der reellen Zahlen*, d.h. ein Vektorraum über R, auf dem eine Relation $x \geq y$ gegeben ist, die folgende Eigenschaften hat:

1. *Sie ist reflexiv:* $x \geq x$ *für alle* $x \in M$.
2. *Sie ist transitiv: Aus* $x \geq y$ *und* $y \geq z$ *folgt* $x \geq z$.
3. *Aus* $x \geq y$ *und* $y \geq x$ *folgt* $x = y$.
4. *Aus* $x \geq y$ *folgt* $x + z \geq y + z$ *für alle* $z \in M$.
5. *Aus* $x \geq y$ *folgt* $\alpha x \geq \alpha y$ *für alle reellen* $\alpha \geq 0$.

Die Teilordnung von M ist eindeutig bestimmt durch die Menge P aller $x \in M$, die ≥ 0 sind. P ist ein konvexer Kegel, d.h. aus $x, y \in P$ folgt $\alpha x + \beta y \in P$ für beliebige reelle $\alpha, \beta \geq 0$. Außerdem ist niemals $x \in P$ und $-x \in P$ außer für $x = 0$.

Einen konvexen Kegel in M, der die letzte Eigenschaft hat, nennen wir *Ordnungskegel*. Die Entsprechung zwischen den Ordnungskegeln in M und den Teilordnungen, durch die M ein teilgeordneter Vektorraum wird, ist eine umkehrbar eindeutige: Ist P^* ein Ordnungskegel und setzen wir $x \overset{*}{\geq} y$ dann und nur dann, wenn $x - y \in P^*$ ist, so wird M durch diese Relation ein teilgeordneter Vektorraum.

Im folgenden werden wir mit P immer den Ordnungskegel der Teilordnung bezeichnen, die auf M zum vornherein gegeben ist. Weitere Ordnungskegel, die wir ebenfalls noch zu betrachten haben werden, werden wir durchwegs mit P^* bezeichnen.

Wie üblich bezeichnen wir eine Menge $K \subset M$ als konvex, wenn mit $x, y \in K$ auch $\alpha x + \beta y \in K$ ist, sofern $\alpha, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta = 1$ ist. Unter den konvexen Mengen sind im folgenden diejenigen besonders wichtig, die im Sinne der nachstehenden Definition „vollständig" sind:

Definition 1. *Eine konvexe Menge $K \subset M$ heißt vollständig, wenn zu jedem Element $x \in M$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $\varepsilon x \in K$ ist.*

[10]) Dies soll in einer späteren Arbeit bewiesen werden.

[11]) Vgl. [5], Satz 4 (S. 315).

[12]) Vgl. z.B. die Darstellung bei L. PONTRJAGIN, Topological groups, § 25, S. 91—99. Princeton 1939.

Jede vollständige konvexe Menge enthält das Nullelement von M.

Ist P^* ein (von der gegebenen Teilordnung auf M unabhängiger) Ordnungskegel in M und $x_0 \in M$, so nennen wir P^* x_0-vollständig, wenn eine vollständige konvexe Menge $K \subset M$ existiert, so daß $x_0 + K \subset P^*$ [13]) ist.

Definition 2. *Ist L ein Unterraum von M, so heißt ein Ordnungskegel $P^* \subset M$ L-vollständig, wenn ein Element $x_0 \in L$ existiert, so daß P^* x_0-vollständig ist.*

Satz 1. *Ist P^* x_0-vollständig, so existiert zu jedem $z \in M$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $\pm \varepsilon z \in P^* - x_0$ sind.*

Der *Beweis* liegt auf der Hand.

Jeder Unterraum des teilgeordneten Vektorraumes M ist (durch die von M her induzierte Teilordnung) selber ein teilgeordneter Vektorraum. Eine reellwertige Linearform F_0 auf einem solchen Unterraum L nennen wir *monoton*, wenn aus $x \geq 0$ folgt $F_0(x) \geq 0$. Es ist dann allgemein $F_0(x) \geq F_0(y)$, wenn $x \geq y$ ist.

Definition 3. *Eine auf einem Unterraum L des teilgeordneten Vektorraumes M definierte Linearform F_0 heißt M-monoton, wenn eine vollständige konvexe Menge $K_0 \subset M$ existiert, so daß für jedes $y \in M$ die Funktion F_0 auf der Menge $L \cap (y + K_0 + P)$ nach unten beschränkt ist* [14]).

Die M-monotonen Linearformen auf L können auch dadurch charakterisiert werden, daß sie für jedes $y \in M$ auf $L \cap (y - K_0 - P)$ nach oben beschränkt sind.

Jede M-monotone Linearform auf L ist insbesondere monoton [15]); die M-Monotonie ist notwendig und hinreichend dafür, daß F_0 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann [16]).

Satz 2. *Zu jeder M-monotonen Linearform F_0 auf einem Unterraum $L \subset M$ existiert ein L-vollständiger Ordnungskegel $P^* \supset P$ in M, so daß aus $x \in L \cap P^*$ folgt $F_0(x) \geq 0$.*

[Anders ausgedrückt: Neben der gegebenen Teilordnung „$\geq$" auf M existiert noch eine schwächere „$\overset{*}{\geq}$" (d.h. aus $x \geq y$ folgt $x \overset{*}{\geq} y$), deren Ordnungskegel P^* L-vollständig ist, und in bezug auf die F_0 noch monoton ist.]

Der Beweis dieses Satzes befindet sich in [8] (Satz 4).

Da jede auf M definierte monotone Linearform auch M-monoton ist [17]), gilt die Aussage von Satz 2 insbesondere für alle monotonen Linearformen auf M.

Im folgenden sei nun F_0 eine ein für allemal feste M-monotone Linearform auf dem ebenfalls ein für allemal festen Unterraum $L \subset M$. *Ihr ordnen wir die Menge Q von Ordnungskegeln $P^* \subset M$ zu, die folgende Eigenschaften haben:*

[13]) $x_0 + K$ bedeutet die Menge aller Elemente $x_0 + k \in M$, wo $k \in K$ ist. Allgemeiner werden wir, wenn A, B zwei Untermengen von M und α, β reelle Zahlen sind, mit $\alpha A + \beta B$ die Menge aller $\alpha a + \beta b$ bezeichnen, wo $a \in A$ und $b \in B$ ist.

[14]) Diese Definition ist schon in [8] (Definition 2) ausgesprochen.

[15]) [8], Satz 3 (Korollar).

[16]) [8], Hauptsatz 5.

[17]) [8], Satz 2.

1. $P^* \supset P$.

2. *P^* ist L-vollständig.*

3. *Aus $x \in L \cap P^*$ folgt $F_0(x) \geq 0$ (d.h. F_0 ist monoton in bezug auf die durch P^* gegebene Teilordnung in M).*

Nach Satz 2 ist Q *nicht leer.*

Definition 4. *Für jeden Ordnungskegel $P^* \in Q$ und jedes $y \in M$ bezeichnen wir mit $R(y, P^*)$ die Menge reeller Zahlen $\overline{R}(y, P^*) = F_0(L \cap (y + P^*)) + P$. Ebenso setzen wir $\underline{R}(y, P^*) = F_0(L \cap (y - P^*)) - P$.*

Dabei bedeutet P die Menge aller reellen Zahlen ≥ 0. Es ist also beispielsweise $\overline{R}(y, P^*)$ die Menge aller reellen Zahlen ϱ, zu denen ein Element $x \in L$ gehört, das $\overset{*}{\geq} y$[18]) ist und für das $F_0(x) \leq \varrho$ ist.

Satz 3. *Für beliebiges $y \in M$ und einen beliebigen Ordnungskegel $P^* \in Q$ ist weder $\overline{R}(y, P^*)$ noch $\underline{R}(y, P^*)$ leer. Die erste dieser reellen Zahlenmengen ist nach unten, die zweite nach oben beschränkt.*

Beweis. 1. Da P^* L-vollständig ist, existiert $x_0 \in L$, so daß P^* x_0-vollständig ist. Nach Satz 1 existiert also ein reelles $\varepsilon > 0$, so daß $-\varepsilon y \in P^* - x_0$ ist. Das bedeutet $\frac{1}{\varepsilon} x_0 \in y + P^*$. Da aber $\frac{1}{\varepsilon} x_0 \in L$ ist, ist also $L \cap (y + P^*)$ und damit $\overline{R}(y, P^*)$ nicht leer.

2. Sei $\varrho \in \overline{R}(y, P^*)$. Dann existiert $x \in L$, so daß $x \in y + P^*$ und $\varrho \geq F_0(x)$ ist. Wegen Eigenschaft 2. von Q existiert nach Satz 1 ein reelles $\varepsilon > 0$, so daß $\varepsilon y \in P^* - x_0$ ist. Es ist also $x \in y + P^* \subset P^* - \frac{1}{\varepsilon} x_0$, d.h. (Eigenschaft 3). von Q) $F_0(x) \geq -\frac{1}{\varepsilon} F_0(x_0)$. Also ist $\overline{R}(y, P^*)$ nach unten beschränkt.

Die $\underline{R}(y, P^*)$ betreffenden Aussagen des Satzes werden analog bewiesen.

Satz 4. *Es gelten die Beziehungen:*

(1a) $\overline{R}(y_1 + y_2, P^*) \supset \overline{R}(y_1, P^*) + \overline{R}(y_2, P^*)$,

(1b) $\underline{R}(y_1 + y_2, P^*) \supset \underline{R}(y_1, P^*) + \underline{R}(y_2, P^*)$,

(2) $\overline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{R}(y, P^*)$, $\underline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{R}(y, P^*)$, *falls* $\alpha > 0$,

(3) $\overline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{R}(y, P^*)$, $\underline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{R}(y, P^*)$, *falls* $\alpha < 0$ *ist.*

Beweis. 1. Sei $\varrho_i \in \overline{R}(y_i, P^*)$ $(i = 1, 2)$. Dann existiert $x_i \in L \cap (y + P^*)$, so daß $F_0(x_i) \leq \varrho_i$ $(i = 1, 2)$ ist. Es folgt $x_1 + x_2 \in L \cap (y_1 + y_2 + P^*)$ und $F_0(x_1 + x_2) \leq \varrho_1 + \varrho_2$. Also ist $\varrho_1 + \varrho_2 \in \overline{R}(y_1 + y_2, P^*)$ und daraus folgt (1a). (1b) wird auf analoge Weise bewiesen.

2. Um die erste Beziehung von (2) zu beweisen, gehen wir aus von einer reellen Zahl $\varrho \in \overline{R}(y, P^*)$. Es existiert

$$x \in L \cap (y + P^*), \tag{4}$$

so daß $F_0(x) \leq \varrho$ ist. Das bedeutet aber, falls $\alpha > 0$ ist, $\alpha x \in L \cap (\alpha y + P^*)$ und $F_0(\alpha x) \leq \alpha \varrho$, d.h. $\alpha \varrho \in \overline{R}(\alpha y, P^*)$. Damit ist $\alpha \overline{R}(y, P^*) \subset \overline{R}(\alpha y, P^*)$.

[18]) Mit $\overset{*}{\geq}$ ist die durch den Ordnungskegel P^* in M definierte Teilordnung bezeichnet.

Ersetzt man hier α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so erhält man $\overline{R}(\alpha y, P^*) < \alpha R(y, P^*)$, womit die erste Beziehung von (2) bewiesen ist. Die zweite wird analog bewiesen.

3. Ist $\alpha < 0$, so folgt aus (4)

$$\alpha x \in L \cap (\alpha y - P^*) \quad \text{und} \quad F_0(\alpha x) \geq \alpha \varrho .$$

Also ist $\alpha \varrho \in \underline{R}(\alpha y, P^*)$. Das bedeutet, daß

$$\alpha \overline{R}(y, P^*) < \underline{R}(\alpha y, P^*) \tag{5}$$

ist. Ersetzt man wiederum α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so folgt

$$\alpha \underline{R}(y, P^*) > \overline{R}(\alpha y, P^*) . \tag{6}$$

Auf entsprechende Weise beweist man die Beziehungen, die aus (5) und (6) durch Vertauschung der oberen Querstriche mit unteren (und umgekehrt) hervorgehen, und damit (3).

Definition 5. *Für jedes $y \in M$ und jeden Ordnungskegel $P^* \in \mathfrak{Q}$ setzen wir*

$$\overline{p}(y, P^*) = \inf \overline{R}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(y, P^*) = \sup \underline{R}(y, P^*) .$$

Nach Satz 3 existieren diese Größen.

Satz 5. *Es gelten die Beziehungen*

$$\overline{p}(y_1 + y_2, P^*) \leq \overline{p}(y_1, P^*) + \overline{p}(y_2, P^*),$$
$$\underline{p}(y_1 + y_2, P^*) \geq \underline{p}(y_1, P^*) + \underline{p}(y_2, P^*),$$
$$\overline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{p}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{p}(y, P^*), \quad \textit{falls } \alpha > 0 \textit{ ist},$$
$$\overline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{p}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{p}(y, P^*), \quad \textit{falls } \alpha < 0 \textit{ ist}.$$

Insbesondere ist also $\overline{p}(y, P^*) = -\underline{p}(-y, P^*)$ und $\underline{p}(y, P^*) = -\overline{p}(-y, P^*)$

Beweis. Satz 4 und Definition 5.

Satz 6. *Es ist $\overline{p}(0, P^*) = \underline{p}(0, P^*) = 0$ für alle $P^* \in \mathfrak{Q}$.*

Beweis. Wegen $0 \in L \cap (0 + P^*)$ ist $0 = F_0(0) \in \overline{R}(0, P^*)$, d.h. $\overline{p}(0, P^*) \leq 0$.

Ist anderseits $\varrho \in \overline{R}(0, P^*)$, so existiert $x \in L \cap (0 + P^*)$, so daß $F_0(x) \leq \varrho$ ist. Nach Eigenschaft 3. von $\mathfrak{Q}$ ist dann $F_0(x) \geq 0$, also auch $\varrho \geq 0$. Somit ist $\overline{p}(0, P^*) \geq 0$ und die $\overline{p}$ betreffende Behauptung ist bewiesen. $\underline{p}(0, P^*) = 0$ wird auf analoge Weise nachgewiesen.

Satz 7. *$\overline{p}(y, P^*)$ und $\underline{p}(y, P^*)$ sind für jedes $P^* \in \mathfrak{Q}$ monotone Funktionen auf M; d.h. es ist $\overline{p}(y_1, P^*) \geq \overline{p}(y_2, P^*)$ und $\underline{p}(y_1, P^*) \geq \underline{p}(y_2, P^*)$, falls $y_1 \geq y_2$ ist.*

Beweis. Aus $y_1 \geq y_2$ folgt wegen $P^* > P$, daß $y_1 + P^* < y_2 + P^*$ ist. Also ist auch $L \cap (y_1 + P^*) < L \cap (y_2 + P^*)$ und damit $\overline{R}(y_1, P^*) < R(y_2, P^*)$, woraus die $\overline{p}$ betreffende Behauptung unmittelbar folgt. Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 8. *Für beliebige $y \in M$ und $P^* \in \mathfrak{Q}$ ist $\overline{p}(y, P^*) \geq \underline{p}(y, P^*)$.*

Beweis. Mit Hilfe der Sätze 5 und 6 folgt

$$\bar{p}(y, P^*) + \bar{p}(-y, P^*) \geq \bar{p}(0, P^*) = 0,$$

also

$$\bar{p}(y, P^*) \geq -\bar{p}(-y, P^*) = \underline{p}(y, P^*).$$

Satz 9. *Ist $y \in L$, so gilt bei beliebigem $P^* \in Q$: $\bar{p}(y, P^*) = \underline{p}(y, P^*) = F_0(y)$.*

Beweis. Wegen $0 \in P^*$ ist $y \in L \cap (y \pm P^*)$, d.h. $F_0(y) \in \overline{R}(y, P^*)$ und $F_0(y) \in \underline{R}(y, P^*)$. Also ist $\bar{p}(y, P^*) \leq F_0(y)$ und $\underline{p}(y, P^*) \geq F_0(y)$. Daraus und aus Satz 8 folgt die Behauptung.

Satz 10. *Jede M-monotone Linearform auf L kann zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden.*

Beweis. Aus den Sätzen 5 und 9 folgt mit Hilfe eines Satzes von BANACH[19]), daß für jedes $P^* \in Q$ die Linearform F_0 auf L zu einer Linearform F auf M fortgesetzt werden kann, so daß für alle $y \in M$

$$F(y) \leq \bar{p}(y, P^*) \tag{7}$$

ist. Es bleibt zu zeigen, daß F monoton ist. Nun folgt aus (7) mit Hilfe von Satz 5: $F(y) = -F(-y) \geq -\bar{p}(-y, P^*) = \underline{p}(y, P^*)$ und daraus mit Hilfe der Sätze 6 und 7 für $y \geq 0$: $F(y) \geq \underline{p}(y, P^*) \geq \underline{p}(0, P^*) = 0$.

Satz 11. *Ist $P^* \in Q$, $y_0 \in M$ und $\underline{p}(y_0, P^*) \leq \eta \leq \bar{p}(y_0, P^*)$, so existiert eine monotone und lineare Fortsetzung $\bar{F}$ von F_0 auf M, so daß $F(y_0) = \eta$ ist.*

Beweis. a) Auf dem durch L und y_0 erzeugten Unterraum $\{L, y_0\} \subset M$ ist durch $F_1(x + \tau y_0) = F_0(x) + \tau\eta$ $(x \in L)$ eine Linearform F_1 definiert, von der wir vorerst beweisen, daß sie in bezug auf die durch den Ordnungskegel P^* bestimmte Teilordnung auf M monoton ist. Dazu ist für $\tau \neq 0$ zu zeigen, daß

$$\text{aus} \quad x + \tau y_0 \in P^* \quad \text{folgt} \quad F_0(x) + \tau\eta \geq 0. \tag{8}$$

Die Voraussetzung von (8) bedeutet aber $x \in L \cap (-\tau y_0 + P^*)$, also

$$F_0(x) \in \overline{R}(-\tau y_0, P^*)$$

und somit $F_0(x) \geq \bar{p}(-\tau y_0, P^*)$. Sei nun

aa) $\tau > 0$. Nach Satz 5 folgt $F_0(x) \geq -\tau \underline{p}(y_0, P^*) \geq -\tau\eta$, also (8).

bb) $\tau < 0$. Es folgt $F_0(x) \geq -\tau \bar{p}(y_0, P^*) \geq -\tau\eta$, also wieder (8).

b) Ich behaupte nun weiter, daß F_1 auf $\{L, y_0\}$ M-monoton ist.

Da P^* L-vollständig ist (Eigenschaft 2. von Q), existieren nach Definition 2 ein Element $x_0 \in L$ und eine vollständige konvexe Menge $K \subset M$, so daß $x_0 + K \subset P^*$ ist. Nach Definition 3 genügt es nun zu zeigen, daß F_1 für jedes $z \in M$ auf $\{L, y_0\} \cap (z + x_0 + K + P)$ nach unten beschränkt ist.

Sei also $x + \tau y_0 \in z + x_0 + K + P \subset z + P^*$. Nach Satz 1 existiert eine (von x und τ unabhängige) reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $\varepsilon z \in P^* - x_0$ ist. Es folgt $x + \tau y_0 \in P^* - \frac{1}{\varepsilon} x_0$, also nach a) $F_1(x + \tau y_0) \geq -\frac{1}{\varepsilon} F_0(x_0)$.

[19]) [1], S. 27, Théorème 1.

c) Nach Satz 10 kann F_1 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden.

Definition 6. *Für jedes $y \in M$ setzen wir (sofern diese Größen existieren):*

$$\overline{p}(y) = \sup \overline{p}(y, P^*), \quad \underline{p}(y) = \inf \underline{p}(y, P^*),$$

wo sich die Bildung des Infimums und des Supremums auf alle $P^* \in Q$ bezieht.

Folgende Definition wäre gleichbedeutend mit der vorhergehenden:

$$\overline{p}(y) = \inf \bigcap_{P^*} \overline{R}(y, P^*) = \inf \bigcap_{P^*} [F_0(L \cap (y + P^*)) + P]$$

$$\underline{p}(y) = \sup \bigcap_{P^*} \underline{R}(y, P^*) = \sup \bigcap_{P^*} [F_0(L \cap (y - P^*)) - P],$$

wo sich wiederum die Bildung der Durchschnitte auf alle $P^* \in Q$ bezieht.

Satz 12. *Die Definitionsbereiche $\overline{C}$ und $\underline{C}$ von $\overline{p}(y)$ und $\underline{p}(y)$ sind konvexe Kegel und es ist $\overline{C} = -\underline{C}$.*

Beweis. Nach Satz 4 ist, falls $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ sind,

$$\bigcap_{P^*} \overline{R}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, P^*) > \alpha_1 \bigcap_{P^*} \overline{R}(y_1, P^*) + \alpha_2 \bigcap_{P^*} \overline{R}(y_2, P^*)$$

und

$$\bigcap_{P^*} \overline{R}(-y, P^*) = -\bigcap_{P^*} \underline{R}(y, P^*).$$

Schließlich ist $0 \in \overline{C}$ und $0 \in \underline{C}$ nach Satz 6.

Satz 13. *Wenn $\overline{p}(y_1)$ und $\overline{p}(y_2)$ existieren, so ist*

$$\overline{p}(y_1 + y_2) \leq \overline{p}(y_1) + \overline{p}(y_2).$$

Existieren $\underline{p}(y_1)$ und $\underline{p}(y_2)$, so ist $\underline{p}(y_1 + y_2) \geq \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2)$.

Der *Beweis* ist im Beweis zu Satz 12 (für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) enthalten.

Satz 14. *Existiert $\overline{p}(y)$ bzw. $\underline{p}(y)$ und ist*

$\alpha > 0$, so existiert auch $\overline{p}(\alpha y)$ bzw. $\underline{p}(\alpha y)$ und es ist

$$\overline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y), \quad \underline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y),$$

$\alpha < 0$, so existiert auch $\underline{p}(\alpha y)$ bzw. $\overline{p}(\alpha y)$ und es ist

$$\underline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y), \quad \overline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y).$$

Beweis. Satz 4 ur Definition 6.

Satz 15. $\overline{p}(0) = \underline{p}(0) = 0$.

Der *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 6.

Satz 16. *Es ist $\overline{p}(y) \geq \underline{p}(y)$, falls beide Größen existieren.*

Beweis. Satz 8.

Satz 17. *Ist $y \in L$, so ist $\overline{p}(y) = \underline{p}(y) = F_0(y)$.*

Beweis. Satz 9.

Hauptsatz 18. *Ist F eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf M, so ist für alle $y \in M$*

$$\underline{p}(y) \leq F(y) \leq \overline{p}(y),$$

soweit die auftretenden Größen existieren.

Beweis. Da F auf M M-monoton ist[20]), existiert nach Satz 2 ein Ordnungskegel $P_0^* \in Q$, so daß F in bezug auf die von P_0^* erzeugte Teilordnung in M monoton ist. Aus $x \in L \frown (y + P_0^*)$ (bzw. $x \in L \frown (y - P^*)$) folgt dann $F_0(x) = F(x) \geq F(y)$ (bzw. $F_0(x) = F(x) \leq F(y)$). Also ist $\underline{p}(y, P_0^*) \leq F(y) \leq \overline{p}(y, P_0^*)$ und daraus folgt Satz 18 unmittelbar.

Hauptsatz 19. *Sind für ein Element $y_0 \in M$ und eine reelle Zahl η die beiden Bedingungen*

$$\underline{p}(y_0) < \eta < \overline{p}(y_0) \tag{9}$$

erfüllt, soweit die auftretenden Größen existieren, so gibt es eine monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M, für die $F(y_0) = \eta$ ist.

Beweis. Aus (9) und Definition 6 folgt, daß ein Ordnungskegel $P_0^* \in Q$ existiert, so daß $\underline{p}(y_0, P_0^*) \leq \eta \leq \overline{p}(y_0, P_0^*)$ ist. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 11.

Hauptsatz 20. *Die Menge N aller Elemente $y \in M$, für die $\overline{p}(y)$ und $\underline{p}(y)$ existieren und einander gleich sind, ist ein Zwischenraum von L und M. Auf N ist durch $F(y) = \underline{p}(y)$ eine monotone Linearform definiert, die Fortsetzung von F_0 ist. Für ein Element $z \in M$ ist dann und nur dann $F_1(z) = F_2(z)$ für zwei beliebige lineare und monotone Fortsetzungen F_1 und F_2 von F_0 auf M, wenn $z \in N$ ist*[21]).

Beweis. 1. Aus $\overline{p}(y_i) = \underline{p}(y_i)$ und $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ folgt nach den Sätzen 13 bis 16, daß $\overline{p}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \underline{p}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ ist. Ferner folgt nach Satz 14 aus $\overline{p}(y) = \underline{p}(y)$: $\underline{p}(-y) = -\overline{p}(y) = -\underline{p}(y) = \overline{p}(-y)$. Also ist N ein Unterraum von M. Nach Satz 17 ist außerdem $L \subset N$.

2. Sind $y_1, y_2 \in N$, so ist nach Satz 13

$$\underline{p}(y_1 + y_2) \geq \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2) = \overline{p}(y_1) + \overline{p}(y_2) \geq \overline{p}(y_1 + y_2).$$

Nach Satz 16 ist also $\underline{p}(y_1 + y_2) = \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2)$.

Ist ferner $y \in N$, so gilt nach Satz 14 für $\alpha > 0$: $\underline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y)$ und für $\alpha < 0$: $\underline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y) = \alpha \underline{p}(y)$; schließlich ist $\underline{p}(0) = 0$ (Satz 15).

Damit ist gezeigt, daß $F(y) = \underline{p}(y)$ eine Linearform auf N ist. Daß F Fortsetzung von F_0 ist, folgt aus Satz 17 und schließlich folgt die Monotonie von F aus Satz 7 und Definition 6.

3. Die letzte Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus den Sätzen 18 und 19.

3. Teil: Eindeutig bewertete Elemente

Es sei $\{L, y\}$ ein teilgeordneter Vektorraum, der aus seiner Hyperebene L durch Adjunktion des Elementes y hervorgeht. F_0 sei eine monotone Linearform auf L. Wir wollen vorerst ein Kriterium dafür finden, daß F_0 auf genau eine Weise zu einer monotonen Linearform auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann,

[20]) [8], Satz 2.

[21]) Für den speziellen Fall, daß M e-beschränkt ist, wurde dieser Satz schon von KIRSCH bewiesen. Vgl. dazu [3], § 6 (S. 355ff.).

oder, wie wir sagen werden (Definition 9), daß y über (L, F_0) eindeutig bewertet ist.

P bedeutet im folgenden den Ordnungskegel von $\{L, y\}$.

Definition 7. *Wir setzen*

$$\overline{S}(y) = F_0\big(L \cap (y + P)\big) + \mathrm{P}$$
$$\underline{S}(y) = F_0\big(L \cap (y - P)\big) - \mathrm{P}$$

(P bedeutet wieder die Menge aller reellen Zahlen ≥ 0). $\overline{S}(y)$ bzw. $\underline{S}(y)$ kann leer sein, nämlich dann, wenn $L \cap (y+P)$ bzw. $\big(L \cap (y - P)\big)$ leer ist.

Definition 8. *Wir setzen*

$$\overline{q}(y) = \inf \overline{S}(y), \quad \underline{q}(y) = \sup \underline{S}(y),$$

falls diese Größen existieren.

[Beispielsweise existiert $\overline{q}(y)$, wenn $\overline{S}(y)$ nicht leer und nach unten beschränkt ist.]

Satz 21. *Wenn F_0 zu einer monotonen Linearform F auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann, so ist $\underline{q}(y) \leq F(y) \leq \overline{q}(y)$, soweit diese Größen existieren.*

Beweis. Aus $x \in L \cap (y+P)$ folgt $F_0(x) = F(x) \geq F(y)$. Also ist $F(y) \leq \varrho$ für jedes $\varrho \in \overline{S}(y)$, d.h. $F(y) \leq \overline{q}(y)$. Die $\underline{q}(y)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 22. *η sei eine reelle Zahl, für die $\underline{q}(y) \leq \eta \leq \overline{q}(y)$ ist, soweit die auftretenden Größen existieren. Dann ist $F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta$ $(x \in L)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $\{L, y\}$.*

Beweis. Durch $F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta$ ist auf $\{L, y\}$ eine Linearform definiert, welche F_0 fortsetzt. Es bleibt zu beweisen, daß aus $x + \tau y \geq 0$ folgt $F(x + \tau y) \geq 0$. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:

a) $\tau = 0$. In diesem Fall ist nichts zu beweisen, da F_0 auf L monoton ist.

b) $\tau > 0$. Es folgt $-\frac{1}{\tau} x \leq y$, d.h. $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \in \underline{S}(y)$, also $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \leq \underline{q}(y) \leq \eta$ und $F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta \geq 0$.

c) $\tau < 0$. Es folgt $-\frac{1}{\tau} x \geq y$, d.h. $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \in \overline{S}(y)$, also $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \geq \overline{q}(y) \geq \eta$ und $F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta \geq 0$.

Definition 9. *Wir nennen y über (L, F_0) eindeutig bewertet, wenn F_0 auf genau eine Weise zu einer monotonen Linearform auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann.*

Satz 23. *Dann und nur dann ist y über (L, F_0) eindeutig bewertet, wenn $\overline{q}(y)$ und $\underline{q}(y)$ beide existieren und einander gleich sind*[22]).

Beweis. Sätze 21 und 22.

[22]) Vgl. dazu den in [5], Abschnitt V mit anderen Mitteln behandelten Spezialfall der absolut integrierbaren Funktionen.

Das weitere Ziel besteht nun im Nachweis, daß die über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente, die in einem Oberraum $M \supset L$ enthalten sind, einen Zwischenraum von L und M bilden, auf dem (wie auch auf jedem in ihm enthaltenen Zwischenraum) genau eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 existiert. Es bedeutet also im folgenden M einen teilgeordneten Vektorraum, L einen Unterraum von M und F_0 eine monotone Linearform auf L. Für jedes Element $y \in M$ kann dann der von L und y erzeugte Vektorraum $\{L, y\} \subset M$ gebildet werden, in welchem man die bisher gemachten Überlegungen des dritten Teiles durchführen kann. Dabei kann durchwegs der Ordnungskegel von $\{L, y\}$ durch denjenigen von M ersetzt werden. Der Letztere ist deshalb im folgenden mit P bezeichnet.

Satz 24. *Für beliebige* $y_1, y_2 \in M$ *ist*

$$\overline{S}(y_1 + y_2) \supset \overline{S}(y_1) + \overline{S}(y_2) \quad \textit{und} \quad \underline{S}(y_1 + y_2) \supset \underline{S}(y_1) + \underline{S}(y_2).$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der selbstverständlichen Beziehung $L \cap (y_1 + y_2 + P) \supset \big(L \cap (y_1 + P)\big) + \big(L \cap (y_2 + P)\big)$, die zweite wird analog bewiesen.

Satz 25. *Für* $\alpha > 0$ *ist* $\overline{S}(\alpha y) = \alpha \overline{S}(y)$ *und* $\underline{S}(\alpha y) = \alpha \underline{S}(y)$. *Für* $\alpha < 0$ *ist* $\overline{S}(\alpha y) = \alpha \underline{S}(y)$ *und* $\underline{S}(\alpha y) = \alpha \overline{S}(y)$.

Beweis. Um die erste der Beziehungen zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für $\alpha > 0$ $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) = L \cap (\alpha y + P)$ ist. Nun folgt aus $x \in L \cap (y + P)$ ohne weiteres $\alpha x \in L \cap (\alpha y + P)$, d.h. es ist $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) \subset L \cap (\alpha y + P)$. Ersetzt man hier α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so folgt

$$L \cap (\alpha y + P) \subset \alpha\big(L \cap (y + P)\big),$$

womit die erste Beziehung des Satzes bewiesen ist. Der Nachweis für die zweite wird analog erbracht.

Ist nun $\alpha < 0$, so folgt aus $x \in L \cap (y + P)$, daß $\alpha x \in L \cap (\alpha y - P)$ ist. Also ist $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) \subset L \cap (\alpha y - P)$. Ebenso folgt $\alpha\big(L \cap (y - P)\big) \subset L \cap (\alpha y + P)$. Ersetzt man wieder α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so erhält man

$$L \cap (\alpha y + P) \subset \alpha\big(L \cap (y - P)\big)$$

und

$$L \cap (\alpha y - P) \subset \alpha\big(L \cap (y + P)\big).$$

Daraus folgt nun

$$L \cap (\alpha y \pm P) = \alpha\big(L \cap (y \mp P)\big)$$

und damit die beiden letzten Beziehungen des Satzes.

Satz 26. *Es ist* $\overline{S}(0) = \mathrm{P}$ *und* $\underline{S}(0) = -\mathrm{P}$.

Beweis. Aus $x \in L \cap (0 + P)$ folgt $F_0(x) \geq 0$, also ist $\overline{S}(0) \subset \mathrm{P}$. Anderseits ist $0 \in L \cap (0 + P)$, d.h. $0 = F_0(0) \in \overline{S}(0)$, also $\overline{S}(0) \supset \mathrm{P}$. Die $\underline{S}(0)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 27. *Aus* $\bar{\varrho} \in \overline{S}(y)$, $\varrho \in \underline{S}(y)$ *folgt* $\bar{\varrho} \geq \varrho$.

Beweis. Wegen der Monotonie von F_0 genügt es, zu zeigen, daß aus $\bar{x} \in L \cap (y + P)$, $\underline{x} \in L \cap (y - P)$ folgt $\bar{x} \geq \underline{x}$. Das ist aber trivial.

Satz 28. *Aus* $y_1 \geq y_2$ *folgt* $\overline{S}(y_1) < \overline{S}(y_2)$ *und* $\underline{S}(y_1) > \underline{S}(y_2)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $L \cap (y_1 + P) < L \cap (y_2 + P)$ und $L \cap (y_1 - P) > L \cap (y_2 - P)$, woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Satz 29. *Wenn* $\overline{q}(y_1)$, $\overline{q}(y_2)$ *und* $\overline{q}(y_1 + y_2)$ *existieren, so ist*

$$\overline{q}(y_1 + y_2) \leq \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2).$$

Im gleichen Sinne ist

$$\underline{q}(y_1 + y_2) \geq \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2).$$

Beweis. Satz 24.

Satz 30. *Wenn* $\overline{q}(y)$ *existiert und*

$\alpha > 0$ *ist, so existiert auch* $\overline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \overline{q}(y)$,

$\alpha < 0$ *ist, so existiert auch* $\underline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\underline{q}(\alpha y) = \alpha \overline{q}(y)$.

Wenn $\underline{q}(y)$ *existiert und*

$\alpha > 0$ *ist, so existiert auch* $\underline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\underline{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y)$,

$\alpha < 0$ *ist, so existiert auch* $\overline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y)$.

Beweis. Satz 25.

Satz 31. *Es ist* $\overline{q}(0) = \underline{q}(0) = 0$.

Beweis. Satz 26.

Satz 32. *Falls* $\overline{q}(y)$ *und* $\underline{q}(y)$ *existieren, so ist* $\overline{q}(y) \geq \underline{q}(y)$.

Beweis. Satz 27.

Satz 33. $\overline{q}(y)$ *und* $\underline{q}(y)$ *sind monotone Funktionen; d.h. aus* $y_1 \geq y_2$ *folgt* $\overline{q}(y_1) \geq \overline{q}(y_2)$ *und* $\underline{q}(y_1) \geq \underline{q}(y_2)$, *soweit diese Größen existieren.*

Beweis. Satz 28.

Satz 34. *Für* $y \in L$ *ist* $\overline{q}(y) = \underline{q}(y) = F_0(y)$.

Beweis. Ist $x \in L \cap (y + P)$, so folgt wegen der Monotonie von F_0: $F_0(x) \geq F_0(y)$; also ist $\overline{q}(y) \geq F_0(y)$. Anderseits ist $y \in L \cap (y + P)$, also $\overline{q}(y) \leq F_0(y)$. Die $\underline{q}(y)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Hauptsatz 35. *Die Elemente* $y \in M$, *die über* (L, F_0) *eindeutig bewertet sind, bilden einen Zwischenraum* $L^x(F_0)$ *von* L *und* M.

Beweis. Wir bezeichnen die Menge der in M enthaltenen, über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente mit N und zeigen:

1. Aus $y_1, y_2 \in N$ folgt $y_1 + y_2 \in N$. Da nämlich nach Satz 23 $\overline{q}(y_i)$ und $\underline{q}(y_i)$ $(i = 1, 2)$ existieren, ist keine der Mengen $\overline{S}(y_i)$ und $\underline{S}(y_i)$ $(i = 1, 2)$ leer. Also sind nach Satz 24 auch $\overline{S}(y_1 + y_2)$ und $\underline{S}(y_1 + y_2)$ nicht leer. Nach Satz 27 existieren $\overline{q}(y_1 + y_2)$ und $\underline{q}(y_1 + y_2)$ und es ist $\overline{q}(y_1 + y_2) \geq \underline{q}(y_1 + y_2)$. Anderseits ist auf Grund der Sätze 23 und 29

$$\overline{q}(y_1 + y_2) \leq \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2) = \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2) \leq \underline{q}(y_1 + y_2).$$

Also ist $\overline{q}(y_1 + y_2) = \underline{q}(y_1 + y_2)$ d.h. $y_1 + y_2 \in N$ nach Satz 23.

2. Aus $y \in N$ folgt $\alpha y \in N$ für reelles α. Ist nämlich $y \in N$, so ist (Satz 23) $\bar{q}(y) = \underline{q}(y)$. Daraus folgt mit Hilfe von Satz 30 $\bar{q}(\alpha y) = \underline{q}(\alpha y)$, d.h. $\alpha y \in N$.

Daß schließlich $N > L$ ist, folgt aus Satz 34.

Definition 10. *Den Zwischenraum $L^{\times}(F_0)$ der über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente nennen wir eindeutig bewertete Hülle von (L, F_0) in M.*

Hauptsatz 36. *Auf der eindeutig bewerteten Hülle $L^{\times}(F_0)$ von (L, F_0) in M ist $F(y) = \bar{q}(y) = \underline{q}(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0* [23].

Beweis. Daß F eine monotone Fortsetzung von F_0 auf $L^{\times}(F_0)$ ist, folgt aus den Sätzen 23, 33 und 34. Die Linearität wird wie folgt bewiesen:

a) Sind $y_1, y_2 \in L^{\times}(F_0)$, so ist (Satz 29)

$$\bar{q}(y_1 + y_2) \leq \bar{q}(y_1) + \bar{q}(y_2) = \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2) \leq \underline{q}(y_1 + y_2).$$

Da aber nach Satz 35 $\bar{q}(y_1 + y_2) = \underline{q}(y_1 + y_2)$ ist, folgt

$$\bar{q}(y_1 + y_2) = \bar{q}(y_1) + \bar{q}(y_2).$$

b) Ist $y \in L^{\times}(F_0)$ und

$\alpha > 0$, so ist $\bar{q}(\alpha y) = \alpha \bar{q}(y)$,

$\alpha < 0$, so ist $\bar{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y) = \alpha \bar{q}(y)$ (Satz 30).

Satz 37. *Der Übergang von L zu $L^{\times}(F_0)$ ist eine Abschließungsoperation. Genauer:*

1. $L^{\times}(F_0) > L$.

2. *Ist $L_1 < L_2 < M$ und sind F_1, F_2 monotone Linearformen auf L_1, L_2, wobei F_2 Fortsetzung von F_1 ist, so ist $L_1^{\times}(F_1) < L_2^{\times}(F_2)$.*

3. $(L^{\times}(F_0))^{\times}(F) = L^{\times}(F_0)$. *Dabei bedeutet F die (eindeutig bestimmte) monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $L^{\times}(F_0)$.*

Beweis. 1. ist schon in Satz 35 enthalten.

2. Wir bezeichnen mit $\bar{S}_i, \underline{S}_i, \bar{q}_i, \underline{q}_i$ die gemäß den Definitionen 7 und 8 in bezug auf (L_i, F_i) $(i = 1, 2)$ gebildeten Mengen bzw. Zahlen. Aus $L_1 < L_2$ folgt nun für jedes $y \in M$, daß $L_1 \cap (y + P) < L_2 \cap (y + P)$ ist. Also ist auch $\bar{S}_1(y) < \bar{S}_2(y)$ und ebenso $\underline{S}_1(y) < \underline{S}_2(y)$. Da nun, falls $y \in L_1^{\times}(F_1)$ ist, nach Satz 23 $\bar{q}_1(y) = \underline{q}_1(y)$, d.h. $\inf \bar{S}_1(y) = \sup \underline{S}_1(y)$ ist, ist erst recht $\inf \bar{S}_2(y) \leq \sup \underline{S}_2(y)$. Daraus und aus Satz 27 folgt aber $\inf \bar{S}_2(y) = \sup \underline{S}_2(y)$, also $\bar{q}_2(y) = \underline{q}_2(y)$, d.h. $y \in L_2^{\times}(F_2)$.

3. Wir schreiben kurz $L^{\times}$ und $L^{\times\times}$ für die in 3. auftretenden Räume, deren Gleichheit zu beweisen ist. Nach 2. ist $L^{\times\times} > L^{\times}$, da nach 1. $L^{\times} > L$ ist. Es bleibt also nachzuweisen, daß auch $L^{\times} > L^{\times\times}$ ist. Sei deshalb $z \in L^{\times\times}$, d.h.

$$\bar{q}^{\times}(z) = \underline{q}^{\times}(z). \tag{10}$$

[23] Vgl. dazu [3], § 6 und [5], Abschnitt V.

[Mit $\bar{q}^x$ bzw. $\underline{q}^x$ bezeichnen wir die gemäß Definition 8 auf Grund von (L^x, F) gebildeten Größen.] Wegen

$$\bar{q}^x(z) = \inf F\left(L^x \cap (z + P)\right) + \mathrm{P}$$

und

$$\underline{q}^x(z) = \sup F\left(L^x \cap (z - P)\right) - \mathrm{P}$$

existieren zu jedem reellen $\varepsilon > 0$

(11a) $\bar{y} \in L^x \cap (z + P)$, so daß $\bar{q}(\bar{y}) = F(\bar{y}) < \bar{q}^x(z) + \varepsilon$

ist, und

(11b) $\underline{y} \in L^x \cap (z - P)$, so daß $\underline{q}(\underline{y}) = F(\underline{y}) > \underline{q}^x(z) - \varepsilon$

ist. Auf Grund der Definition von $\bar{q}(\bar{y})$ und $\underline{q}(\underline{y})$ existieren sodann

(12a) $\bar{x} \in L \cap (\bar{y} + P)$, so daß $F_0(\bar{x}) < \bar{q}(\bar{y}) + \varepsilon$

ist, und

(12b) $\underline{x} \in L \cap (\underline{y} - P)$, so daß $F_0(\underline{x}) > \underline{q}(\underline{y}) - \varepsilon$

ist. Aus (11) und (12) folgt

$$F_0(\bar{x}) < \bar{q}^x(z) + 2\varepsilon \quad \text{und} \quad F_0(\underline{x}) > \underline{q}^x(z) - 2\varepsilon,$$

also wegen (10)

$$F_0(\bar{x}) - F_0(\underline{x}) < 4\varepsilon.$$

Da ferner wegen (11) und (12) $\bar{x} \in L \cap (z + P)$ und $\underline{x} \in L \cap (z - P)$ ist, ist $\bar{q}(z) \leq F_0(\bar{x})$ und $\underline{q}(z) \geq F_0(\underline{x})$ und somit $\bar{q}(z) - \underline{q}(z) < 4\varepsilon$. Daraus und aus Satz 27 folgt (da ja ε eine beliebige positive Zahl war) $\bar{q}(z) = \underline{q}(z)$, d.h. $z \in L^x(F_0)$, w. z. b. w.

Literatur

[1] BANACH, ST.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] HADWIGER, H., u. A. KIRSCH: Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit. Portugaliae Mathematica **11**, 57—67 (1952). — [3] KIRSCH, A.: Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen. Math. Annalen **124**, 343—363 (1952). — [4] HADWIGER, H.: Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration. Archiv der Math. **5**, 115—122 (1954). — [5] HADWIGER, H., u. W. NEF: Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Math. Z. **60**, 305—319 (1954). — [6] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Comm. Math. Helv. **28**, 162—172 (1954). — [7] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt. Math. Annalen **128**, 204—227 (1954). — [8] NEF, W.: Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen. Mh. Math. **60**, 190—197 (1956). — [9] NEF, W.: Invariante Linearformen. Erscheint demnächst in den Math. Nachrichten. — [10] HADWIGER, H.: Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum. Comm. Math. Helv. **28**, 119—148 (1954).

Bern (Schweiz), Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 20. März 1956)

MORGENSTERN, D.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 143—146 (1956)

Eine Verschärfung der Ostrowski'schen Determinantenabschätzung

Von
DIETRICH MORGENSTERN*)

A. OSTROWSKI[1]) hat bewiesen, daß für die Determinante A einer n-reihigen quadratischen Matrix $\mathfrak{A}=(a_{\mu\nu})$, deren Elemente die Ungleichungen

$$(1) \qquad s_\mu = |a_{\mu\mu}| - \sum_{\nu=1}^{n}{}' |a_{\mu\nu}| \geq 0 \qquad \left(\mu = 1, \ldots, n;\ \sum' = \sum_{\nu \neq \mu}\right)$$

erfüllen, die Abschätzung

$$(2) \qquad |A| \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n$$

gilt; es ist also insbesondere $A \neq 0$, wenn alle $s_\mu > 0$ sind[2]). In einer späteren Arbeit hat OSTROWSKI[3]) die Abschätzung (2) wesentlich verschärft. In dieser Note geben wir eine andere Verschärfung der Ungleichung (2) für reelle Matrizen; die Methode ist von derjenigen von OSTROWSKI verschieden, in einem speziellen Fall aber schon von L. LÉVY[4]) benutzt worden, wie mir nachträglich bekannt wurde.

Eine erste Verschärfung von (2) ist, wie wir zeigen werden, die Ungleichung

$$(3) \qquad \begin{cases} |A| \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n + \\ \quad + \left\{ \sum_{\nu}{}' |a_{1\nu}|\, s_2 \ldots s_n + \sum_{\nu}{}' |a_{2\nu}|\, s_1 s_3 \ldots s_n + \cdots + \sum_{\nu}{}' |a_{n\nu}|\, s_1 \ldots s_{n-1} \right\}. \end{cases}$$

*) Herrn Prof. Dr. MAX MÜLLER in Tübingen danke ich für das Interesse, das er an der vorliegenden Untersuchung nahm. Ihm verdanke ich insbesondere die Literaturangaben.

[1]) OSTROWSKI, A.: Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminantes. Bull. Sci. mathématiques (2) **64**, 19—32 (1937).

[2]) Letzteres ergaben schon vorher Betrachtungen von S. GERSCHGORIN. Vgl. GERSCHGORIN, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Bull. Acad. sci. URSS (7), classe des sciences mathématiques et naturelles **1931**, 749—754. Seine weitergehende Behauptung, daß schon dann $A \neq 0$ ist, wenn wenigstens ein s_μ positiv ist, ist dagegen falsch, wie das Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

zeigt. Wenn aber etwa die Voraussetzung, daß alle $a_{\mu\nu}$ von Null verschieden sind, hinzutritt, ist GERSCHGORINS Beweis und Behauptung richtig.

[3]) OSTROWSKI, A.: Über die Determinanten mit überwiegendem Hauptglied. Commentarii mathematici Helvetici **10**, 69—96 (1937/38).

[4]) LÉVY, L.: Sur la probabilité de l'équilibre électrique. C. R. Acad. Sci. Paris **93**, 707—708 (1881).

Aus (3) ersieht man: Gilt in keiner der Ungleichungen (1) das Gleichheitszeichen, so kann in (2) nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn

$$\sum_{\nu}' |a_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

d.h. wenn $a_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ ist, also die Matrix $\mathfrak{A}$ Diagonalform hat. Wenn aber $\mathfrak{A}$ Diagonalform hat, so ist auch $|A| = s_1 \ldots s_n$. Daß diese Aussage über das Eintreten des Gleichheitszeichens in der Abschätzung (2) auch nur unter der schärferen Voraussetzung $s_1 \cdot s_2 \ldots s_n > 0$ gilt, zeigt schon die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

M. MÜLLER[5]) hat bewiesen: Die Determinante A ist genau dann von Null verschieden, wenn es eine n-reihige Matrix $\mathfrak{B}$ von Zahlen $b_{\mu\nu}$ gibt, die die n Ungleichungen

$$S_\mu = \Big|\sum_{\nu} a_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\Big| - \sum_{\nu}' \Big|\sum_{\lambda} a_{\mu\lambda} b_{\nu\lambda}\Big| > 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

befriedigen. Es gilt dann, wenn $B = \mathrm{Det}(b_{\mu\nu})$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$|A \cdot B| \geq S_1 \ldots S_n. \tag{4}$$

Aus der vorstehenden Bemerkung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2) folgt, daß in (4) nur dann das Gleichheitszeichen steht, wenn

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{D}$$

ist, wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix bedeutet[6]).

Eine Verallgemeinerung auf komplexe Matrizen in Richtung einer Aussage über den Realteil ihrer Determinanten ist nicht möglich, wie das Beispiel

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5-2i & 0 & 0 \\ 5-2i & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5-2i \\ 0 & 0 & 5-2i & 6 \end{pmatrix}; \qquad A = -175 + 600i$$

zeigt.

Satz. *Sind die Elemente $a_{\mu\nu}$ reell und die Ungleichungen*

$$s_\mu = a_{\mu\mu} - \sum_{\nu}' |a_{\mu\nu}| \geq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

erfüllt, so ist

$$\begin{cases} A \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n + \\ \quad + \left\{\sum_{\nu}' |a_{1\nu}|\, s_2 \ldots s_n + \sum_{\nu}' |a_{2\nu}|\, s_1 s_3 \ldots s_n + \cdots + \sum_{\nu}' |a_{n\nu}|\, s_1 \ldots s_{n-1}\right\}. \end{cases} \tag{6}$$

[5]) MÜLLER, M.: Ein Kriterium für das Nichtverschwinden von Determinanten. Math. Z. **51**, 291—293 (1948).

[6]) Die Frage, wann in (2) bzw. (4) das Gleichheitszeichen gilt, legte mir ERNST MOHR vor; sie gab den Anlaß zur vorliegenden Untersuchung.

Beweis. Im Falle $n=2$ ist mit Rücksicht auf (5)

$$A=\begin{vmatrix} s_1+|a_{12}| & a_{12} \\ a_{21} & s_2+|a_{21}| \end{vmatrix} = s_1\cdot s_2+\left(|a_{12}|\cdot s_2+|a_{21}|\, s_1\right)+\begin{vmatrix} |a_{12}| & a_{12} \\ a_{21} & |a_{21}| \end{vmatrix},$$

also, weil die letzte Determinante gleich

$$|a_{12}a_{21}|-a_{12}a_{21}\geq 0$$

ist,

$$A\geq s_1\cdot s_2+\left(|a_{12}|\cdot s_2+|a_{21}|\cdot s_1\right).$$

Für $n=2$ ist also (6) richtig.

Den Fall eines beliebigen $n>2$ behandeln wir nunmehr mittels vollständiger Induktion. Wir machen die

Induktionsvoraussetzung: Alle höchstens $n-1$-reihigen Determinanten, bei denen die Diagonalelemente die Elemente derselben Zeile in der durch die Ungleichung (5) beschriebenen Weise überwiegen, sind nicht negativ.

Drückt man die Elemente $a_{\mu\mu}$ gemäß (5) durch die s_μ und die übrigen Elemente derselben Zeile aus und wendet man den Summensatz an, so ergibt sich für A die Darstellung

$$(8)\qquad \begin{cases} A=s_1\dots s_n+ \\ +\left\{\sum_\nu{}'|a_{1\nu}|\, s_2\dots s_n+\sum_\nu{}'|a_{2\nu}|\, s_1 s_3\dots s_n+\dots+\sum_\nu{}'|a_{n\nu}|\, s_1\dots s_{n-1}\right\}+ \\ +F_2+\dots+F_n. \end{cases}$$

Darin ist für $\nu=2,\dots,n-1$

$$(9)\qquad F_\nu=\sum_{(q_1,\dots,q_{n-\nu})}\begin{vmatrix} \sum_\lambda{}'|a_{p_1\lambda}| & a_{p_2p_1} & \dots & a_{p_\nu p_1} \\ a_{p_1p_2} & \sum_\lambda{}'|a_{p_2\lambda}| & \dots & a_{p_\nu p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_1p_\nu} & a_{p_2p_\nu} & \dots & \sum_\lambda{}'|a_{p_\nu\lambda}| \end{vmatrix} s_{q_1}\dots s_{q_{n-\nu}},$$

wobei $(q_1,\dots,q_{n-\nu})$ eine Zusammenstellung von $n-\nu$ der Zahlen $1,2,\dots,n$ in ihrer natürlichen Reihenfolge, $(p_1,\dots,p_\nu)$ die Zusammenstellung der übrigen der Zahlen $1,2,\dots,n$ in ihrer natürlichen Reihenfolge bedeutet und die Summe über alle diese Zusammenstellungen $(q_1,\dots,q_{n-\nu})$ zu vollziehen ist. Ferner ist

$$(10)\qquad F_n=\begin{vmatrix} \sum_\lambda{}'|a_{1\lambda}| & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \sum_\lambda{}'|a_{2\lambda}| & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \sum_\lambda{}'|a_{n\lambda}| \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten höchstens $n-1$-ten Grades, die die Koeffizienten der homogenen Form $n-\nu$-ten Grades F_ν in den Größen $s_1,\dots,s_n$ sind, erfüllen

ersichtlich die Induktionsvoraussetzung und sind daher alle nicht-negativ. Also ist auch

$$F_\nu \geq 0 \qquad (\nu = 2, \ldots, n-1). \tag{11}$$

Die Determinante F_n läßt sich darstellen als eine Summe von n-reihigen Determinanten, in denen außerhalb der Hauptdiagonalen in jeder Zeile nur eine Stelle nicht mit 0 besetzt ist; das Element in der Hauptdiagonalen ist der absolute Betrag des Elementes derselben Zeile, das außerhalb der Hauptdiagonalen steht.

Wenn in einer solchen Determinante eine Spalte außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen hat, zerfällt die Determinante in das Produkt des Hauptdiagonalelementes dieser Spalte mit einer Determinante $(n-1)$-ten Grades, in der die Hauptdiagonalelemente mindestens so groß sind wie die Summe der Beträge der übrigen Elemente in ihrer Spalte; diese $(n-1)$-reihige Determinante ist also nach Induktionsvoraussetzung nicht negativ. Damit ist dann auch der betrachtete Summand der Summe F_n nicht negativ.

Wenn aber in einer solchen Determinante jede Spalte außer dem Hauptdiagonalelement noch weitere von Null verschiedene Elemente enthält, enthält jede Spalte deren genau eines; denn es sind insgesamt nur n von Null verschiedene und nicht in der Hauptdiagonalen stehende Elemente vorhanden. Durch gleichartige Vertauschung von Zeilen und Spalten kann man eine solche Determinante als Produkt von Determinanten der Gestalt

$$\begin{vmatrix} |b_1| & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |b_2| & b_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & |b_{\varkappa-1}| & b_{\varkappa-1} & \\ b_\varkappa & 0 & \ldots & 0 & |b_\varkappa| \end{vmatrix}$$

darstellen[7]), woraus man entnimmt, daß ihr Wert ein Produkt von Faktoren

$$|b_1 \ldots b_\varkappa| - (-1)^\varkappa b_1 \ldots b_\varkappa \geq 0,$$

also selbst ≥ 0 ist[8]).

Hiernach ist auch $F_n \geq 0$. Insgesamt ergibt sich aus (8) und den Ungleichungen

$$F_\mu \geq 0 \qquad (\mu = 2, \ldots, n) \tag{12}$$

die Ungleichung (6) und schließlich die Allgemeingültigkeit der Behauptung.

Den bisherigen Betrachtungen entnimmt man zugleich folgenden

Zusatz. *Die Abschätzungen* $A \geq s_1 s_2 \ldots s_n$ *und* (6) *sind erstes und zweites Glied einer Kette von Abschätzungen für A nach unten, von denen jede folgende mindestens so scharf ist wie die vorangehende und deren letzte die Identität* (8) *ist. Man erhält diese Abschätzungen, indem man in* (8) *die rechte Seite nach irgendeinem* F_μ *abbricht und* $\geq$ *statt* $=$ *schreibt.*

[7]) Vgl. OSTROWSKI, A. in [3]) a. a. O., S. 92.

[8]) Wegen dieses Schlusses ist die Ausdehnung auf komplexe Zahlen nicht möglich!

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 28. April 1956)

SCHAEFER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 147—163 (1956)

Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen *)

Von
HELMUT SCHAEFER

Einleitung

Eben als die klassische Theorie linearer Fredholmscher Integralgleichungen durch die berühmte Rießsche Arbeit des Jahres 1918 in den natürlichen Rahmen linearer topologischer Räume gestellt worden war, machte NOETHER [17] auf eine neue Klasse linearer Integralgleichungen aufmerksam, nämlich diejenigen, in denen ein Kern vom Typus des Cauchyschen Hauptwertes auftritt. An Anwendungen in der mathematischen Physik — es sei nur an das Hilbert-Poincarésche Problem erinnert [15] — nicht ärmer als jene, zeigte diese Klasse enge Analogie mit den Fredholmschen Gleichungen: Die Lösbarkeitsbedingungen blieben dieselben, auch waren die Anzahlen linear unabhängiger Lösungen der homogenen und adjungierten homogenen Gleichung stets endlich; nur stimmten diese Anzahlen nicht mehr notwendig überein. Die Theorie solcher Gleichungen ist von zahlreichen Autoren weiterentwickelt worden; wir nennen CARLEMAN [5], GIRAUD [6], [7], MICHLIN [14], MUSKHELISHVILI [15] und VEKUA [21]. (Vgl. auch SÖHNGEN [19] und die dort zitierte Literatur.)

Während nun die Theorie vollstetiger Abbildungen in topologischen Vektorräumen seit RIESZ Gegenstand zahlreicher Arbeiten war und durch LERAY [13] in lokalkonvexen, durch WILLIAMSON [22] sogar in beliebigen topologischen Vektorräumen als gültig erkannt worden ist — für eine in anderer Richtung gehende Verallgemeinerung s. GRAVES [9] —, wurde die den singulären Integralgleichungen entsprechende abstrakte Theorie erst verhältnismäßig spät in Angriff genommen. Neben GOCHBERG [8] und HALILOV [10] hat vor allem ATKINSON [1] die grundlegenden Eigenschaften linearer Operatoren, wie sie durch singuläre Integraloperatoren (im Sinne von [15]) repräsentiert werden, in Banach-Räumen entwickelt. (Für eine Ausdehnung auf allgemeinere Operatorenklassen in B-Räumen vgl. [2].) Den mit diesen singulären Gleichungen eng verknüpften Begriff normaler Auflösbarkeit hatten HAUSDORFF [11], NIKOLSKIJ [16] untersucht.

Die vorliegende Arbeit hat wesentlich zwei Ziele. Zunächst sollen im ersten Abschnitt die zur Herleitung der Lösbarkeitseigenschaften singulärer Integralgleichungen [vgl. 2, Gl. (A) und Satz 10] erforderlichen Hilfsmittel bereitgestellt werden. Dieser Abschnitt beschränkt sich auf lineare Abbildungen eines Hilbertschen Raumes in sich und setzt, außer einem bekannten Satz

*) Diese Arbeit lag einem auf einer Spezialtagung über Funktionalanalysis im März 1956 in Oberwolfach gehaltenen Vortrag zugrunde.

von BANACH [4], nur die elementare Theorie Hilbertscher Räume voraus. Zentral ist Satz 3, aus dem sich fast alle übrigen Sätze leicht ergeben.

Im zweiten Abschnitt werden nun die Lösbarkeitsaussagen (Satz 10) für die Gl. (A) aus den Ergebnissen des ersten Abschnitts gefolgert. Es zeigt sich hierbei, daß im Gegensatz zu [15], wo (wohl wesentlich aus analytischen Gründen) Banach-Räume hölderstetiger Funktionen zugrundegelegt werden, anscheinend der Hilbert-Raum quadratisch summierbarer Funktionen den natürlichen Hintergrund der Theorie abgibt; auch die Definition des Hauptwertintegrals für beliebige quadratisch summierbare Funktionen ist prinzipiell in elementarer Weise möglich (Satz 9, vgl. auch [14]). Ich hoffe, in diesen beiden Abschnitten einen neuen Weg zu den wichtigsten Resultaten der Theorie gezeigt zu haben, der nicht allgemeiner als nötig ist und daher auch dem mehr an den Anwendungen interessierten Leser zugemutet werden kann.

Mit der Übertragung der Theorie auf beliebige lokalkonvexe Räume beschäftigt sich der dritte Abschnitt. Die hier als σ-Transformationen (Def. 3) bezeichneten Homomorphismen sind naturgemäße Verallgemeinerungen der vorher in Hilbertschen Räumen betrachteten verallgemeinerten Fredholmschen Operatoren (ATKINSON [1]); insbesondere brauchen jetzt der abgebildete und der die Bildmenge enthaltende Raum nicht mehr identisch zu sein. Es zeigt sich, daß alle wesentlichen Merkmale verallgemeinerter Fredholmscher Operatoren erhalten bleiben; zu deren Charakterisierung dient jetzt, an Stelle von Satz 3, Satz 12. Anscheinend gelten die erhaltenen Resultate auch in beliebigen, nicht notwendig lokalkonvexen Vektorräumen, wie dies WILLIAMSON [22] für die LERAYsche Theorie [13] vollstetiger Abbildungen bemerkt hat; ich hoffe, darauf in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

1. σ-Transformationen im Hilbert-Raum

Es sei $\mathfrak{X}$ ein nicht notwendig separabler, komplexer Hilbertscher Raum.

Definition 1. *Eine stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{X}$ in sich heiße σ-Transformation oder verallgemeinerter Fredholmscher Operator, wenn T den Bedingungen genügt:*

1. *$T(\mathfrak{X})$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension.*
2. *Der Nullraum $\mathfrak{N}(T) = \{x : Tx = \vartheta\}$ ist endlichdimensional.*

Beispiele von σ-Transformationen sind die Rießschen (oder Fredholmschen) Operatoren $I + K$, wo I die identische, K eine vollstetige Abbildung von $\mathfrak{X}$ in sich bedeutet; ferner Abbildungen $A + BS$, wenn $A + B$, $A - B$ invertierbare Operatoren sind und S die Eigenschaften a), b), c) (**2**, Satz 9) besitzt.

Ein Operator $T \in \mathfrak{R}$ — wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ den Ring stetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich — heißt normal auflösbar, wenn er die Eigenschaft besitzt:

(N): *Die Gleichung $Tx = y$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in \mathfrak{X}$, wenn (und nur wenn) $(y, x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathfrak{N}(T^*) = \{x : T^*x = \vartheta\}$* [1]).

[1]) Wir bezeichnen mit T^* die Adjungierte von T; man beachte, daß $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$ (λ^* die zu λ konjugiert komplexe Zahl).

Man weist unschwer nach, daß jede σ-Transformation die Eigenschaft (N) besitzt. Allgemeiner gilt, daß in jedem lokalkonvexen linearen Raum (N) mit der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{X})$ äquivalent ist.

Kodimension von $T(\mathfrak{X})$ heißt die Dimension des Quotientenraumes $\mathfrak{X}/T(\mathfrak{X})$. Dieser ist dem Nullraum $\mathfrak{N}(T^*)$ der adjungierten Transformation T^* isomorph — die Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{X})$ vorausgesetzt.

Daher können die Axiome 1., 2. durch die folgenden ersetzt werden[2]):

1°. *T ist normal auflösbar* [d.h. T besitzt die Eigenschaft (N)].

2°. *Die Nullräume $\mathfrak{N}(T)$ und $\mathfrak{N}(T^*)$ sind endlichdimensional.*

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zwei einfache Beispiele für die Unabhängigkeit der Axiome 1., 2. zu geben.

1. Sei $\mathfrak{X}$ der lineare Raum aller wohlgeordneten Folgen komplexer Zahlen vom Typus $\omega \cdot 2$: $x = (x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots)$; mit der Forderung

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |y_\nu|^2 < +\infty$$

ist $\mathfrak{X}$ Hilbertscher Raum. Für $Tx = (0, 0, \ldots; x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ ist $\|Tx\| = \|x\|$, daher $\mathfrak{N}(T) = \{\vartheta\}$, während $\mathfrak{X} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{X})$[3]) mit $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, \ldots; 0, 0, \ldots)\}$. T genügt 2., aber nicht 1.

2. Sei $\mathfrak{X}_0$ ein Hilbertscher Raum (unendlicher Dimension), $\mathfrak{X}$ direkte Summe abzählbar vieler zu $\mathfrak{X}_0$ isomorpher Räume; etwa $\mathfrak{X} = \{(x_1, x_2, \ldots)\}$, $x_\nu \in \mathfrak{X}_0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|^2 < +\infty.$$

Sei T_0 ein (stetiger) Automorphismus von $\mathfrak{X}_0$ und $Tx = T(x_1, x_2, \ldots) = (T_0 x_2, T_0 x_3, \ldots)$. Dann ist $T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, d.h. 1. erfüllt, aber $\mathfrak{N}(T) = \{(x_1, 0, 0, \ldots)\}$ isomorph zu $\mathfrak{X}_0$, also von unendlicher Dimension, so daß 2. verletzt ist.

Wir beschließen diese einleitenden Bemerkungen mit dem

Satz 1. *Wenn T σ-Transformation ist, so auch T^*.*

Beweis. Wenn $T^*(\mathfrak{X})$ abgeschlossen ist, so gelten, wie bemerkt, die Isomorphieaussagen: $\mathfrak{N}(T^*) \cong \mathfrak{X}/T(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{N}(T) \cong \mathfrak{X}/T^*(\mathfrak{X})$. Da nach Voraussetzung die rechte Seite der ersten sowie die linke Seite der zweiten Relation endliche Dimension besitzen, so bleibt nur zu beweisen: $T^*(\mathfrak{X})$ ist abgeschlossen.

Sei $T^* x_n = y_n \to y$. Wir haben zu zeigen: Es existiert $x \in \mathfrak{X}$ mit $T^* x = y$. Nun ist (Tz, x_n) konvergent für jedes $z \in \mathfrak{X}$. Daher sind die Einschränkungen der Funktionale x_n auf $T(\mathfrak{X})$ schwach konvergent [auf $T(\mathfrak{X})$] mit dem Limes $\hat{x}$ [$\hat{x}$ stetige Linearfunktion auf $T(\mathfrak{X})$]. Sei x eine Erweiterung von $\hat{x}$ auf den ganzen Raum $\mathfrak{X}$. Offenbar gilt

$$(z, y) = \lim_{n \to \infty} (Tz, x_n) = (Tz, \hat{x}) = (Tz, x) = (z, T^* x) \qquad (z \in \mathfrak{X}),$$

daher $y = T^* x$, w. z. b. w.

---

[2]) Vgl. Atkinson [1], p. 4.

[3]) $\oplus$ bezeichnet, wie üblich, eine orthogonale Summe, $\ominus$ eine orthogonale Differenz (d.h. für abgeschlossene Teilräume $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ orthogonales Komplement von $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$); speziell $\mathfrak{X} \ominus \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\perp$.

Bemerkung. Der Beweis von Satz 1 bleibt gültig, wenn $\mathfrak{X}$ durch einen reflexiven F-Raum[4]) ersetzt wird (Definition 1 macht von der Voraussetzung: $\mathfrak{X}$ Hilbertscher Raum, keinen Gebrauch; vgl. 3).

Als nächstes beweisen wir, daß die Menge Σ aller σ-Transformationen in $\mathfrak{R}$ eine Halbgruppe[5]) bildet, d.h. daß mit S und T auch ST zu Σ gehört.

Satz 2. *Aus* $S \in \Sigma$, $T \in \Sigma$ *folgt* $ST \in \Sigma$.

Beweis. Die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(ST)$ ist offenbar $\leq n_1 + n_2$, wenn n_1 bzw. n_2 diejenigen von $\mathfrak{N}(S)$ bzw. $\mathfrak{N}(T)$ bezeichnen; denn aus $STx = \vartheta$ folgt $Tx \in \mathfrak{N}(S)$. Entsprechendes gilt von $\mathfrak{N}(T^* S^*)$, vgl. Satz 1. Es bleibt die Abgeschlossenheit von $ST(\mathfrak{X})$ zu zeigen. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{X} = T(\mathfrak{X}) \oplus \mathfrak{M}$, wo $T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$ abgeschlossen, $\mathfrak{M}$ endlichdimensional ist. Weiter ist $S(\mathfrak{X})$ abgeschlossen, $S\{T(\mathfrak{X}) \ominus \mathfrak{N}(S)\}$ abgeschlossen und $\mathfrak{N}(S)$ von endlicher Dimension. Daher ist $S(\mathfrak{X}_1) = ST(\mathfrak{X})$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Wie aus den Axiomen 1., 2. unmittelbar folgt, ist jeder (stetige) Automorphismus von $\mathfrak{X}$, d.h. jeder invertierbare (beschränkte) Operator σ-Transformation; mit anderen Worten ist die Gruppe Γ aller (stetigen) Automorphismen von $\mathfrak{X}$ Untergruppe von Σ. Bekanntlich besitzt Γ die Eigenschaften: 1. Γ *ist offen in der Banach-Algebra* $\mathfrak{R}$ stetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich; 2. $\Gamma + \Phi \subset \Sigma$, wo Φ das Ideal vollstetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich bezeichnet. Es ist bemerkenswert, daß beide Aussagen für Σ erhalten bleiben: 1. Σ *ist offen in* $\mathfrak{R}$; 2. $\Sigma + \Phi \subset \Sigma$.

Wir beweisen dies mit Hilfe folgender Charakterisierung von Σ:

Satz 3. *Sei* $T \in \mathfrak{R}$ *und* $\dim \mathfrak{X} \geq \aleph_0$[6]). *Es gilt* $T \in \Sigma$, *wenn und nur wenn zwei Elemente* $R \in \Sigma$, $S \in \Sigma$ *existieren, so daß* $RTS = I$.

Beweis. Die *Notwendigkeit* der Bedingung ergibt sich wie folgt: Sei $T \in \Sigma$. Da der Nullraum $\mathfrak{N}(T)$ von endlicher Dimension ist, ist sein orthogonales Komplement $\mathfrak{N}(T)^\perp$ zu $\mathfrak{X}$ isomorph[7]) (denn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{N}(T)^\perp$ sind dimensionsgleich). Sei also S ein solcher Isomorphismus: $S(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}^\perp$. Nun ist T ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{N}^\perp$ und $T(\mathfrak{X})$[8]), folglich TS ein solcher zwischen $\mathfrak{X}$ und $T(\mathfrak{X})$. Sei R^0 die Inverse von TS, dann haben wir $R^0 TS = I$ auf $\mathfrak{X}$. Offenbar ist S zugleich ein (stetiger) Endomorphismus von $\mathfrak{X}$, während R^0 — zunächst nur auf $T(\mathfrak{X})$ erklärt — auf $\mathfrak{X}$ stetig fortgesetzt werden kann: $Rx = R^0 z$, wenn z die Projektion von $x \in \mathfrak{X}$ auf $T(\mathfrak{X})$ bedeutet. Wir haben noch zu zeigen, das $S \in \Sigma$ und $R \in \Sigma$.

Aber $S(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}^\perp$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension, während der Nullraum von S nur aus der Null $\{\vartheta\}$ besteht. Umgekehrt ist der Nullraum $\mathfrak{N}(R) = T(\mathfrak{X})^\perp$, also endlichdimensional und $R(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$.

---

[4]) F-Raum heißt jeder metrisierbare, vollständige lokalkonvexe lineare Raum (vgl. 3).

[5]) Für den Begriff Halbgruppe s. E. HILLE, Semi-groups and functional analysis (New York 1948).

[6]) Dim $\mathfrak{X}$ bezeichnet die Mächtigkeit einer (beliebigen) orthogonalen Basis von $\mathfrak{X}$.

[7]) Der Ausdruck isomorph bezieht sich stets auf die algebraische und topologische Struktur, d.h. isomorph = linear homöomorph.

[8]) Dies ist Konsequenz eines bekannten Satzes von BANACH [4].

Hinlänglichkeit: Es sei jetzt $R \in \Sigma$, $S \in \Sigma$ und $T \in \mathfrak{R}$, $RTS = I$. Wäre der Nullraum $\mathfrak{N}(T)$ von unendlicher Dimension, so könnte nicht $\mathfrak{N}(T) \cap S(\mathfrak{X}) = \{\vartheta\}$ sein, da $S(\mathfrak{X})$ endliche Kodimension besitzt. Daher gäbe es ein $x_0 \neq \vartheta$ mit $TSx_0 = \vartheta$, d. h. auch $RTSx_0 = \vartheta$. Dieser Widerspruch beweist, daß $\mathfrak{N}(T)$ von endlicher Dimension ist. Wäre nun $\mathfrak{M} = T(\mathfrak{X})^{\perp}$ von unendlicher Dimension, so müßte ein Element $z \perp \mathfrak{N}(R)$ vorhanden sein, $z \neq \vartheta$, welches keine Darstellung $z = Tu$ besitzt, so daß auch $x = Rz$ keine Darstellung $x = RTv$ besäße; jedoch liefert $v = Sx$ wegen $RTS = I$ eine solche.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $T(\mathfrak{X})$ abgeschlossen ist. Wir setzen $S(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$, $T(\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{X}_2$. Wegen $R(\mathfrak{X}_2) = I(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, der Stetigkeit von R und $\overline{\mathfrak{X}_2} \cap \mathfrak{N}(R) = \{\vartheta\}$ ist $\mathfrak{X}_2$ abgeschlossen. Weiter ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_1^{\perp}$, wo der zweite Summand von endlicher Dimension ist. Daher ist $T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_2 + T(\mathfrak{X}_1^{\perp})$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Wir gehen nun zum Beweis der beiden oben für Σ formulierten Behauptungen über.

Satz 4. *Σ ist offene Teilmenge der Banach-Algebra $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen: Zu $T \in \Sigma$ existiert $r > 0$, so daß aus $A \in \mathfrak{R}$, $\|A\| < r$, folgt $T + A \in \Sigma$. Nach Satz 3 ist für zwei Elemente $R \in \Sigma$, $S \in \Sigma$ $RTS = I$. Sei $r = (\|R\| \|S\|)^{-1}$. Dann ist für $\|A\| < r$ $\|RAS\| < 1$ und

$$R(T + A)S = I + RAS = A_1$$

eine invertierbare Transformation in $\mathfrak{R}$, folglich für $R_1 = R$, $S_1 = SA_1^{-1}$

$$R_1(T + A)S_1 = (I + RAS)A_1^{-1} = I,$$

was nach Satz 3 für $T + A \in \Sigma$ hinreicht, falls $R_1 \in \Sigma$, und $S_1 = SA_1^{-1} \in \Sigma$; dies leuchtet auch für S_1 unmittelbar ein.

Satz 5. *Sei Φ das Ideal vollstetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich; dann ist $\Sigma + \Phi < \Sigma$, d. h. aus $T \in \Sigma$ folgt $T + K \in \Sigma$ für beliebiges (lineares) vollstetiges K.*

Beweis. Wie beim Beweis des vorigen Satzes folgern wir aus $RTS = I$

$$R(T + K)S = I + RKS = I + K_1$$

mit vollstetigem K_1. Aus der Rießschen Theorie folgt, daß $I + K_1 \in \Sigma$. Daher gibt es nach Satz 3 zwei weitere Elemente $R_1 \in \Sigma$, $S_1 \in \Sigma$, so daß $R_1(I + K_1)S_1 = I$. Nun sind nach Satz 2 $U = R_1R$ und $V = SS_1$ ebenfalls Transformationen aus Σ. Also gilt auch

$$U(T + K)V = I$$

mit $U \in \Sigma$, $V \in \Sigma$, woraus sich wieder (Satz 3) $T + K \in \Sigma$ ergibt.

Das Verhalten eines Fredholmschen Operators bezüglich der Gleichung $Tx = y$ kann durch die sog. „determinantenfreien" Sätze der Integralgleichungstheorie charakterisiert werden. Wie man leicht nachprüft, besteht der Inhalt dieser Sätze aus den Axiomen 1°., 2°. und dem folgenden: 3°. Für die Dimensionen n bzw. m der Nullräume $\mathfrak{N}(T)$ bzw. $\mathfrak{N}(T^*)$ gilt: $n = m$ [9]).

[9]) Zu diesen Sätzen wird gewöhnlich noch die Aussage gezählt, daß für $T_\lambda = T - \lambda K$ $n = m = 0$ mit Ausnahme einer abgeschlossenen Menge $\{\lambda_\nu\}$ isolierter Punkte (vgl. Satz 8).

Im allgemeineren Fall einer σ-Transformation T sind diese Zahlen im allgemeinen verschieden. Ihre Differenz ist eine T in gewisser Weise eigentümliche Zahl (Satz 7) und wird gewöhnlich als Index von T bezeichnet; vgl. auch [20].

Definition 2. *Es seien n bzw. m die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(T)$ bzw. die Kodimension von $T(\mathfrak{X})$. Dann heißt $\varkappa(T)=n-m$ der Index von T.*

Für den Index gilt auf Σ das „logarithmische Gesetz" [1]:

Satz 6. *Aus $T_1\in\Sigma$, $T_2\in\Sigma$ folgt $T_1T_2\in\Sigma$* (Satz 2) *und $\varkappa(T_1T_2)=\varkappa(T_1)+\varkappa(T_2)$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit n, n_1, n_2 bzw. m, m_1, m_2 (in dieser Reihenfolge) die Dimensionen der Nullräume $\mathfrak{N}(T)=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}(T_1)=\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}(T_2)=\mathfrak{N}_2$ bzw. die Kodimensionen der Räume $T(\mathfrak{X})$, $T_1(\mathfrak{X})$, $T_2(\mathfrak{X})$, wobei $T=T_1T_2$ gesetzt ist. Ferner seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ die orthogonalen Komplemente der letzteren Räume.

Zur Bestimmung von n bemerken wir, daß $\mathfrak{N}$ außer einer Basis von $\mathfrak{N}_2$ noch eine Basis eines zu $T_2(\mathfrak{X})\cap\mathfrak{N}_1$ isomorphen Raumes enthält (aber auch keine weiteren linear unabhängigen Elemente). Daher ist

$$n=n_2+\operatorname{Dim}(\mathfrak{M}_2^{\perp}\cap\mathfrak{N}_1)=n_2+j. \tag{1.1}$$

Im Komplement $\mathfrak{M}$ von $T(\mathfrak{X})$ ist außer einer Basis von $\mathfrak{M}_1$ noch eine Basis eines zu $\mathfrak{M}_2\cap\mathfrak{N}_1^{\perp}$ isomorphen Raumes enthalten (und keine weiteren linear unabhängigen Elemente). Folglich hat man

$$m=m_1+\operatorname{Dim}(\mathfrak{M}_2\cap\mathfrak{N}_1^{\perp})=m_1+k. \tag{1.2}$$

Nun ist aber $j=n_1-l_1$, wo l_1 die Anzahl der linear unabhängigen Relationen bedeutet, denen $x\in\mathfrak{N}_1$ durch die Forderung $x\perp\mathfrak{M}_2$ zu genügen hat. Analog gilt $k=m_2-l_2$ und wie man leicht nachprüft, ist $l_1=l_2=l$. Daher folgt aus (1.1), (1.2)

$$\varkappa(T)=n-m=(n_2+n_1-l)-(m_1+m_2-l)=(n_1-m_1)+(n_2-m_2)=\varkappa(T_1)+\varkappa(T_2).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich nun weiter zeigen, daß der Index auf den in $\Sigma\subset\mathfrak{R}$ gelegenen Mengen $T_0+\mathfrak{U}$, $T_0+\Phi$ konstant ist (T_0 fest), wo $\mathfrak{U}$ eine geeignete (Satz 4) Nullumgebung in $\mathfrak{R}$ bedeutet. *Die Halbgruppe Σ ist* also *Vereinigung offener Mengen in $\mathfrak{R}$, auf denen der Index konstant ist*; keine dieser Mengen ist beschränkt. Die Konstanz des Index auf jeder Menge $T_0+\Phi$ ist für die Theorie singulärer Integralgleichungen von Bedeutung (s. **2**).

Satz 7. *Es sei $T_0\in\Sigma$ fest, ferner A eine nur der Bedingung $\|A\|<r$ (r geeignet positiv) unterworfene, K eine beliebige vollstetige lineare Abbildung von $\mathfrak{X}$ in sich. Dann gilt für die Indizes von T_0+A und T_0+K:*

$$\varkappa(T_0+A)=\varkappa(T_0),\qquad \varkappa(T_0+K)=\varkappa(T_0).$$

Beweis. Es sei $\varkappa(T_0)=n-m$ (Def. 2). Dann folgt aus $R\in\Sigma$, $S\in\Sigma$ und $RT_0S=I$ nach Satz 6

$$\varkappa(R)+\varkappa(T_0)+\varkappa(S)=0. \tag{1.3}$$

Nun ist nach Satz 6 mit $r = (\|R\| \|S\|)^{-1}$, $A_1 = I + RAS$

$$(1.4)\quad \begin{cases} \varkappa\{R(T_0 + A)S\} = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + A) + \varkappa(S) = \varkappa(A_1) = 0, \\ \varkappa\{R(T_0 + K)S\} = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + K) + \varkappa(S) = \varkappa(I + RKS) = 0; \end{cases}$$

letzteres wieder nach der Rießschen Theorie. (1.3) und (1.4) ergeben unmittelbar die Behauptung.

Für den mit einem komplexen Parameter λ versehenen Operator $T_0 + \lambda K$ (K vollstetig) gilt schließlich folgender, der Fredholmschen Theorie analoge Satz [10]:

Satz 8. *Sei $T_0 \in \Sigma$, K vollstetig. Dann sind die (stets endlichen) Dimensionen $n(\lambda)$ bzw. $m(\lambda)$ der Nullräume von $T_0 + \lambda K$ bzw. $T_0^* + \lambda^* K^*$, abgesehen von einer höchstens abzählbaren Menge $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ohne Häufungspunkt im Endlichen, von λ unabhängig: $n(\lambda) = n$, $m(\lambda) = m$ $(\lambda \neq \lambda_\nu)$. In den Punkten der (möglicherweise leeren) Ausnahmemenge gilt stets: $n(\lambda_\nu) > n$, $m(\lambda_\nu) > m$.*

Beweis. Da $T_\lambda = T_0 + \lambda K \in \Sigma$ für alle λ (Satz 5), so sind $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ stets endlich. Wir setzen (λ beliebig komplex)

$$(1.5)\qquad m = \inf m(\lambda), \qquad n = \inf n(\lambda).$$

Sei jetzt λ_0 ein Punkt mit $m(\lambda_0) = m$; es ist dann notwendig $n(\lambda_0) = n$ (Satz 7). Wir betrachten nun die Abbildung $T_0' = T_0 + \lambda_0 K$ und konstruieren wie im ersten Teil des Beweises von Satz 3 zwei stetige lineare Abbildungen $R_0 \in \Sigma$, $S_0 \in \Sigma$, so daß

$$R_0(T_0 + \lambda_0 K) S_0 = R_0 T_0' S_0 = I.$$

Mit $T_\lambda' = T_0' - \lambda K$ gilt dann

$$R_0 T_\lambda' S_0 = I - \lambda K_1.$$

Da $K_1 = R_0 K S_0$ vollstetig ist, existiert mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ $(I - \lambda K_1)^{-1}$ nach der Rießschen Theorie; mit $S_\lambda = S_0(I - \lambda K_1)^{-1}$ haben wir also $R_0 T_\lambda' S_\lambda = I$ $(\lambda \neq \lambda_\nu)$. Nun sind die Teilräume von $\mathfrak{X}$: $S_\lambda(\mathfrak{X}) = S_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}(R_0)^\perp$ von λ unabhängig[11], und T_λ ist ein linearer Homöomorphismus von $\mathfrak{X}_1$ auf $\mathfrak{X}_2$ (sonst könnte nicht $R_0 T_\lambda' S_\lambda = I$ gelten) für $\lambda \neq \lambda_\nu$. Daher sind die Zahlen $n(\lambda)$ bzw. $m(\lambda)$ nicht größer als die Kodimensionen $n(\lambda_0) = n$ bzw. $m(\lambda_0) = m$ von $\mathfrak{X}_1$ bzw. $\mathfrak{X}_2$:

$$m(\lambda) \leq m, \qquad n(\lambda) \leq n \qquad (\lambda \neq \lambda_\nu).$$

Daraus folgt aber wegen (1.5): $m(\lambda) = m$, $n(\lambda) = n$ für $\lambda \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Korollar. *Ist für ein λ $m(\lambda) = 0$ bzw. $n(\lambda) = 0$, so gilt mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge ohne Häufungspunkt: $m(\lambda) = 0$ bzw. $n(\lambda) = 0$.*

[10] Eine genaue Analogie mit dem Fredholmschen Fall ergibt sich allerdings nur, wenn für die in (1.5) definierten Zahlen $m = n = 0$; es erscheint berechtigt, dies als den quasi-Fredholmschen Fall zu bezeichnen; er ist aber mit dem in [15] so bezeichneten Fall $\varkappa = 0$ nicht identisch.

[11] R_0 ist Isomorphismus von $\mathfrak{X}_2$ auf $\mathfrak{X}$ (vgl. Fußnote 8).

Ist also wenigstens eine der beiden Zahlen $n(T_0)$ oder $m(T_0)$ gleich Null, so sind die Maximalanzahlen linear unabhängiger Lösungen von $(T_0+\lambda K)x=\vartheta$ bzw. $(T_0^*+\lambda^* K^*)x=\vartheta$ (bis auf eine λ-Menge der betrachteten Art) gleich denen von $T_0 x=\vartheta$ bzw. $T_0^* x=\vartheta$; bei Fredholmschen Operatoren ist dies wegen $T_0=I$ stets der Fall.

2. Singuläre Integralgleichungen

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, die Haupteigenschaften singulärer Integralgleichungen (in einer Dimension) aus den Sätzen von Abschnitt **1** herzuleiten.

Unter einer singulären Integralgleichung für die komplexwertige, gesuchte Funktion (einer Variablen) $\varphi(z)$ verstehen wir eine Gleichung

$$\text{(A)} \qquad a(z)\,\varphi(z)+\frac{b(z)}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\lambda\int_C k(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta=\psi(z) \qquad (z\in C),$$

wo die verwendeten Symbole folgende Bedeutung haben[12]):

C: Stetig gekrümmte, orientierte Jordan-Kurve, die den Ursprung der komplexen Ebene umschließt.

$a(z)$, $b(z)$: Auf C stetig differenzierbare, komplexwertige Ortsfunktionen.

$L^2(C)$: Der Hilbert-Raum quadratisch summierbarer (komplexwertiger) Ortsfunktionen auf C.

$k(z,\zeta)$: Auf $C\times C$ quadratisch summierbarer Kern, λ komplexer Parameter.

$\psi(z)\in L^2(C)$ ist gegeben, $\varphi(z)\in L^2(C)$ gesucht; das Integral $\int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen und existiert fast überall auf C [23] (von dieser Tatsache werden wir keinen Gebrauch machen).

Wir setzen $A=a(z)\,I$, $B=b(z)\,I$, $K\varphi=\int k(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta$ und

$$(2.1) \qquad S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Hierbei sind offenbar A, B stetige lineare Abbildungen von $L^2(C)$ in sich, K vollstetig, während S (mittels des Cauchyschen Hauptwertes) in elementarer Weise zunächst nur auf einer in $L^2(C)$ dichten Menge $\mathfrak{D}$ definiert werden kann. Wir können für $\mathfrak{D}$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen sämtlicher ganzen Potenzen von z: $\{\ldots, z^{-1}, 1, z, z^2, \ldots\}$ setzen.

Wir zeigen zunächst, daß S auf $L^2(C)$ beschränkt fortgesetzt werden kann.

Satz 9. *Die durch* (2.1) *auf* $\mathfrak{D}$ *definierte lineare Abbildung* S *läßt sich auf* $L^2(C)$ *beschränkt fortsetzen. Die Fortsetzung besitzt die Eigenschaften:*

a) $S^2=I$,

b) $S^*=S-K_1$,

c) $SA-AS=K_2$, $SB-BS=K_3$,

wo K_1, K_2, K_3 *gewisse vollstetige lineare Abbildungen bezeichnen.*

[12]) Bei den folgenden Voraussetzungen wird kein Wert auf größtmögliche Allgemeinheit gelegt. Für allgemeinere Voraussetzungen s. [14].

Beweis. S ist, wie bemerkt, jedenfalls auf $\mathfrak{D}$ definiert.

a) Sei $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^+ + \mathfrak{D}^-$; $\mathfrak{D}^+$ lineare Hülle[13]) aller nicht negativen Potenzen von z, $\mathfrak{D}^-$ lineare Hülle aller negativen Potenzen von z. Offenbar gilt eindeutig

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \qquad (\varphi^+ \in \mathfrak{D}^+, \varphi^- \in \mathfrak{D}^-) \tag{2.2}$$

für $\varphi \in \mathfrak{D}$. Nach den Plemeljschen Formeln der Potentialtheorie [*15*] gilt aber, wie man auch leicht direkt nachweist, $Sz^n = z^n$ $(n \geq 0)$ und $Sz^n = -z^n$ $(n<0)$ auf C, also $S\varphi^+ = \varphi^+$, $S\varphi^- = -\varphi^-$ und $S\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$,

$$S^2\varphi = \varphi^+ + \varphi^- = \varphi$$

d.h. $S^2 = I$ auf $\mathfrak{D}$ — daher, falls eine beschränkte Fortsetzung existiert, auch auf $L^2(C)$.

b) Bezeichnen wir mit s die Bogenlänge auf C und setzen $\zeta - z = \varrho e^{i\alpha(s,s')}$, $d\zeta = ds'\, e^{i\Theta(s')}$, so folgt (auf $\mathfrak{D}$)

$$\begin{cases} S\varphi = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_C \varphi(s')\, e^{i[\Theta(s')-\alpha(s,s')]}\,\dfrac{ds'}{\varrho}, \quad S^*\varphi = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_C \varphi(s')\, e^{i[\Theta(s)-\alpha(s,s')]}\,\dfrac{ds'}{\varrho}, \\ (S-S^*)\varphi = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_C \{\sin[\Theta(s')-\alpha(s,s')] + O[\Theta(s')-\Theta(s)]\}\varphi(s')\,\dfrac{ds'}{\varrho} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_C K_1(s,s')\varphi(s')\,ds' = K_1\varphi. \end{cases} \tag{2.3}$$

Infolge der Voraussetzungen über C ist aber $K_1(s,s')$ (O das bekannte Landausche Symbol) beschränkt, daher K_1 auf ganz $L^2(C)$ definiert.

c) Beweis mit gleichem Argument wie für b); offenbar sind auch K_2, K_3 auf ganz $L^2(C)$ definiert.

Zum Beweis der Fortsetzbarkeit von S genügt es, die Beschränktheit von S auf $\mathfrak{D}$ nachzuweisen. Ersichtlich ist auch S^* auf $\mathfrak{D}$ definiert, vgl. (2.3). Sei $\varphi \in \mathfrak{D}$. Wir haben mit $S^* = S - K_1$ und $S^2 = I$ auf $\mathfrak{D}$ wegen $S(\mathfrak{D}) < \mathfrak{D}$

$$\|\varphi\|^2 = (S^*\varphi, S\varphi) = (S\varphi, S\varphi) - (K_1\varphi, S\varphi) = \|S\varphi\|^2 - (K_1\varphi, S\varphi),$$

folglich

$$\|S\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + \|S\varphi\|\,\|K_1\varphi\|.$$

Daraus folgt (weil K_1 beschränkt ist) die Beschränktheit von S auf $\mathfrak{D}$ und der Satz ist bewiesen.

Um zeigen zu können, daß die durch die linke Seite von (A) definierte Transformation von $L^2(C)$ in sich zu Σ gehört, machen wir noch folgende Voraussetzung über $a(z)$, $b(z)$:

(R): *Es sei* $a^2(z) - b^2(z) \neq 0$ *auf* C.

Aus (R) folgt, daß die Operatoren $A+B$ und $A-B$ invertierbar sind. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz. *Falls die Bedingung* (R) *erfüllt ist, gehört* $T_0 = A + BS$ *zu* Σ.

[13]) Das heißt die Menge aller endlichen Linearkombinationen.

Beweis. Da $BS - SB = -K_3$ vollstetig ist, genügt es nach Satz 5, den Beweis für $T_0' = A + SB$ zu erbringen. Sei $U = A_1 + B_1 S$, wo $A_1 = a_1(z)\, I$, $B_1 = b_1(z)\, I$. Wir bestimmen $a_1(z)$, $b_1(z)$ aus den Gleichungen

$$\begin{cases} a a_1 + b b_1 = 1 \\ b a_1 + a b_1 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

und finden, daß

$$\begin{aligned} U T_0' &= (A_1 + B_1 S)(A + SB) = (A_1 A + B_1 B) + B_1 SA + A_1 SB \\ &= I + (B_1 A + A_1 B) S + B_1 (SA - AS) + A_1 (SB - BS) \\ &= I + B_1 K_2 + A_1 K_3 = I + K_0 \end{aligned}$$

Rießscher Operator ist; denn infolge (2.4) ist $A_1 A + B_1 B = I$, $B_1 A + A_1 B = 0$ und K_2, K_3 sind vollstetig (Satz 9). Aus $U T_0' = I + K_0$ folgt zunächst, daß der Nullraum $\mathfrak{N}(T_0')$ von endlicher Dimension ist; andernfalls wäre auch der Nullraum $\mathfrak{N}(I + K_0)$ unendlichdimensional, was bekanntlich nicht eintreten kann. Daß $T_0'(\mathfrak{X})$ endliche Kodimension besitzt, sieht man so ein: Die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(T_0'^*)$, wo

$$T_0'^* = A^* + B^* S^* = A^* + B^* S - B^* K_1$$

und K_1 vollstetig ist (Satz 9), ergibt sich durch eine der vorangehenden völlig analoge Konstruktion als endlich und stimmt mit der Kodimension von $T_0'(\mathfrak{X})$ überein. Es bleibt zu zeigen, daß $T_0'(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$ abgeschlossen ist. Aber nach der Rießschen Theorie ist $U T_0' = I + K_0$ Isomorphismus auf einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{X}_0$ endlicher Kodimension in $\mathfrak{X}$, daher $T_0'(\mathfrak{X}_0)$ und um so mehr $\mathfrak{X}_1$ abgeschlossen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. In der Theorie singulärer Integralgleichungen [8], [14], wird U wegen $U T_0' = I + K_0$ als *regularisierender Operator* für T_0' bezeichnet. U regularisiert daher auch $T_0' + K$ bei beliebigem vollstetigem K, speziell also $T_0 = T_0' - K_3$. GOCHBERG hat gezeigt [8], daß für die Regularisierbarkeit von T_0 die Bedingung (R) notwendig und hinreichend ist.

Nach Definition 2 besitzt T_0 einen Index $\varkappa(T_0)$. Wie man zeigen kann [15], gilt für diesen Index

$$\varkappa(T_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \log \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)}\,.$$

Aus der Definition von $a_1(z)$, $b_1(z)$ durch (2.4) entnimmt man, daß $U \in \Sigma$. Nach Satz 6 gilt daher $\varkappa(U) = -\varkappa(T_0)$.

Wir bezeichnen mit $(A)_0$ die zu (A) gehörige homogene Gleichung, mit (A_0) dieselbe Gleichung für $\lambda = 0$:

$$a(z)\, \varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \tag{A_0}$$

und sind jetzt in der Lage, den Hauptsatz über die Lösbarkeit der Gl. (A) aufzustellen. Mit (A*), $(A^*)_0$ und (A_0^*) bezeichnen wir die zugehörigen adjungierten Gleichungen.

Satz 10. *Es sei für* (A) *die Regularitätsbedingung* (R) *erfüllt.*

Gl. (A) *besitzt eine Lösung* $\varphi(z) \in L^2(C)$, *wenn und nur wenn* $(\psi, \psi_0) = 0$ *für sämtliche Lösungen* ψ_0 *der adjungierten homogenen Gl.* $(A^*)_0$.

Die Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen sind für beide Gln. $(A)_0$ *und* $(A^*)_0$ *endlich.*

Mit möglicher Ausnahme einer Folge diskreter Werte $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ *des Parameters* λ *ohne Häufungspunkt im Endlichen sind die maximalen Anzahlen linear unabhängiger Lösungen von* $(A)_0$ *bzw.* $(A^*)_0$ *gleich zwei festen Zahlen* n *bzw.* m.

Die Differenz $\varkappa(\lambda)$ *dieser Anzahlen ist unabhängig von* λ: $\varkappa(\lambda) = \varkappa(0)$. *Insbesondere besitzen die Gln.* $(A)_0$ *bzw.* $(A^*)_0$ *stets mindestens* $\frac{1}{2}(|\varkappa| + \varkappa)$ *bzw.* $\frac{1}{2}(|\varkappa| - \varkappa)$ *linear unabhängige Lösungen.*

Beweis. Auf Grund des Hilfssatzes und von Satz 5 ist $T_0 + \lambda K \in \Sigma$, wenn $T_0 + \lambda K$ die durch die linke Seite von (A) definierte Transformation bezeichnet. Daraus folgt sofort die [mit der Eigenschaft (N), s. **1**, identische] erste Aussage, ferner die zweite und nach Satz 8 auch die dritte Aussage. Satz 7 ergibt den ersten Teil der letzten Behauptung. Seien jetzt $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ (Def. 2) die Dimensionen der Nullräume $\mathfrak{N}(T_0 + \lambda K)$ bzw. $\mathfrak{N}(T_0^* + \lambda^* K^*)$. Dann gilt (Satz 7) $\varkappa(\lambda) = n(\lambda) - m(\lambda) = \varkappa(0)$, daher für $\varkappa \gtrless 0$: $n(\lambda) \gtrless \varkappa$. Entsprechendes gilt für die Adjungierte $T_0^* + \lambda^* K^*$, deren Index $\varkappa^* = -\varkappa$ ist: Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Da man beweisen kann [*15*], daß [unter der Voraussetzung (R)] entweder (A_0) oder (A_0^*) nur die triviale Lösung besitzt[14]), folgt aus dem Korollar zu Satz 8, daß die in Satz 10 erwähnten Zahlen n bzw. m mit den Nullösungsanzahlen von (A_0) bzw. (A_0^*) übereinstimmen. Satz 10 gilt hingegen auch für die allgemeinere Gleichung[15])

$$a(z)\,\varphi(z) + \int_C \left\{\frac{K(z,\zeta)}{\zeta - z} + \lambda\, k(z,\zeta)\right\} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \psi(z).$$

3. σ-Transformationen in lokalkonvexen Räumen

Wir erinnern an einige Begriffe aus der Theorie topologischer Vektorräume. Eine Menge $\mathfrak{E}$ heißt linearer topologischer Raum (l.t.R.) oder topologischer Vektorraum [*2*], wenn $\mathfrak{E} = \{x, y, \ldots\}$ freie abelsche Gruppe über einem bewerteten Körper $\mathfrak{K} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ ist, welcher eine topologische Struktur [*1*] aufgeprägt ist derart, daß die Abbildungen $(x, y) \to x + y$ von $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$ und $(\lambda, x) \to \lambda x$ von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$ stetig sind. Ein l.t.R. heißt Hausdorffscher Raum (oder separiert [*1*]), wenn es zu verschiedenen Punkten stets punktfremde Umgebungen gibt. Wir betrachten nachfolgend ausschließlich Hausdorffsche Räume über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen[16]) (mit der üblichen Bewertung).

[14]) Es ist mir nicht gelungen, hierfür einen einfachen Beweis zu finden.

[15]) Hierbei genüge $K(z, \zeta)$ etwa einer Lipschitz-Bedingung in beiden Variablen.

[16]) Kommen mehrere l.t.R. in einem Gedankengang vor, so betrachten wir sie sämtlich über demselben Körper.

Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ zwei l.t.R., so heißt eine Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ linear, wenn $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$ für alle x, $y\in\mathfrak{E}$ und α, $\beta\in\mathfrak{K}$. Falls T eineindeutig ist, ist auch T^{-1} linear; der Ausdruck linear bezieht sich also nur auf die algebraischen Eigenschaften einer Abbildung[17]). Eine lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist stetig, wenn das volle Urbild $T^{-1}(\mathfrak{O}')$ offen in $\mathfrak{E}$ ist für jede offene Menge $\mathfrak{O}'\subset\mathfrak{F}$. Sei T eine stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $T(\mathfrak{E})\subset\mathfrak{F}$: T heißt Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn auch $T(\mathfrak{O})$ offen ist in $T(\mathfrak{E})$ [in der relativen, d.h. durch $\mathfrak{F}$ in $T(\mathfrak{E})$ induzierten, Topologie] für jede offene Menge $\mathfrak{O}\subset\mathfrak{E}$. Folglich ist jeder $1-1$-Homomorphismus ein linearer Homöomorphismus oder Isomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf $T(\mathfrak{E})$[18]). Endomorphismus heißt jeder Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich (d.h. auf einen Teilraum), Automorphismus jeder Isomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf sich[19]).

Teilraum $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{E}$ heißt jede (nicht notwendig abgeschlossene) Teilmenge, die linear ist, d.h. mit x, y auch $\alpha x+\beta y$ (α, $\beta\in\mathfrak{K}$ beliebig) enthält. Wir sagen, $\mathfrak{E}$ sei direkte (algebraische) Summe der Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}=\{\vartheta\}$ (ϑ das Nullelement von $\mathfrak{E}$) und jedes $z\in\mathfrak{E}$ in der Form $z=x+y$ ($x\in\mathfrak{M}$, $y\in\mathfrak{N}$) (notwendigerweise eindeutig) darstellbar ist. Die linearen Abbildungen $z\to x=Pz$, $z\to y=Qz$ heißen Projektoren (von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$); offenbar ist $P+Q=I$ (I die identische Abbildung). $\mathfrak{E}$ heißt direkte topologische Summe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{E}$ algebraische Summe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und einer der Projektoren stetig ist (dann ist es auch der andere und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind abgeschlossen). Gleichwertig damit ist: $\mathfrak{E}$ ist direkte algebraische Summe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und homöomorph dem topologischen Produkt $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$[20]).

Ein l.t.R. ist lokalkonvex, wenn der Umgebungsfilter $[I]$ des Nullelementes $\vartheta\in\mathfrak{E}$ eine aus konvexen Mengen bestehende Basis besitzt. Wir haben es im folgenden ausschließlich mit lokalkonvexen Räumen zu tun; für alle hier benötigten Begriffe s. auch [4]. Wir erwähnen noch das Hahn-Banachsche Theorem: Sei $\mathfrak{E}$ lokalkonvex, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$ ein abgeschlossener Teilraum, $p(x)$ eine (auf $\mathfrak{E}$) stetige Halbnorm, $f(x)$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ mit $|f(x)|\leq p(x)$ für $x\in\mathfrak{M}$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f_1(x)$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$, die auf $\mathfrak{M}$ mit $f(x)$ übereinstimmt und für welche $|f_1(x)|\leq p(x)$ auf $\mathfrak{E}$.

Es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ lokalkonvexe l.t.R. Die Menge $\mathfrak{E}^*$ aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ heißt zu $\mathfrak{E}$ dualer Raum. Ist T eine stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so ist jedem $y^*\in\mathfrak{F}^*$ durch $(Tx, y^*)=(x, T^*y^*)$ ein-

[17]) Dieser Sprachgebrauch weicht von dem der polnischen Schule ab, nach welchem jede lineare Abbildung stetig ist.

[18]) Es ist also nicht jede lineare stetige Abbildung ein Homomorphismus, und nicht jeder 1—1-Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich ein Automorphismus.

[19]) Unglücklicherweise werden die genannten Begriffe in durchaus verschiedenen Bedeutungen verwendet. Synonym zu den hier definierten Begriffen sind topologischer (oder offener) Homomorphismus, topologischer Isomorphismus. (In F-Räumen fallen nach einem Satz von BANACH einige dieser Begriffe zusammen [4].)

[20]) Die Situation ist hier ähnlich wie bei den Begriffen des vorigen Absatzes, vgl. Fußnote 19. Wir schreiben topologische Summen der größeren Deutlichkeit halber: $\mathfrak{E}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$, obwohl sie im Hilbertschen Raum nicht notwendig orthogonal sind, vgl. Fußnote 3.

deutig ein $x^* = T^* y^* \in \mathfrak{E}^*$ zugeordnet, wenn unter (y, y^*) der Wert von $y^* \in \mathfrak{F}^*$ in $y \in \mathfrak{F}$ (und analog für $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*$) verstanden wird. T^* heißt die Adjungierte von T. Die (lineare) Menge $\mathfrak{E}^*$ kann auf vielfältige Weise mit einer lokalkonvexen Topologie versehen werden; wir gehen hierauf nicht ein. — Eine lineare stetige Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ heißt nach LERAY [*13*] vollstetig (kompakt), wenn für eine Nullumgebung $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{E}$ $T(\mathfrak{U})$ relativ kompakt [*1*] ist in $\mathfrak{F}$. Eine lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ heißt von endlichem Rang, wenn der Bildraum endliche Dimension besitzt. Jede stetige Abbildung endlichen Ranges ist vollstetig.

Um zeigen zu können, daß alle (in **1** bewiesenen) wesentlichen Eigenschaften verallgemeinerter Fredholmscher Operatoren auch in beliebigen lokalkonvexen Räumen erhalten bleiben, ersetzen wir Definition 1 durch die folgende

Definition 3. *Es seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ beliebige lokalkonvexe Räume. T heiße σ-Transformation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn T ein Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ mit abgeschlossenem Bildraum endlicher Kodimension und endlich-dimensionalem Nullraum ist. Die Menge aller σ-Transformationen von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ werde mit $\Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ bezeichnet.*

Hieraus folgt: $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ besitzen Darstellungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1, \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{E}) \tag{3.2}$$

als direkte topologische Summen, wo $\mathfrak{N} = \{x : Tx = \vartheta\}$ den Nullraum (Kern) von T, $\mathfrak{U}$ einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Dies folgt aus der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ und der endlichen Dimension von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U}$. Da T Homomorphismus ist, ist T auch Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$.

Mit Hilfe des Hahn-Banachschen Theorems kann man zu $\mathfrak{N}(T)$ gehörige stetige Projektoren konstruieren. Sei $y_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $\mathfrak{N}(T)$; dann gibt es n Elemente x_ν^* aus $\mathfrak{E}^*$, so daß $(y_\mu, x_\nu^*) = \delta_{\mu\nu} (\mu, \nu = 1, \ldots, n)$. Die durch

$$Px = \sum_{\nu=1}^{n} (x, x_\nu^*)\, y_\nu$$

definierte lineare Transformation ist ein stetiger Projektor, und $\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1$ direkte topologische Summe von $\mathfrak{N} = P(\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{E}_1 = (I - P)\,\mathfrak{E}$. Besitzt eine stetige lineare Abbildung T des l.t.R. $\mathfrak{E}$ in den l.t.R. $\mathfrak{F}$ die Eigenschaft (N) (s. **1**), so ist offenbar $T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen. Aus Gründen der Vollständigkeit beweisen wir noch

Satz 11. *Seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ lokalkonvexe l.t.R. Für jede stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist die Eigenschaft* (N) *mit der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ äquivalent.*

Beweis. Wir haben nur zu beweisen, daß aus der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ die Eigenschaft (N) folgt. Sei $\mathfrak{F} = T(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}$ direkte algebraische Summe. Sei weiter z^0 fest: $z^0 \in \mathfrak{Z}$, $z^0 \neq \vartheta$ $(T(\mathfrak{E}) \neq \mathfrak{F})$. Es genügt zu zeigen, daß ein

$y_0^* \in \mathfrak{F}^*$ existiert mit $T^* y_0^* = \vartheta$ und $(z^0, y_0^*) \neq 0$. Nun ist $\mathfrak{Y} = T(\mathfrak{E}) \oplus \{\lambda z^0\}$ abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{F}$, $f(y + \lambda z^0) = \lambda$ eine auf $\mathfrak{Y}$ stetige Linearfunktion, die sich nach HAHN-BANACH auf $\mathfrak{F}$ stetig fortsetzen läßt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ F-Räume[4]), so ist jede stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ mit abgeschlossenem Bildraum endlichen Defekts und endlichem Kern σ-Transformation.

Denn nach einem bekannten Satz von BANACH ist jedes solche T Homomorphismus.

Korollar. *Jede σ-Transformation eines lokalkonvexen Raumes $\mathfrak{E}$ in einen lokalkonvexen Raum $\mathfrak{F}$ besitzt die Eigenschaft* (N)[21]).

Satz 12. *Es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ beliebige lokalkonvexe Räume. Eine stetige lineare Abbildung T ist σ-Transformation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn und nur wenn zwei stetige lineare Abbildungen: R, S von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ existieren, für welche gilt:*

$$RT = I - L_1, \tag{3.3}$$

$$TS = I - L_2, \tag{3.4}$$

wo L_1 eine stetige lineare Abbildung endlichen Ranges von $\mathfrak{E}$ in sich, L_2 eine stetige lineare Abbildung endlichen Ranges von $\mathfrak{F}$ in sich ist. R, S können so gewählt werden, daß $R = S$ und L_1, L_2 (stetige) Projektoren sind.

Beweis. Die Bedingung ist *notwendig:* Nach Definition 3 hat man, wenn T σ-Transformation ist, für $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ die Darstellungen (3.1) bzw. (3.2), und T ist Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Sei $R_0 = T^{-1}$ auf $T(\mathfrak{E})$. Wir setzen $R = R_0(I - Q)$, wo Q die (stetige) Projektion von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$ längs $T(\mathfrak{E})$ bezeichnet. Offenbar ist R stetig und (3.3) mit $L_1 = P$ erfüllt — P die zu (3.1) gehörige (ebenfalls stetige) Projektion von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{N}$. Analog beweist man (3.4): Wir setzen $S = R_0(I - Q)$ und haben $TS = I - L_2$ für $L_2 = Q$.

Die Bedingung ist *hinreichend:* Aus (3.3) folgt, daß der Kern $\mathfrak{N}(T)$ endlichdimensional ist und aus (3.4) die Endlichkeit des Defektes von $T(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{F}$. Offenbar ist $T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen, denn $TS(\mathfrak{F})$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension [*13*]. Wir haben noch zu zeigen, daß T Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist. Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1$ direkte topologische Summe; dann ist T 1 — 1-lineare Abbildung von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Nun ist nach KÖTHE [*12*, Satz 7] $I - L_1$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich, während R $T(\mathfrak{E})$ stetig auf $(I - L_1)\mathfrak{E}$ abbildet. Sei jetzt $\mathfrak{O}_1$ eine beliebige offene Menge in $\mathfrak{E}_1$, dann ist $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O} \cap \mathfrak{E}_1$ für offenes $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{E}$. Also ist $(I - L_1)\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ offen in $(I - L_1)\mathfrak{E}$ und $T(\mathfrak{O}_1)$ homöomorph dem Produkt zweier offenen Mengen $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{N}(R) \cap T(\mathfrak{E})$, $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M} \oplus [\mathfrak{N}(R) \cap T(\mathfrak{E})] = T(\mathfrak{E}))$ — denn $I - L_1$ ist Isomorphismus von $T^{-1}(\mathfrak{M})$ auf $(I - L_1)\mathfrak{E}$ und R stetig —, also offen in $T(\mathfrak{E})$, daher T eine offene Abbildung von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von T ist aber auch T^{-1} offene Abbildung von $T(\mathfrak{E})$ auf $\mathfrak{E}_1$. Daher ist T Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$ und folglich Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, w.z.b.w.

[21]) Für diesen Satz wird wegen des endlichen Defekts von $T(\mathfrak{E})$ das Hahn-Banachsche Theorem nicht benötigt.

Wir erklären den Index $\varkappa(T)$ einer σ-Transformation wie in Definition 2 und erhalten die Aussagen: *Aus* $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $ST \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$ *und* $\varkappa(ST) = \varkappa(S) + \varkappa(T)$; $\Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ *ist eine Halbgruppe;* ferner: *Aus* $T_0 \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *folgt* $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *und* $\varkappa(T_0 + V) = \varkappa(T_0)$ für eine beliebige kompakte stetige lineare Abbildung V von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$[22]).

Satz 13. *Aus* $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $ST \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$ *und* $\varkappa(ST) = \varkappa(S) + \varkappa(T)$.

Beweis. Offenbar sind die Dimensionen des Kerns von ST und die Kodimension (Defekt) von $ST(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{G}$ endlich. Es bleibt zu zeigen, das ST Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ist mit abgeschlossenem Bildraum. Sei

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{E}) \tag{3.5}$$

direkte topologische Summe. Da $\mathfrak{N}(S)$ endliche Dimension besitzt und $S(\mathfrak{F})$ abgeschlossen ist, ist auch $ST(\mathfrak{E}) = SP(\mathfrak{F})$ abgeschlossen. Bedeutet nämlich P den zu (3.5) gehörigen stetigen Projektor von $\mathfrak{F}$ auf $T(\mathfrak{E})$, so ist ersichtlich $SPT = ST$; und $SP = S(I - Q) = S - SQ$ ($Q = I - P$ stetiger Projektor von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$) ist nach [*12*, Satz 7] ein (auf $\mathfrak{U}$ verschwindender) Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$, also auch Homomorphismus von $T(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{G}$ mit abgeschlossenem Bildraum. Sei nun $\mathfrak{O}$ eine beliebige offene Menge in $\mathfrak{E}$; dann ist, da $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $\mathfrak{O}' = T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$ und folglich $ST(\mathfrak{O}) = SP(\mathfrak{O}')$ offen in $ST(\mathfrak{E})$, d.h. ST Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$, w.z.b.w.

Ersetzt man im Beweis von Satz 6 das orthogonale Komplement eines Teilraumes jeweils durch ein topologisches Komplement, was für σ-Transformationen stets möglich ist (alle vorkommenden Teilräume sind von endlicher Dimension oder Kodimension), so überträgt sich dieser Beweis wörtlich auf den vorliegenden Fall (vgl. Satz 11, Korollar).

Ein bemerkenswertes Gegenstück zu Satz 13 bildet

Satz 14. *Es seien R bzw. S stetige lineare Abbildungen von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ beliebige lokalkonvexe Räume bedeuten mögen. Ist dann $T = RS$ σ-Transformation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$: $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$, so sind entweder beide Relationen: $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ und $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ erfüllt oder beide nicht erfüllt.*

Beweis. Wir haben zu zeigen: a) *Aus* $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und b) *aus* $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *folgt* $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

a) Da der Kern $\mathfrak{N}(T)$ endlichdimensional ist, gilt das Gleiche für $\mathfrak{N}(S)$. Ferner ist für $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}(T) \oplus \mathfrak{E}_1$, $S(\mathfrak{E}_1) + \mathfrak{N}(R)$ abgeschlossen in $\mathfrak{F}$ wegen der Stetigkeit von R. $T = RS$ ist Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$, also $\overline{S(\mathfrak{E}_1)} \cap \mathfrak{N}(R) = \{\vartheta\}$ und $S(\mathfrak{E}_1)$ abgeschlossen; um so mehr ist $S(\mathfrak{E}) = S(\mathfrak{E}_1) + S[\mathfrak{N}(T)]$ abgeschlossen in $\mathfrak{F}$. Wir zeigen, daß $S(\mathfrak{E})$ endliche Kodimension besitzt. Wir setzen $\mathfrak{M} = S(\mathfrak{E}) + \mathfrak{N}(R)$; $\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{F}$. Sei $\mathfrak{B}$ ein algebraisches Komplement von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$. Dann ist $\mathfrak{B} \to R(\mathfrak{B})$ 1 — 1-Abbildung und $T(\mathfrak{E}) \cap R(\mathfrak{B}) = \{\vartheta\}$. Da $T(\mathfrak{E})$ endliche Kodimension besitzt in $\mathfrak{G}$, ist $R(\mathfrak{B})$, also auch $\mathfrak{B}$ endlichdimensional. Daher besitzt $S(\mathfrak{E})$ endlichen Defekt, denn $\mathfrak{N}(R)$ ist

[22]) Für Stabilitätsaussagen gegenüber Addition vollstetiger Transformationen unter anderen Voraussetzungen s. Schwartz [*18*] und Köthe [*12*, Sätze 7—9].

endlichdimensional nach Voraussetzung. Wir müssen noch zeigen, daß S offene Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $S(\mathfrak{E})$ ist. Sei $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{E}_1$ eine beliebige offene Menge; dann ist $T(\mathfrak{O}_1)$ offen in $T(\mathfrak{E})$ (nach Voraussetzung). Weiter ist R stetige $1-1$-Abbildung von $S(\mathfrak{E}_1)$ auf $T(\mathfrak{E})$, daher $R^{-1}[T(\mathfrak{O}_1)] = S(\mathfrak{O}_1)$ offen in $S(\mathfrak{E}_1)$, folglich S auch offene Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $S(\mathfrak{E})$, w.z.b.w.

b) Da $T(\mathfrak{E})$ endlichen Defekt in $\mathfrak{G}$ besitzt, gilt dies auch von $R(\mathfrak{E}_2)$, $\mathfrak{E}_2 = S(\mathfrak{E})$, um so mehr also von $R(\mathfrak{F})$. Ferner ist $R(\mathfrak{E}_2) = T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen nach Voraussetzung und $\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{E}_2$ mit endlichdimensionalem $\mathfrak{U}$. Daher ist $R(\mathfrak{F})$ abgeschlossen in $\mathfrak{G}$. Weiter ist $\mathfrak{N}(R) \cap S(\mathfrak{E})$ endlichdimensional, weil dies für $\mathfrak{N}(T)$ gilt. Aber $S(\mathfrak{E})$ hat endlichen Defekt, daher $\mathfrak{N}(R)$ endliche Dimension. Es bleibt noch zu zeigen: R ist offene Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf $R(\mathfrak{F})$. Sei Q die stetige Projektion von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$ längs $\mathfrak{E}_2$ (s. oben), dann ist $R_0 = R(I-Q)$ eine auf $\mathfrak{U}$ verschwindende lineare Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf $T(\mathfrak{E})$. Nun ist R_0 Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$: Sei $\mathfrak{O}'$ offen in $S(\mathfrak{E})$. Dann ist $\mathfrak{O} = S^{-1}(\mathfrak{O}')$ offen in $\mathfrak{E}$, und $T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$. Daher ist $R_0(\mathfrak{O}_1) = R_0(\mathfrak{O}') = T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$ für beliebiges offenes $\mathfrak{O}_1 \in \mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{O}_1 \cap S(\mathfrak{E}) = \mathfrak{O}'$, und $\mathfrak{O}'$ war beliebig. Also ist R_0 Homomorphismus mit endlichdimensionalem Kern und abgeschlossenem Bildraum, und nach [*12*, Satz 7] gilt das Gleiche für $R = R_0 + RQ$, w.z.b.w.

Satz 15. *$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ seien beliebige lokalkonvexe Räume. Ist $T_0 \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und V eine beliebige kompakte stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so ist $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und $\varkappa(T_0 + V) = \varkappa(T_0)$.*

Beweis. Nach Satz 12 haben wir für stetige lineare Abbildungen R, S von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ und stetige Abbildungen endlichen Ranges L_1 bzw. L_2 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich:

$$R(T_0 + V) = I + RV - L_1, \qquad (T_0 + V)\,S = I + VS - L_2$$

Aber $RV - L_1 = V_1$ bzw. $VS - L_2 = V_2$ sind vollstetige Abbildungen in $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$, daher $R(T_0 + V) \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ und $(T_0 + V)\,S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ [*13*], [*22*][23]). Folglich existieren nach Satz 12 zwei stetige Abbildungen R_1 bzw. S_1 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich, so daß mit stetigen Abbildungen endlichen Ranges L_3 bzw. L_4 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich gilt:

$$R_1(I + V_1) = I - L_3, \qquad (I + V_1)\,S_1 = I - L_4.$$

Daher haben wir auch $R_2(T_0 + V) = I - L_3$, $(T_0 + V)\,S_2 = I - L_4$ für $R_2 = R_1 R$ und $S_2 = S S_1$. Dies ist (wieder nach Satz 12) aber für $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ hinreichend. Zum Beweis der Indexrelation benutzen wir jetzt, daß (Satz 14) die Hilfsabbildungen R, R_1, R_2 und S, S_1, S_2 sämtlich σ-Transformationen sind. Es gilt nach Satz 13

$$\varkappa[R(T_0 + V)] = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + V) = \varkappa(I + V_1) = 0$$
$$\varkappa(RT_0) = \varkappa(R) + \varkappa(T_0) = \varkappa(I + V_1 + RV) = 0.$$

Hierbei ist $\varkappa(I + V_1) = \varkappa(I + V_1 + RV) = 0$ [*13*]. Damit ist der Satz bewiesen.

[23]) Aus jeder dieser Relationen folgt nach Satz 14 bereits $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, wenn man berücksichtigt, daß (nach dem gleichen Satz) auch R, S σ-Transformationen sein müssen.

Literatur

(Die mit einem * versehenen Arbeiten sind in russischer Sprache geschrieben)

[1]* Atkinson, F. V.: Normale Auflösbarkeit linearer Gleichungen in normierten Räumen. Mat. Sbornik **28** (70), 1, 3—14 (1951). — [2] Atkinson, F. V.: On relatively regular operators. Acta Scient. Math. **15**, 38—56 (1953/54). — [3] Bourbaki, N.: Éléments de math.: Topologie générale, chap. I, II. Act. sci. industr. 858 (Paris 1951). — [4] Bourbaki, N.: Éléments de math.: Espaces vectoriels topologiques, chap. I, II. Act. sci. industr. 1189 (Paris 1953). — [5] Carleman, T.: Sur la résolution de certaines équations intégrales. Ark. för mat., astr. och fys. **16**, Nr. 26 (1922). — [6] Giraud, G.: Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application. Ann. Éc. Norm. Sup. **51**, 251—372 (1934). — [7] Giraud, G.: Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples. Ann. Ec. Norm. Sup. **56**, 119—172 (1939). — [8]* Gochberg, I. Z.: Über eine Anwendung der Theorie normierter Ringe auf singuläre Integralgleichungen. Uspechi Mat. Nauk SSSR **13**, 163—176 (1949). — [9] Graves, L. M.: A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations. Trans. Amer. M. S. **79**, 141—149 (1955). — [10]* Halilov, S. J.: Lineare singuläre Gleichungen in normierten Ringen. Isv. Akad. Nauk SSSR **13**, 163—176 (1949). — [11] Hausdorff, F.: Zur Theorie der linearen metrischen Räume. Crelles J. **167**, 294—311 (1932). — [12] Köthe, G.: Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen. Portug. Math. **13** (3), 97—104 (1954). — [13] Leray, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Scient. Math. **12**B, 177—186 (1950). — [14]* Michlin, S. G.: Singuläre Integralgleichungen. Uspechi Mat. Nauk **3** (3), 29—112 (1948). — [15] Muskhelishvili, N. I.: Singular integral equations. Groningen 1953. — [16]* Nikolskij, S. M.: Lineare Gleichungen in normierten linearen Räumen. Isv. Akad. Nauk SSSR, Math. Ser. **7** (3), 147—166 (1943). — [17] Noether, F.: Über eine Klasse von singulären Integralgleichungen. Math. Ann. **82**, 42—63 (1921). — [18] Schwartz, L.: Homomorphismes et applications completement continues. C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 2472—2473 (1953). — [19] Söhngen, H.: Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation. Math. Z. **60**, 31—51 (1954). — [20] Sz.-Nagy, B.: On the stability of the index of unbounded linear transformations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **3** (3), 49—51 (1952). — [21]* Vecoua, N. P.: Systeme singulärer Integralgleichungen. Moskau 1950. — [22] Williamson, J. H.: Compact linear operators in linear topological spaces. J. London math. Soc. **29**, 149—156 (1954). — [23] Zygmund, A., and A. P. Calderon: On the existence of certain integrals. Acta math. **88**, 85—139 (1952).

Leipzig, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Mai 1956)

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 164—172 (1956)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen

(III. Mitteilung)

Von

FRIEDRICH KASCH

§ 1. Ergebnisse

1. In den zwei vorangehenden Mitteilungen mit dem gleichen Titel [2], [3][1]) habe ich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen aufgestellt, wobei vorausgesetzt wurde, daß einer der Summanden eine positive Dichte besitze und der andere eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen sei. Inzwischen erschien eine Arbeit von A. BRAUER [1][2]), in der sich dieser mit demselben Problem beschäftigt und dabei zu folgendem Ergebnis gelangt:

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte

$$\alpha \leq \tfrac{1}{2}, \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung

$$\lambda \geq \tfrac{3}{2}, \tag{2}$$

dann gilt für die Dichte γ der Summenmenge[3]) *$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Abschätzung*

$$\gamma \geq \alpha + \tfrac{1}{2}\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\}.$$

Es erhebt sich die Frage, in welcher Beziehung dieses Ergebnis und sein Beweis zu den Abschätzungen und der Schlußweise aus I und II stehen.

Wie im folgenden gezeigt werden soll, kann auf der Grundlage von I und II unter schwächeren Voraussetzungen — insbesondere unter Vermeidung von (1) und Abschwächung von (2) — ein schärferes Ergebnis bewiesen werden. Dabei stellt außerdem — wie ich glaube — der hier mitgeteilte Beweis eine Vereinfachung gegenüber dem Beweis in [1] dar und ist auch abgesehen von der dadurch erzielten Verbesserung von Interesse. Im einzelnen sollen hier die folgenden Sätze bewiesen werden.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α, ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung λ und gilt*

$$\lambda \geq \frac{3 + \alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)^2}{2(3-2\alpha)}, \tag{3}$$

[1]) Wir zitieren im folgenden [2] bzw. [3] durch I bzw. II. Es werden die gleichen Bezeichnungen und Definitionen wie in I und II benutzt.

[2]) Diese Arbeit wurde ohne Kenntnis von I und II abgefaßt.

[3]) Bei A. BRAUER [1] wird nicht $0 \in \mathfrak{B}$ vorausgesetzt, jedoch die Summenmenge als Menge aller $a + e\,b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ und $e = 0$ oder 1 erklärt, was offenbar die gleiche Summenmenge $\mathfrak{C}$ liefert.

dann besteht für die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$\gamma \geq \alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{4}$$

Ersetzt man (3) durch eine stärkere Voraussetzung, dann kann (4) verschärft werden. Dies besagt

Satz 2. *Gilt in Satz 1 an Stelle von* (3)

$$\lambda \geq \frac{6 + 39\alpha - 38\alpha^2 + 8\alpha^3}{2(3 - 2\alpha)(2 + 3\alpha - 2\alpha^2)}, \tag{5}$$

dann besteht die Abschätzung

$$\gamma \geq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{6}$$

Wie man leicht feststellt, sind die in (3) und (5) rechts stehenden Ausdrücke als Funktionen von α für $0 \leq \alpha \leq 1$ monoton wachsend. Daher ergibt sich sofort, daß für $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ Voraussetzung (3) überhaupt keine Beschränkung für λ bedeutet, während (5) $\lambda \geq 1\frac{7}{12}$ nach sich zieht, was bereits günstiger als (2) ist. Für $0 \leq \alpha \leq 1$ liefert (3) im ungünstigsten Fall (für $\alpha = 1$) die Schranke $\lambda \geq \frac{3}{2}$ und (5) $\lambda \geq 1\frac{5}{6}$.

Ersetzt man die finiten durch die asymptotischen Begriffe (im Sinne von I und II), dann besteht der folgende Satz.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der asymptotischen Dichte α^*, und ist $\mathfrak{B}$ eine asymptotische Basis der asymptotischen mittleren Ordnung λ^*, dann gilt für die asymptotische Dichte γ^* der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ die Abschätzung*

$$\gamma^* \geq \alpha^* + \frac{1}{2}\left\{\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4} - \sqrt{\left(\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4}\right)^2 - 3\alpha^*(1-\alpha^*)}\right\}.$$

2. In I waren die Abschätzungen

$$\begin{cases} \gamma \geq \alpha\left(1 + c(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right), \quad \gamma \geq \alpha\left(1 + c(1-\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right) \\ \text{mit} \\ \qquad c(\alpha) = \dfrac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \end{cases} \tag{7}$$

bewiesen worden. Dabei ist die erste Abschätzung für $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ und die zweite für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ besser. Wie man leicht nachrechnet, ist (4) dann und nur dann besser als (7), wenn [außer (3)]

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 + \sqrt{\alpha + \alpha}\right) \qquad \text{für} \quad 0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}$$

bzw.

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1 + \sqrt{1 - \alpha + 1 - \alpha}\right) \qquad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

gilt. Da die rechts stehenden Funktionen von α monoton zunehmend bzw. abnehmend sind und für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Wert $3 + \sqrt{2}$ annehmen, ist folglich (4)

dann und nur dann besser als (7), wenn $\lambda < 3 + \sqrt{2} = 4{,}4\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt. Entsprechend stellt man fest, daß (6) dann und nur dann besser als (7) ist, falls [außer (5)] $\lambda < 13{,}2\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt.

3. Man wird sich fragen, ob die in dieser und den vorhergehenden Arbeiten aufgestellten Abschätzungen in der Nähe der bestmöglichen derartigen Abschätzung liegen. Es soll hier gezeigt werden, daß sie jedenfalls für mittlere Werte von α (d.h. α in der Nähe von $\frac{1}{2}$) nicht „wesentlich" von der bestmöglichen Abschätzung abweichen. Setzt man die Abschätzung in der Form

$$\gamma - \alpha \geq c\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \tag{8}$$

an, wobei $c = c(\alpha)$ eine stetige Funktion von α sei, dann gilt, wie sogleich gezeigt werden soll, notwendig

$$c \leq \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{9}$$

Das liefert für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Bedingung $c \leq 2$, während die bisherigen Abschätzungen für $\alpha = \frac{1}{2}$ und beliebiges λ bereits $c > \frac{3}{4}$ ergeben.

Die Schranke (9) wird durch das folgende Beispiel geliefert. Es seien

$$\mathfrak{A} = \{1, 2, \ldots, rn, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots\},$$
$$\mathfrak{B} = \{0, 1, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots,$$

wobei n, r, s beliebige natürliche Zahlen mir $r < s$ sind; dann gilt

$$\alpha = \frac{r}{s}, \quad \gamma = \frac{rn+1}{sn} = \alpha + \frac{1}{sn}, \quad \lambda = \frac{sn+1}{2}.$$

Aus (8) ergibt sich damit

$$c \leq \frac{sn+1}{2sn\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{2sn\alpha(1-\alpha)},$$

und da diese Beziehung für jedes natürliche n gilt, folgt (9).

Eine entsprechende Aussage besteht auch für die asymptotischen Begriffe, wie das folgende Beispiel zeigt: Es seien mit natürlichen Zahlen $r < s$ und $n \geq 2$

$$\mathfrak{A} = \{sn^{3^i} + 1,\ sn^{3^i} + 2, \ldots, rn^{3^{i+1}};\ i = i_0, i_0 + 1, \ldots\}\ ^{4}),$$
$$\mathfrak{B} = \{sn^{3^i} + 1,\ sn^{3^i} + 2, \ldots, sn^{3^{i+1}-1};\ i = 0, 1, \ldots\};$$

dann gilt, wie man leicht nachrechnet

$$\alpha^* = \frac{r}{s}, \quad \gamma^* = \alpha^* + \frac{1}{n}, \quad \lambda^* = \frac{n+1}{2}.$$

Daraus folgt wieder $c(\alpha^*) \leq \frac{1}{2\alpha^*(1-\alpha^*)}$, wenn $c(\alpha^*)$ stetig vorausgesetzt wird und der Ungleichung $\gamma^* - \alpha^* \geq c(\alpha^*)\,\frac{\alpha^*(1-\alpha^*)}{\lambda^*}$ genügen soll.

[4]) i_0 ist in Abhängigkeit von r und s so groß zu wählen, daß diese Kennzeichnung von $\mathfrak{A}$ sinnvoll ist.

§ 2. Beweise

1. Da die Beweise von Satz 1 und Satz 2 nahezu analog verlaufen, soll nur der Beweis von Satz 2 vollständig ausgeführt werden. Auf den Beweis von Satz 1 geben wir lediglich einige Hinweise. Statt Satz 2 beweisen wir sogleich die folgende Aussage:

Satz 2a. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α mit $0<\alpha<1$, ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der endlichen mittleren Ordnung λ und gilt (5), dann genügt die Anzahlfunktion $C(n)$ der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ für jede natürliche Zahl n der Abschätzung*

$$\frac{C(n)}{n} \geq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}.$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) gilt.

Daß aus dieser Aussage Satz 2 folgt, ist unmittelbar klar, wenn man noch beachtet, daß Satz 2 für $\alpha=0$ und $\alpha=1$ trivialer Weise gültig ist.

2. Abweichend von der bisherigen Schreibweise, verstehen wir jetzt unter α eine feste reelle Zahl mit $0<\alpha<1$. Ferner sei $(A+B)(n)$ die Anzahlfunktion der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. In Abänderung des Reduktionssatzes aus II[5]) gilt der folgende

Reduktionssatz. *Es sei $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende fest vorgegebene Menge*[6]*), und es seien α und $\varkappa$ reelle Zahlen. Besteht dann für alle Mengen $\mathfrak{A}$ und alle natürlichen Zahlen n, die*

$$\frac{A(i)}{i} \geq \alpha, \quad i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

und

$$\min_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n}, \tag{12}$$

$$\min_{i=1,\ldots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n} \tag{13}$$

genügen, die Ungleichung

$$\frac{(A+B)(n)}{n} > \varkappa, \tag{14}$$

dann gilt diese für alle Mengen $\mathfrak{A}$ und natürliche Zahlen n, die nur (11) allein genügen. Diese Aussage bleibt richtig, wenn in (14) an Stelle von $>$ das Zeichen $\geq$ steht.

Beweis. Induktion nach n. Für $n=1$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung, denn dann folgen (12) und (13) aus (11). Sie sei bis $n-1$ bewiesen [und zwar für alle Mengen $\mathfrak{A}$, die $A(i)\geq \alpha i$, $i=1,\ldots,n-1$ genügen]. Sei $\mathfrak{A}$

[5]) Der Reduktionssatz aus II ist zum Beweis der vorliegenden Behauptung nicht zu verwenden, weil die behauptete Abschätzung (6) bei festem λ wegen (5) nicht für alle Mengen $\mathfrak{A}$ bewiesen werden kann.

[6]) Unter einer Menge wollen wir im folgenden stets eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen verstehen.

eine beliebige Menge, die (11) erfüllt; gelten dafür die Bedingungen (12) und (13), so ist nichts zu beweisen. Sei zunächst (13) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(m)}{m} < \frac{(A+B)(n)}{n};$$

dann folgt die Behauptung auf Grund der Tatsache, daß sie für m bereits gilt. Sei nun (12) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(m)}{m} < \frac{A(n)}{n};$$

dann betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{A}_m = \{a - m;\ a \in \mathfrak{A},\ a > m\}.$$

Für diese gilt offenbar

$$A_m(r) = A(r+m) - A(m) \geq A(m)\left\{\frac{r+m}{m} - 1\right\} \geq \alpha r, \qquad r = 1, \dots, n-m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist daher

$$(A_m + B)(n-m) > \varkappa(n-m), \tag{15}$$

bzw.

$$(A_m + B)(n-m) \geq \varkappa(n-m),$$

falls in (14) das Zeichen $\geq$ steht. Liegt eine natürliche Zahl $r \leq n-m$ in $\mathfrak{A}_m + \mathfrak{B}$, so liegt $r+m$ in $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, und zwar im Intervall $m < r+m \leq n$, also gilt

$$(A_m + B)(n-m) \leq (A+B)(n) - (A+B)(m). \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung für $\mathfrak{A}$ und m die Behauptung.

Wie unmittelbar zu sehen, folgt auf Grund dieses Reduktionssatzes Satz 2a aus

Satz 2b. *Es seien $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der mittleren Ordnung $\lambda < \infty$ und α eine (5) genügende reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für jede Menge $\mathfrak{A}$ und jede natürliche Zahl n mit*

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n} \geq \alpha, \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n} \tag{17}$$

die Ungleichung

$$\frac{(A+B)(n)}{n} \geq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\} \tag{18}$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) gilt.

3. Dieser Satz wird nun bewiesen. In I und II hatten wir zwei Funktionen benutzt, die in bezug auf eine feste natürliche Zahl n und eine feste Menge

$\mathfrak{P}$ folgendermaßen definiert waren:

$D(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$;

$E(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \mathfrak{P}(n)$.

Diese Funktionen werden im folgenden (bei festem n) für verschiedene Mengen $\mathfrak{P}$ benutzt; zur Unterscheidung wird jeweils die zugrunde gelegte Menge als Index angehängt, also z. B. $D_{\mathfrak{A}}(m)$, $E_{\mathfrak{R}}(m)$. Seien ferner $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{C} \cap \overline{\mathfrak{A}}$; dann gilt wegen $0 \in \mathfrak{B}$, d. h. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ offenbar $R(m) = C(m) - A(m)$, $(m = 1, 2, \ldots)$.

Von A. BRAUER[7]) übernehmen wir den folgenden

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{B}$ *eine die* 0 *enthaltende Basis der mittleren Ordnung* λ, *dann gilt für jede natürliche Zahl* $k \leq n$:

$$\lambda k R(n) - \sum_{m=1}^{k} \left(E_{\mathfrak{R}}(m) + R(m)\right) \geq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m). \tag{19}$$

In I (und II) hatten wir die Beziehung

$$\sum_{m=1}^{k} E_{\mathfrak{R}}(m) = \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{R(m+k+1) - R(m+k)\right\}$$

bewiesen[8]). Wir setzen nun

$$2k \geq n-1 \tag{20}$$

voraus. Dann gilt

$$\sum_{m=1}^{k} R(m) - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{C(m+k+1) - C(m+k)\right\} \geq 0,$$

womit aus (19) folgt:

$$\lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\} \geq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m).$$

Wie bereits in I gezeigt, gilt als Abschätzung nach unten

$$\sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m) \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen zusammen liefern

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} \\ \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} C(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}. \end{array}\right. \tag{21}$$

Zum Beweis von Satz 1 benutzt man stattdessen die Ungleichung, die man hieraus erhält, wenn man rechts in der Summe $C(m)$ durch $A(m)$ ersetzt.

[7]) Siehe [1], Formel (23).

[8]) Siehe I, Hilfssatz 2; daß hier $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ in I steht, spielt beim Beweis von Hilfssatz 2 keine Rolle; dieser gilt für beliebige Mengen.

Wir setzen jetzt (17) voraus und schreiben im folgenden zur Abkürzung

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n} = \alpha', \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{C(i)}{i} = \frac{C(n)}{n} = \gamma, \quad \gamma - \alpha' = \varrho', \quad \gamma - \alpha = \varrho,$$

so daß insbesondere $R(n) = \varrho' n$ ist.

Aus (21) folgt nach dem Vorbild in I, indem man auf der rechten Seite $C(m)$ durch γm abschätzt und dann auf die Summe Abelsche Summation ausübt:

$$(22)\quad \lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} \geq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(m)}{2} + \gamma \Big\{ (n-k-1) A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) \Big\}.$$

4. Wir setzen jetzt im Einklang mit (20) $k = [n/2]$ und unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.

n gerade: Jetzt ist $k = \frac{n}{2}$, $n - k = \frac{n}{2}$, $k + 1 = \frac{n}{2} + 1$.

Daher folgt aus (22)

$$(23)\quad \lambda \frac{n}{2} R(n) - \binom{R(n)}{2} \geq (1-\gamma) \sum_{m=n/2}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \gamma \Big(\frac{n}{2} - 1 \Big) A(n) + \gamma A\Big(\frac{n}{2}\Big).$$

Setzt man

$$\delta_m = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m+1 \in \mathfrak{A} \\ 1 & \text{falls} \quad m+1 \in \overline{\mathfrak{A}}, \end{cases}$$

dann gilt offenbar

$$A(m) = A(m + \delta_m), \qquad \sum_{m=l}^{n-1} \delta_m = \bar{A}(n) - \bar{A}(l).$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=n/2}^{n-1} A(m) \geq \alpha' \sum_{m=n/2}^{n-1} (m + \delta_m) \geq \alpha' \Big(\frac{3}{2} n - 1 \Big) \frac{n}{4} + \alpha' (1 - \alpha') \frac{n}{2}.$$

Geht man damit in (23) ein, so ergibt sich

$$(24)\quad \lambda \varrho' - \varrho'^2 - \frac{\alpha'}{4} \varrho' \geq \frac{3}{4} \alpha' (1-\alpha') + \frac{1}{2n} \big\{ \alpha' (1-\alpha')(3-2\alpha') - \varrho' (2 + 3\alpha' - 2\alpha'^2) \big\}.$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt dessen die Ungleichung

$$(25)\qquad \lambda \varrho' - \varrho'^2 \geq \frac{3}{4} \alpha' (1-\alpha') + \frac{1}{2n} \big\{ \alpha' (1-\alpha')(3-2\alpha') - 2\varrho' \big\}.$$

5. Wir wollen jetzt feststellen, daß man in (24) überall α' durch α ersetzen kann, wobei nach Voraussetzung $\alpha' \geq \alpha$ gilt. Das ist erlaubt, falls die Ableitung der linken Seite nach α' kleiner oder gleich der der rechten Seite ist, d. h. falls

$$(26)\quad -\lambda + \frac{7}{4}\gamma - \frac{3}{2}\alpha' \leq \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\alpha' + \frac{1}{2n} \big\{ 5 - 7\alpha' + 4\alpha'^2 - \varrho' (3 - 4\alpha') \big\}$$

gilt. Nun ist aber wegen $\lambda \geq 1$

$$\frac{7}{4}\gamma \leq \lambda + \frac{3}{4}$$

und

$$5-7\alpha'+4\alpha'^2-\varrho'(3-4\alpha') \geq \begin{cases} 2-3\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für } \alpha' \leq \frac{3}{4} \\ 5-7\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für } \alpha' \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

woraus (26) folgt. Aus (24) erhält man also

$$(27)\quad \lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{4}\varrho \geq \frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-\varrho(2+3\alpha-2\alpha^2)\}.$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt (26)

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha') \leq \frac{3}{4}-\frac{3}{2}\alpha'+\frac{1}{2n}\{5-10\alpha'+6\alpha'^2\}$$

zu beweisen. Wegen $5-10\alpha'+6\alpha'^2>0$ ist dies richtig, falls

$$2\gamma \leq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

gilt. Für $\gamma \leq \frac{7}{8}$ ist dies unmittelbar klar. Ist $\gamma-\alpha \geq \frac{1}{4}$, so gilt wegen

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$$

die Behauptung $\gamma-\alpha \geq \frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$. Sei also $\gamma>\frac{7}{8}$ und $\gamma<\frac{1}{4}+\alpha$, d.h. $\frac{5}{8}<\alpha$. Dann gilt

$$2\gamma \leq 2 \leq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2} \leq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

für alle $\alpha' \geq \alpha$. Aus (25) folgt daher

$$(28)\qquad \lambda\varrho-\varrho^2 \geq \frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-2\varrho\}.$$

6. Jetzt wird die Voraussetzung (5) benutzt, um zu zeigen, daß die in (27) rechts stehende geschweifte Klammer positiv ist oder aber (18) gilt. Angenommen, diese Klammer wäre nicht positiv, d.h. es gelte

$$\varrho \geq \frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2};$$

dann folgt (18) sofort aus der Tatsache, daß (5) äquivalent mit

$$\frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2} \geq \frac{1}{2}\left\{\lambda-\frac{\alpha}{4}-\sqrt{\left(\lambda-\frac{\alpha}{4}\right)^2-3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

ist, was man leicht nachrechnet. Aus (28) folgt also

$$(29)\qquad \lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{2}\varrho>\frac{3}{4}\alpha(1-\alpha),$$

oder (18) ist erfüllt. Aus (29) folgt aber ebenfalls wieder (18) (mit dem Zeichen $>$), so daß (18) für jedes gerade n gilt.

Analog schließt man unter Verwendung von (3) beim Beweis von Satz 1.

7. *n ungerade.* Jetzt ist $k=\frac{n-1}{2}$, $n-k=k+1=\frac{n+1}{2}$. Daher folgt jetzt aus (22)

$$\lambda\frac{n-1}{2}R(n)-\binom{R(n)}{2}\geq(1-\gamma)\sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1}A(m)-\binom{A(n)}{2}+\gamma\frac{n-1}{2}A(n).$$

Durch die gleiche Schlußweise wie bei geradem n erhält man hieraus

$$(30)\quad \lambda\varrho'-\varrho'^2-\frac{\alpha'}{4}\varrho'\geq\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha')+\frac{1}{n}\left\{(\lambda-1)\varrho+\alpha'(1-\gamma)\left(1-\alpha-\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}-\alpha\right)\right)\right\}.$$

Ist $\lambda=1$, so ist $\gamma=1$; ferner gilt dann wegen (5) $\alpha<\frac{1}{4}$ und folglich ist Ungleichung (18) erfüllt.

Ist $\lambda>1$, so ist die in (30) rechts stehende Klammer positiv und aus (30) folgt

$$(31)\qquad \lambda\varrho'-\varrho'^2-\frac{\alpha'}{4}\varrho'>\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha').$$

Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man darin α' durch α ersetzt, denn für die Ableitungen beider Seiten nach α' gilt

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha')+\frac{\alpha'}{2}-\frac{\gamma}{4}\leq\frac{3}{4}(1-2\alpha'),$$

was mit $7\gamma\leq 4\lambda+3$ äquivalent ist. Man hat also jetzt wieder (29) erhalten, woraus die behauptete Ungleichung (18) folgt.

Beim Beweis von Satz 1 erhält man in analoger Weise statt (31)

$$\lambda\varrho'-\varrho'^2>\tfrac{3}{4}\alpha'(1-\alpha').$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle. Ist $\gamma\leq 2\alpha$, dann gilt für die Ableitungen beider Seiten nach α' und für alle $\alpha'\geq\alpha$

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha')\leq\tfrac{3}{4}(1-2\alpha'),$$

so daß die zu beweisende Ungleichung

$$\gamma>\alpha+\tfrac{1}{2}\left\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

folgt. Ist aber $\gamma>2\alpha$, so ist diese Ungleichung unmittelbar zu verifizieren.

8. Der Beweis von Satz 3 soll nicht ausgeführt werden. Er kann leicht nach dem Vorbild in II erfolgen, indem man von der (21) entsprechenden asymptotischen Formel ausgeht und diese für eine solche Folge von n abschätzt, für die $\frac{C(n)}{n}\to\gamma^*$ gilt.

Literatur

[1] BRAUER, A.: On the Schnirelmann density of the sum of two sequences. Math. Z. **63**, 529—541 (1956). — [2] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62**, 368—387 (1955). — [3] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen (II. Mitt.). Math. Z. **64**, 243—257 (1956).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. Mai 1956)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 173—188 (1956)

Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen

Von

ALEXANDER DINGHAS

1. Vorbereitende Tatsachen. Grundbegriffe. Es bedeute E^n den gewöhnlichen euklidischen Zahlenraum. Das Zeichen $+$, angewandt auf Punkte P, Q von E^n, soll im folgenden deren übliche vektorielle Verknüpfung bedeuten. Der Begriff des Punktes λP bei gegebenem P und reellem λ wird als bekannt vorausgesetzt.

Sind A, B zwei zunächst beliebige Punktmengen von E^n, so soll die durch die Gleichung

$$A + B = \{P + Q \mid P \in A,\ Q \in B\} \tag{1.1}$$

definierte Menge als die MINKOWSKIsche Summe von A und B bezeichnet werden. Danach gilt stets $A + \emptyset = \emptyset$. Entsprechend definieren wir die Menge λA (A reell) durch die Gleichung

$$\lambda A = \{\lambda P \mid P \in A\}. \tag{1.2}$$

Es gilt stets

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\mu\lambda) A.$$

Bedeutet O den Nullpunkt von E^n, so sieht man leicht, daß dieser und nur dieser für jedes $A \in E^n$ den Gleichungen

$$A + O = A, \quad 0 \cdot A = O \tag{1.3}$$

genügt. Will man also innerhalb der Gesamtheit der Punktmengen von E^n einen brauchbaren Kalkül begründen, so muß man dabei, wie dies auch manchmal getan wird, die Nullmenge $\emptyset$ ausschließen. Die MINKOWSKIsche Addition (1.1) kann unter Zugrundelegung von (1.2) zu der MINKOWSKIschen Vereinigung $\lambda A + \mu B$ (λ, μ reell) erweitert werden. Da diese Operation die assoziative Eigenschaft $(\lambda A + \mu B) + \nu C = \lambda A + (\mu B + \nu C)$ aufweist, so bildet der abstrakte Raum aller nichtleeren Mengen von E^n mit Rücksicht auf die Kommutativität von (1.1) eine kommutative, additive Halbgruppe. Im folgenden nennen wir eine mit Hilfe des Zeichens $+$ auf solche Weise gebildete Halbgruppe einen MINKOWSKIschen Halbmodul und bezeichnen diesen mit $\mathfrak{H}$ [1].

[1]) Man vgl. z. B. FENCHEL, W.: Über die neuere Entwicklung der BRUNN-MINKOWSKIschen Theorie der konvexen Körper. Neuvième Congrès des Mathématiciens Scandinaves (Helsinki), 1938.

Wie bekannt, gilt, sofern A, B beliebig sind,

$$(\lambda+\mu)A \subseteqq \lambda A + \mu A \qquad (\lambda, \mu \geqq 0) \tag{1.4}$$

und stets

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B. \tag{1.5}$$

Fragt man nach dem Teilmodul von $2^{\mathfrak{H}_n}$, für dessen Elemente ebenfalls

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \tag{1.6}$$

gilt, so sieht man leicht, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür die ist, daß A stets konvex sein muß. Der MINKOWSKIsche Halbmodul, der aus allen nicht leeren, beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Punktmengen von E^n besteht, wird im folgenden mit $2^{\mathfrak{M}}$ bezeichnet werden. Infolge der Gültigkeit von (1.6) spielt dieser Halbmodul innerhalb des durch den klassischen Satz von BRUNN-MINKOWSKI entstandenen Fragenkomplexes eine ausgezeichnete Rolle.

Man betrachte jetzt, was wir im folgenden stets tun werden, denjenigen Teilmodul $2^{\mathfrak{H}}$ von $2^{\mathfrak{H}_n}$, der aus allen beschränkten, abgeschlossenen, nicht leeren Punktmengen von E^n besteht, und ordne jedem $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ seine konvexe Hülle $[A] \in 2^{\mathfrak{M}}$ zu. Da, wie man leicht sieht, stets

$$[\lambda A + \mu B] = \lambda[A] + \mu[B] \tag{1.7}$$

gilt, so wird durch den Prozeß $A \to [A]$ eine Überdeckung (im Sinne von $[A] \supseteqq A$) von $2^{\mathfrak{H}}$ gewonnen, die sämtliche Vorteile der beiden distributiven Gesetze (1.6) und (1.5) aufweist. Sie spielt für die nachfolgende Integrationstheorie eine fundamentale Rolle.

2. Der Entfernungsbegriff. Erste Hilfssätze. Es bedeute $|P, Q|$ die gewöhnliche, euklidische Entfernung zweier Punkte von E^n. Sind dann $A, B \in 2^{\mathfrak{H}}$, so soll der Ausdruck

$$|A, B| = \operatorname{Max}\left\{\sup_{P \in A}\left(\inf_{Q \in B}|P, Q|\right), \sup_{Q \in B}\left(\inf_{P \in A}|P, Q|\right)\right\} \tag{2.1}$$

die Entfernung von A und B heißen. Diese Entfernung erfüllt bekanntlich[2]) die Forderungen:

1. $|A, B| > 0$ für jedes $A \neq B$.
2. $|A, B| = |B, A|$.
3. $|A, B| \leq |A, C| + |B, C| \quad (C \in 2^{\mathfrak{H}})$.

Für die weitere Entwicklung der MINKOWSKIschen Theorie sind folgende Hilfssätze von Nützlichkeit:

[2]) Man vgl. z. B. BOULIGAND, G.: Les principes de l'Analyse géométrique, Bd. II, S. 147. Paris 1950.

Hilfssatz 1. *Es seien* $A_k, B_k \in 2^{\mathfrak{E}}$, $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$. *Ist*

$$A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_l A_l \tag{2.1}$$

und

$$B = \lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_l A_l, \tag{2.2}$$

so gilt

$$|A, B| \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|. \tag{2.3}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist einfach. Es sei in der Tat $P^* \in A$, $Q^* \in B$. Dann ist $P^* = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_l P_l$, $Q^* = \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_l Q_l$ mit $P_k \in A_k$, $Q_k \in B_k$. Daraus folgt

$$|P^*, Q^*| \leq \lambda_1 |P_1, Q_1| + \cdots + \lambda_l |P_l, Q_l|.$$

Wählt man hier die Punkte P_k fest, so folgt leicht

$$\inf_{Q \in B} |P^*, Q| \leq \sum_1^l \lambda_k \inf_{Q_k \in B_k} |P_k, Q_k|,$$

und somit für jeden Punkt $P \in A$

$$\inf_{Q \in B} |P, Q| \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\sup_{P \in A} \left\{ \inf_{Q \in B} |P, Q| \right\} \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|,$$

und durch Vertauschung der Rolle der P_k und Q_k (also auch der von P und Q) die Ungleichung (2.3).

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel für spätere Grenzübergänge ist das Analogon des Bolzano-Weierstrassschen Satzes für den Raum $2^{\mathfrak{E}}$.

Hilfssatz 2 (Bolzano-Weierstrass). *Es bezeichne* (A_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ *eine abzählbare Menge gleichmäßig beschränkter, abgeschlossener Mengen von* E^n. *Dann läßt sich aus* (A_k) *eine Teilfolge* $(A_{k'})$ *bestimmen, die gegen eine Menge* A *von* $2^{\mathfrak{E}}$ *derart konvergiert, daß*

$$\lim_{k' \to \infty} |A_{k'}, A| = 0 \tag{2.4}$$

wird[3]).

[3]) Der Hilfssatz 2, der oft unter dem Namen Auswahlsatz geführt wird, wurde meines Wissens zuerst von Blaschke (man vgl. Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 62) für konvexe A_k bewiesen und zum Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes verwendet. Eine Übertragung desselben auf den Raum $2^{\mathfrak{E}}$ gab neuerdings Hadwiger [Ein Auswahlsatz für abgeschlossene Punktmengen. Portugal. Mathem. **8**, 13—15 (1949)]. Man vgl. auch die lithographierte Vortragssammlung: Seminar on convex sets (The Institute for Advanced Study, Princeton N. J. 1949/50), insbesondere Vortrag V (A. M. Macbeath, Compactness Theorems). Beide letztgenannten Beweise, die anscheinend gleichzeitig entstanden sind, fußen auf denselben methodischen Grundlagen.

Der Inhalt dieses Hilfssatzes ist in folgender allgemeiner Aussage über kompakte Räume enthalten:

Es sei H ein kompakter (HAUSDORFFscher) *metrischer Raum, und es bezeichne 2^H den Raum, der aus allen nichtleeren, beschränkten, abgeschlossenen Teilmengen von H besteht. Dann ist 2^H ein kompakter metrischer Raum.*

Die Metrik in 2^H wird hier natürlich unter Zugrundelegung der Metrik $|P, Q|$ in H durch (2.1) definiert werden. Für den Beweis dieses allgemeinen Kompaktheitssatzes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen[4]).

Man betrachte jetzt bei gegebenem $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aller Mengen von der Form $\lambda_1 A + \cdots + \lambda_l A$ mit $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = 1$. Offenbar ist $\mathfrak{A}$ als Teilklasse in $2^{\mathfrak{H}}$ enthalten und hat als kleinstes Element die Menge A.

Wir zeigen:

Hilfssatz 3. *Die Menge $[A]$ ist das Supremum von $\mathfrak{A}$*[5]).

In der Tat gilt zunächst bei vorgegebenem $A \in \mathfrak{A}$

$$\lambda_1 A + \cdots + \lambda_l A \subseteqq \lambda_1 [A] + \cdots + \lambda_l [A] = [A].$$

Es sei nun A^* eine abgeschlossene Menge von E^n, die jedes Element von $\mathfrak{A}$ enthält. Es seien P_1, P_2 zwei beliebige Punkte von A. Dann enthält offenbar A^* jeden Punkt von der Form $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) und hiermit auch $[A]$. Somit ist $[A]$ das Supremum von $\mathfrak{A}$.

3. Mengenfamilien. Stetigkeit. Eine eindeutige Mengenfunktion (A_λ) wird im Intervall

$$J: \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \tag{3.1}$$

[6]) dadurch gegeben, daß jedem $\lambda \in J$ eindeutig eine Menge $A_\lambda \in 2^{\mathfrak{H}}$ zugeordnet wird. Ist J_{λ_0} ($\lambda_0 \in J$) ein abgeschlossenes Teilintervall von J, das den Punkt λ_0 enthält, so soll die Zahl

$$\sup_{\lambda', \lambda'' \in J_{\lambda_0}} |A_{\lambda'}, A_{\lambda''}| = \omega(J_{\lambda_0}) \tag{3.2}$$

die Schwankung von A_λ in J_{λ_0} heißen. Die Funktion (A_λ) soll nun in λ_0 stetig heißen, falls die Schwankung

$$\omega(\lambda_0) = \lim_{|J_{\lambda_0}| \to 0} \omega(J_{\lambda_0}) \tag{3.3}$$

gleich Null wird. Hierbei soll $|J_{\lambda_0}|$ die Länge von J_{λ_0} bedeuten. Gilt $\omega(J_\lambda) = 0$ für jedes $\lambda \in J$, so heißt (A_λ) stetig in J. Analog definiert man eindeutige, stetige Funktionen in allgemeineren Mengen als J.

---

[4]) Man vgl. z. B. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre, 3. Aufl., S. 148. Leipzig 1935, oder etwa den zweiten Band der KURATOWSKISchen Topologie.

[5]) Zur Begriffsbildung vgl. man etwa: KELLEY, I. L., General Topology, S. 32. New York 1955.

[6]) Der Fall eines beliebigen, endlichen J kann, was die Begriffsbildungen anbetrifft, durch dessen lineare Abbildung auf (3.1) erledigt werden.

Ist (A_λ) stetig in $\lambda_0 \in J$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Intervall $J_{\lambda_0}^*$ derart, daß für jedes $J_\lambda \subseteqq J_{\lambda_0}^*$ die Ungleichung

$$\sup_{\lambda \in J_{\lambda_0}} |A_\lambda, A_{\lambda_0}| < \varepsilon \tag{3.4}$$

gilt.

Ist (A_λ) eine vorgelegte Funktion in J, so soll $([A_\lambda])$ die zu (A_λ) zugehörige Deckelfunktion heißen. Wir beweisen den Satz:

Hilfssatz 4. *Ist (A_λ) stetig in $\lambda_0 \in J$, so trifft dies auch für die Funktion $([A_\lambda])$ zu.*

Beweis. Es bezeichne, wie üblich, bei gegebenem A, A^h $(h > 0)$ die Außenmenge von A in der Entfernung h. Sind nun $A, B \in 2^{\mathfrak{P}}$, so gilt bekanntlich

$$|A, B| = \inf\{h \mid A^h \supseteqq B, B^h \supseteqq A\}.$$

Ist nun $A \subseteqq B^h$, so ist

$$[A] \subseteqq [B^h] \subseteqq [B]^h,$$

und somit folgt aus $|A, B| \leq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die Ungleichung $|[A], [B]| \leq \varepsilon$. Das beweist die Behauptung.

4. Bildung RIEMANN-MINKOWSKIscher Summen. Man zerlege J in endlich viele punktfremde Intervalle $J_1, \ldots, J_l (J_k \cap J_r = \emptyset,\ k \neq r)$, und nenne den dadurch ausgedrückten Sachverhalt $J = \bigcup_1^l J_k$ eine RIEMANNsche Zerlegung von J. Bedeutet dann $|J_k|$ die Länge von J_k, so gilt $|J| = \sum_1^l |J_k|$. Mit Hilfe einer solchen Zerlegung von J bilde man die R.EMANN-MINKOWSKIschen Summen

$$S = |J_1|\, A_{\xi_1} + \cdots + |J_l|\, A_{\xi_l}, \tag{4.1}$$

indem man $\xi_k \in J_k$ wählt. Die Gesamtheit aller MINKOWSKIschen Summen von der Form (4.1), wobei sowohl die Zerlegung von J wie auch die Wahl der Punkte $\xi_k (\xi_k \in J_k)$ beliebig sein können, soll mit $\mathfrak{R}(S)$ bezeichnet werden. Setzt man jedesmal $\delta_M = \operatorname{Max}\{|J_1|, \ldots, |J_l|\}$, so besteht das Hauptproblem der RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrationstheorie darin, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen eine Menge S_0 existiert, für welche

$$S_0 = \lim_{\delta_M \to 0} \{|J_1|\, A_{\xi_1} + \cdots + |J_l|\, A_{\xi_l}\} \tag{4.2}$$

gilt. Ist neben (4.1) eine zweite MINKOWSKIsche Summe

$$S' = |J_1'|\, A_{\xi_1'} + \cdots + |J_l'|\, A_{\xi_l'} \tag{4.3}$$

gegeben, so bilde man eine RIEMANNsche Zerlegung $J = \bigcup_1^{l''} J_s''$ von J, deren Teilintervalle J_s'' den Bedingungen

$$J_s'' \subseteqq J_k, \quad J_s'' \subseteqq J_r' \qquad (s = 1, 2, \ldots, l'') \tag{4.4}$$

genügen. Diese Relationen sind, wie bekannt, so zu interpretieren, daß jedes Intervall J_s'' in einem bestimmten J_k und einem bestimmten J_r' enthalten ist. Die Existenz einer „maximalen" solchen gemeinsamen Unterteilung von J wird uns hier nicht interessieren. Man konstruiere jetzt die MINKOWSKIschen Summen

$$S_1 = |J_1''|\, A_{\eta_1} + \cdots + |J_{r''}''|\, A_{\eta_{r''}} \tag{4.5}$$

und

$$S_1' = |J_1''|\, A_{\eta_1'} + \cdots + |J_{r''}''|\, A_{\eta_{r''}'} \tag{4.6}$$

durch folgende Vorschrift:

1. Gilt $J_s'' \subseteqq J_k$, so ist $\eta_s = \xi_k$.
2. Gilt $J_s'' \subseteqq J_r'$, so ist $\eta_s' = \xi_r'$.

Diese Zuordnungen sind eindeutig. Die Summen (4.5) und (4.6) sind nicht notwendigerweise in $\mathfrak{R}(S)$ enthalten, da sie ja keineswegs RIEMANN-MINKOWSKIsche Summen zu sein brauchen. Das ist nur dann der Fall, falls $A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}$ dem Wertevorrat von $A_\lambda (\lambda \in J_s'')$ angehören. Diese Mengen sind nützlich und leisten bei der Abschätzung der Entfernung von S und S' gute Dienste. Im allgemeinen gelten infolge (1.4) die Relationen $S_1 \supseteqq S$ und $S_1' \supseteqq S'$. Da hier die Gleichungen $S_1 = S$, $S_1' = S'$ nur dann gelten, wenn alle A_λ konvex sind, so beschränken wir uns zunächst auf solche Funktionen (A_λ), deren sämtliche Wertemengen A_λ konvexe Punktmengen von E^n sind. Der Fall beliebiger $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ führt, wie bald gezeigt werden soll, zwangsläufig auf das Integral der Mengenfunktion $([A_\lambda])$.

5. Integrierbare konvexe Mengenfunktionen. Der Konvergenzbeweis. Eine Mengenfunktion (A_λ), deren Wertemengen gleichmäßig beschränkte konvexe Punktmengen von $2^{\mathfrak{H}}$ sind, soll RIEMANN-MINKOWSKI-integrierbar heißen, wenn die Grenzmenge S_0 bei beliebiger Wahl der ξ_k im Sinne von (4.2) existiert. Wir zeigen:

Hat $\{\lambda | \omega(\lambda) > 0\}$ das LEBESGUEsche Maß Null, so ist (A_λ) RIEMANN-MINKOWSKI-integrierbar.

Der Beweis stützt sich auf folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 5. *Die Menge* $E_\varepsilon = \{\lambda | \omega(\lambda) \geqq \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ *ist stets abgeschlossen.*

Es sei E_ε' nicht leer, und λ_0 ein Häufungspunkt von E_ε. Ist dann $\eta > 0$ und $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ eine Umgebung U von λ_0, so gibt es in ihr mindestens zwei Punkte λ_0', λ_0'' $(\lambda_0' \neq \lambda_0'')$ von E_ε mit $|\lambda_0' - \lambda_0''| < 2\eta$ und $|A_{\lambda_0'}, A_{\lambda_0''}| \geqq \varepsilon$. Daraus folgt

$$\sup_{\lambda' \lambda'' \in U} |A_{\lambda'}, A_{\lambda''}| \geqq |A_{\lambda_0'}, A_{\lambda_0''}| \geqq \varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung.

Der Beweis nachfolgenden Hilfssatzes wird dem Leser überlassen:

Hilfssatz 6. *Ist* (A_λ) *in jedem Punkt eines abgeschlossenen Teilintervalls* J_1 *von* J *stetig, so ist* (A_λ) *dort gleichmäßig stetig.*

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zum Beweis der Integrierbarkeit von (A_λ) zurück. Ist zunächst $\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ leer, so betrachte man die zwei MINKOWSKISCHEN Summen (4.1) und (4.3) mit $\delta_M = \mathrm{Max}\{|J_k|, |J_r'\} < \eta$ und bilde eine gemeinsame Unterteilung von J, etwa $J = \bigcup_1^{l''} J_s''$. Dann wird, wegen der Konvexität der A_λ, $S_1 = S$ und $S_1' = S'$. Daraus folgt durch Heranziehung des Hilfssatzes 1

$$|S, S'| \leq \sum_1^{l''} |J_s''|\,|A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}|. \tag{5.1}$$

Nun ist $|\eta_s - \eta_s'| < 2\eta$ $(s = 1, 2, \ldots, l'')$, und somit kann durch die Wahl von η erreicht werden (Hilfssatz 6!), daß für alle s $|A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}| < \varepsilon$ gilt. Somit kann die rechte Seite von (5.1) $\leq \varepsilon$ gemacht werden. Bevor wir daraus weitere Konsequenzen ziehen, soll noch der allgemeine Fall erledigt werden.

Es sei $\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ nicht leer. Dann ist E_ε von einem ε $(0<\varepsilon<\varepsilon_0)$ an ebenfalls nicht leer. Da ferner für jedes $\varepsilon>0$, $E_\varepsilon \subseteqq \{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ gilt, so kann man E_ε durch endlich viele abgeschlossene Intervalle $a_k \leq \lambda \leq b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ überdecken, deren Gesamtlänge ε nicht übersteigt. Es bezeichnen $J_1^0, \ldots, J_N^0$ die Intervalle $a_k - \varepsilon/2N < \lambda < b_k + \varepsilon/2N$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Dann besteht $J - \bigcup_1^N J_k^0$ aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen $I_1, \ldots, I_{N_1}$, die nur Punkte mit $\omega(\lambda) < \varepsilon$ enthalten. Man betrachte die Abschätzung

$$|S, S'| \leq \sum_1^N |J_s''|\,|A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}| \tag{5.2}$$

und wähle η so klein, daß für je zwei Punkte ξ' und ξ'' eines und desselben Intervalls I_k gilt $|A_{\xi'}, A_{\xi''}| \leq \varepsilon$. Man teile die Intervalle J_s'' in drei Klassen ein:

1. Intervalle J_s'', die in einem I_k liegen.
2. Intervalle, die in keinem I_k liegen und
3. die übrigen J''.

Die Teilsumme über die Intervalle 1. ist offenbar $\leq \varepsilon$. Da ferner die Mengen A_λ sämtlich in einer endlichen Kugel um den Nullpunkt liegen, so liefern die beiden letzten Kategorien 2. und 3. einen Beitrag $\leq C\varepsilon\,(C>0)$, wobei die Konstante C von ε unabhängig ist. Das erledigt den allgemeinen Fall. Man betrachte nun irgendeine abzählbare Folge (S_n) von MINKOWSKISCHEN Summen von der Form (4.1) mit $\delta_M = 1/n$ und bestimme mit Hilfe des Auswahlsatzes (Hilfssatz 2) die (abgeschlossene) Grenzmenge $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Da nun diese Menge unabhängig von der speziellen Folge MINKOWSKISCHER Summen ist, so setzen wir

$$\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda = \lim_{\delta_M \to 0} \{|J_1|\, A_{\xi_1} + \cdots + |J_l|\, A_{\xi_l}\}, \tag{5.3}$$

und nennen die abgeschlossene Menge links das RIEMANN-MINKOWSKISCHE Integral von (A_λ).

Ich erwähne hier einige wichtige Eigenschaften des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals. Es gelten folgende einigermaßen wichtige Sätze:

Satz 1. *Sind* (A_λ) *und* (B_λ) *in* J RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar, so ist* $(\alpha A_\lambda+\beta B_\lambda)$ *für* $\alpha>0$, $\beta>0$ RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar und es gilt*

$$\int_0^1 d\lambda\,\{\alpha A_\lambda+\beta B_\lambda\}=\alpha\int_0^1 d\lambda\,A_\lambda+\beta\int_0^1 d\lambda\,B_\lambda. \tag{5.4}$$

Satz 2. *Ist* (A_λ) RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar und* $0<\vartheta<1$, *so gilt*

$$\int_0^1 d\lambda\,A_\lambda=\int_0^\vartheta d\lambda\,A_\lambda+\int_\vartheta^1 d\lambda\,A_\lambda. \tag{5.5}$$

Setzt man $B_\lambda=O$, so folgt insbesondere aus (5.4)

$$\int_0^1 d\lambda(\alpha A_\lambda)=\alpha\int_0^1 d\lambda\,A_\lambda. \tag{5.6}$$

Der Beweis dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeit. Insbesondere folgt (5.5) durch Betrachtung sämtlicher MINKOWSKIscher Summen von der Form (4.1), bei denen $\lambda=\vartheta$ als Einteilungspunkt vorkommt.

Besteht (A_λ) aus endlich vielen festen konvexen Mengen $A_1,\ldots,A_N$, also

$$(A_\lambda)=\left\{A_k\,|\,\lambda\in J_k,\ J=\bigcup_1^l J_k,\ J_r\cap J_s=\emptyset,\ r\neq s\right\},$$

so geht das RIEMANN-MINKOWSKIsche Integral (5.3) in die MINKOWSKIsche Summe $|J_1|A_1+\cdots+|J_l|A_l$ über. Daß hier $\sum_1^l|J_k|=1$ genommen wurde, ist natürlich belanglos, da man ja die Definition des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals für ein beliebiges Intervall der λ-Achse geben kann.

Etwas mehr Schwierigkeit bereitet die Definition des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals für eine beliebige Mengenfunktion (A_λ) $(A_\lambda\in 2^{\mathfrak{H}},\ \lambda\in J)$. In diesem Zusammenhang ist zunächst zu bemerken, daß für eine konstante Mengenfunktion $(A_\lambda)=A\in 2^{\mathfrak{H}}$ stets $\int_0^1 d\lambda\,[A]=[A]$ gilt. Das kann man folgendermaßen sehen: Man betrachte eine RIEMANN-MINKOWSKIsche Summe $S=|J_1|A+\cdots+|J_l|A$ und setze $|J_k|=\lambda_k-\lambda_{k-1}$ $(\lambda_0=0,\ \lambda_l=1)$. Sind dann P, Q zwei Punkte von A, so enthält S den Punkt $\mu P+\nu Q$ mit $\mu=\lambda_r$, $\nu=1-\lambda_r$ $(0<r<l)$ und insofern kommen (bei der gestellten Bedingung δ_M) die Mengen von $\mathfrak{R}(S)$ jedem Punkt von $[A]-A$ beliebig nahe. Der Leser wird den ausführlichen Beweis selbst durchführen können. Da nun für eine stückweise konstante Funktion, etwa

$$(A_\lambda)=\left\{A_k\,|\,\lambda_{k-1}\leq\lambda<\lambda_k,\ A_k\in 2^{\mathfrak{H}},\ k=1,\ldots,l\right\},$$

ebenfalls

$$\int_0^1 d\lambda\,A_\lambda=|J_1|\,[A_1]+\cdots+|J_l|\,[A_l]$$

gilt, so definieren wir allgemein für jede Mengenfunktion (A_λ), welche die eingangs dieser Nummer formulierte Integrierbarkeitsbedingung erfüllt, das Integral $\int_0^1 d\lambda A_\lambda$ durch die Gleichung

$$\int_0^1 d\lambda A_\lambda = \int_0^1 d\lambda [A_\lambda]. \tag{5.7}$$

Ist $n=1$, so geben diese Entwicklungen eine geometrische Interpretation des RIEMANNschen Integrals einer reellen nicht negativen Funktion $f(\lambda)$ über das Intervall J, indem man als A_λ die Intervalle $0 \leq \lambda \leq f(\lambda)$ nimmt. Bei höheren Dimensionen wird wohl der Begriff komplizierter, und erst die Konvexität von A_λ (welche wohl einigermaßen die Rolle der Eindeutigkeit übernimmt) schafft ein klareres geometrisches Bild. Natürlich kann man neben dem Intervall J auch mehrdimensionale Intervalle J_p betrachten und, sofern die Mengenfamilien von mehreren Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ abhängt, wobei der Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ in J_p liegen soll, Integrale über J_p definieren. Wir gehen darauf nicht näher ein.

6. Verallgemeinerung der BRUNN-MINKOWSKIschen Sätze. Bedeutet allgemein $L(M)$ das LEBESGUEsche Maß einer meßbaren Punktmenge von E^n, so gipfelt bekanntlich die BRUNN-MINKOWSKIsche Theorie der konvexen Körper in der Aussage

$$L(A_0 + A_1)^{1/n} \geq L(A_0)^{1/n} + L(A_1)^{1/n} \tag{6.1}$$

für je zwei $A_0, A_1 \in 2^{\mathfrak{M}}$, und in der Behauptung, daß

$$\Phi(\vartheta) = L\big((1-\vartheta) A_0 + \vartheta A_1\big)^{1/n} \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1) \tag{6.2}$$

bei gegebenen A_0, A_1 eine konkave Funktion von ϑ sei. Ich erwähne hier diese Aussagen getrennt, da bekanntlich[7]), während die erste Ungleichung, wie dies zuerst LUSTERNIK gezeigt hat[8]), für viel allgemeinere Halbmoduln als $2^{\mathfrak{M}}$ (z.B. gilt sie für je zwei Elemente von $2^{\mathfrak{B}}$) richtig bleibt, die Konkavitätseigenschaft von $\Phi(\vartheta)$ eine spezifische Eigenschaft des Halbmoduls $2^{\mathfrak{M}}$ zu sein scheint. Der Hauptsatz vorliegender Arbeit lautet nun:

Satz 3. *Es sei (A_λ) eine in J-*RIEMANN-MINKOWSKI*-integrierbare Mengenfunktion.*

Dann gilt

$$L\Big(\int_0^1 d\lambda A_\lambda\Big)^{1/n} \geq \int_0^1 L(A_\lambda)^{1/n} d\lambda. \tag{6.3}$$

Ist für jedes $\lambda \in J$, $L\big([A_\lambda]\big) > 0$, so kann hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintreten, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

---

[7]) Man vgl. z.B. FENCHEL: loc. cit. Fußnote [1]).

[8]) LUSTERNIK, L.: Die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung für meßbare Mengen. Compt. Rend. Acad. Sci. UdSSR. **3**, 55—58 (1935).

1. *Es gibt eine in J* RIEMANN*-integrierbare, reelle Funktion* $f(\lambda)$*, die außerhalb von* $E=\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ *positiv ist.*

2. *Es gilt außerhalb von E*

$$A_\lambda = f(\lambda)\,A \tag{6.4}$$

mit einer festen, konvexen Menge $A\in 2^{\mathfrak{M}}$ *und* $L(A)>0$.

Sieht man vom Zusatz über das Eintreten des Gleichheitszeichens ab, so ist der Beweis von (6.3) einfach. Es sei $\varepsilon>0$. Man schreibe A für $\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ und bilde die in 3. erklärte Menge A^ε. Nun weiß man, daß zu dem gegebenen $\varepsilon>0$ ein $\eta=\eta(\varepsilon)$ existiert, derart, daß jede RIEMANNsche Summe S mit $\delta_M<\eta$ in A^ε enthalten ist. Daraus folgt nach dem klassischen Satz von BRUNN-MINKOWSKI

$$L(A^\varepsilon)^{1/n}\geq \sum_1^l |J_k|\, L[A_{\xi_k}]^{1/n}. \tag{6.5}$$

Jetzt lasse man δ_M auf irgendeine Weise gegen Null konvergieren. Da jedes $[A_\lambda]$ eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge ist, so ist $L([A_\lambda])$ in jeder Stetigkeitsstelle von A_λ stetig, und somit konvergiert die rechte Seite von (6.5) mit abnehmenden δ_M gegen die rechte Seite von (6.3). Danach wird zunächst für jedes $\varepsilon>0$,

$$L(A^\varepsilon)^{1/n}\geq \int_0^1 L([A_\lambda])^{1/n}\, d\lambda. \tag{6.6}$$

Nun ist A eine beschränkte abgeschlossene Menge. Läßt man $\varepsilon\to 0$ konvergieren, so konvergiert $L(A^\varepsilon)$ gegen $L(A)$, und somit wird schließlich

$$L\Big(\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda\Big)^{1/n}\geq \int_0^1 L([A_\lambda])^{1/n}\, d\lambda \geq \int_0^1 L(A_\lambda)^{1/n}\, d\lambda. \tag{6.8}$$

7. Vorbereitende Tatsachen zum Einzigkeitsbeweis. Die Diskussion des Eintretens des Gleichheitszeichens in (6.3) geschieht am einfachsten auf Grund einer verschärften HÖLDERschen Ungleichung, die im folgenden bewiesen werden soll.

Man setze bei gegebenen $r_1,\ldots,r_l$ $(r_k>0,\ r_1+\cdots+r_l=1)$

$$g(\alpha_s)=\sum_{i>k} r_i r_k(\alpha_i-\alpha_k)^2. \tag{7.1}$$

Dann gilt für reelle α_k

$$\sum_1^l r_k\alpha_k^2-\Big(\sum_1^l r_k\alpha_k\Big)^2 = g(\alpha_s)\geq 0\ ^{9}). \tag{7.2}$$

---

[9]) Setzt man $F_k=(r_1+\cdots+r_k)(r_1\alpha_1^2+\cdots+r_k\alpha_k^2)-(r_1\alpha_1+\cdots+r_k\alpha_k)^2$ mit $k=1,2,\ldots,l-1$, so gilt $F_{k+1}-F_k=\sum_{\lambda=1}^{k} r_{k+1}r_\lambda(\alpha_{k+1}-\alpha_\lambda)^2$. Daraus folgt (7.1) wegen $F_2=r_1r_2(\alpha_1-\alpha_2)^2$ und $r_1+\cdots+r_l=1$ ohne Schwierigkeit.

Verbindet man diese Identität mit der klassischen Ungleichung

$$\sum_1^l r_k \alpha_k \geq \prod_1^l \alpha_k^{r_k}, \tag{7.3}$$

so erhält man, wenn man α_k^2 durch α_k $(\alpha_k > 0)$ ersetzt,

$$r_1 \alpha_1 + \cdots + r_l \alpha_l \geq \alpha_1^{r_1} \ldots \alpha_l^{r_l} + g\left(\sqrt{\alpha_s}\right). \tag{7.4}$$

Man ersetze nun hier die α_k durch die ebenfalls positiven Zahlen $a_{k\nu}$ (ν fest) und lasse dann ν die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ durchlaufen. Normiert man noch die $a_{k\nu}$ durch die Forderung $a_{k1} + \cdots + a_{km} = 1$, so wird nach Addition der entsprechenden Ungleichungen

$$1 \geq \sum_{\nu=1}^m \left\{ \prod_{k=1}^l a_{k\nu}^{r_k} \right\} + \sum_{\nu=1}^m g\left(\sqrt{a_{s\nu}}\right). \tag{7.5}$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann ein, wenn für jedes k, $a_{k\nu} = b$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ mit $b_1 + \cdots + b_m = 1$ ist.

Läßt man die Bedingung $a_{k1} + \cdots + a_{km} = 1$ fallen, so erhält man aus (7.5) eine Verschärfung der HÖLDERschen Ungleichung. Es gilt dann der

Hilfssatz 7. *Es seien $a_{k\nu}\{k = 1, \ldots, l, \nu = 1, \ldots, m\}$ positive Zahlen. Ferner sei $\delta_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Setzt man dann*

$$\alpha_{k\nu} = a_{k\nu} : \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu} \delta_\nu \tag{7.6}$$

und

$$G(\alpha_{rs}) = \prod_{k=1}^l \left\{ \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu} \delta_\nu \right\} \sum_{\nu=1}^m \left\{ \sum_{i>k} r_i r_k \left(\sqrt{\alpha_{i\nu}} - \sqrt{\alpha_{k\nu}}\right)^2 \delta_\nu^2 \right\}, \tag{7.7}$$

so wird

$$\prod_{k=1}^l \left\{ \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu} \delta_\nu \right\}^{r_k} \geq \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \left\{ \prod_{k=1}^l a_{k\nu}^{r_k} \right\} + G(\alpha_{rs}). \tag{7.8}$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\alpha_{k\nu} = C_\nu \alpha \, (\alpha > 0, C_\nu > 0)$$

ist.

Das Analogon zu diesem Satz für Integrale soll lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt werden, und zwar den später auftretenden Bedingungen angepaßt.

Hilfssatz 8. *Die Funktionen $f_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, l)$ mögen im Intervall J: $0 \leq \lambda \leq 1$ nicht negativ, beschränkt und* LEBESGUE*-integrierbar sein. Dann gilt*

$$\prod_{k=1}^l \left\{ \int_J f_k \, d\lambda \right\}^{r_k} \geq \int_J \left\{ \prod_{k=1}^l f_k^{r_k} \right\} d\lambda + G(f) \tag{7.9}$$

mit

$$G(f) = \prod_1^l \left\{ \int_J f_k \, d\lambda \right\}^{r_k} \cdot \left\{ \sum_{k>i} r_i r_k \int_J \left(\sqrt{\varphi_i} - \sqrt{\varphi_k}\right)^2 d\lambda \right\} \tag{7.10}$$

und

$$\varphi_k = \varphi_k(\lambda) = f_k(\lambda) : \int_J f_k \, d\lambda \qquad (k = 1, \ldots, l). \tag{7.11}$$

Das Gleichheitszeichen in (7.9) tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn fast überall in J $\varphi_k(\lambda)=\varphi_r(\lambda)$ $(k,r=1,\ldots,l)$ gilt.

8. Die BRUNN-MINKOWSKI-SCHMIDTsche Abbildung. Es sei K ein konvexer Körper von E^n mit inneren Punkten. Andererseits sei $g_K=g_K(P)$ eine in K definierte Punktfunktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $g_K(P)>0$ $(P\in K^*=\operatorname{int}K)$.

2. $g_K(P)$ ist in K^* stetig.

3. $g_K(P)$ ist translationsinvariant. Mit anderen Worten: Geht K durch eine Translation τ in K^τ über, so gilt $g_{K^\tau}(P^\tau)=g_K(P)$.

Mit Hilfe von g_K definiere man nun in E^n (bei festem K) die Funktion $g_n(P)$ durch die Vorschrift

$$g_n(P)=\begin{cases} g_K(P) & P\in K^* \\ 0 & P\notin K^*. \end{cases} \tag{8.1}$$

Man setze jetzt für ein $P=P(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$ und $k=1,2,\ldots,n$

$$g_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})=\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x_1,\ldots,x_{k-1},\xi)\,d\xi \tag{8.2}$$

und definiere mit Hilfe der Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{x_k} g_k(x_1,\ldots,x_{k-1},\xi)\,d\xi=\tau_k\cdot g_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) \tag{8.3}$$

die Funktionen $\tau_k=\tau_k(x_1,\ldots,x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$. Die Integrale können hier, soweit es sich um konvexe Punktmengen handelt, im RIEMANNschen Sinne genommen werden. Durch die Funktionen $\tau_k=\tau_k(x_1,\ldots,x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ wird K^* eineindeutig und stetig auf das Innere des Würfels

$$T_0\colon\quad 0\leq\tau_k\leq 1 \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{8.4}$$

abgebildet. Die Stetigkeit folgt aus der Tatsache, daß die Funktionen g_k sich in der Form

$$g_k(x_1,\ldots,x_k)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x_1,\ldots,x_k,\xi_1,\ldots,\xi_{n-k})\,d\xi_1\ldots d\xi_{n-k} \tag{8.5}$$

darstellen lassen und infolgedessen stetige Funktionen ihrer Argumente sein müssen, soweit diese Koordinaten eines Punktes $P\in K^*$ sind. Eine leichte Überlegung zeigt nun, daß $x_1=x_1(\tau_1)$ eine in $0<\tau_1<1$ stetige, monoton wachsende Funktion von τ_1 ist. Verwendet man diese Tatsache in der Gl. (8.3) für $k=2$, so stellt man fest, daß $x_2=x_2(\tau_1,\tau_2)$ gilt und daß die Abhängigkeit von τ_2 eine monotone ist. Dasselbe gilt allgemein für alle Funktionen

$$x_k=x_k(\tau_1,\ldots,\tau_k) \qquad (1\leq k\leq n).$$

Die Eindeutigkeit $T^*\to K^*$ zeigt man nun so: Zunächst kann ein zweiter Punkt $P'(x_1',\ldots,x_n')$ von K^* nur dann denselben Punkt $T(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ von T_0^* geben,

wenn $x_1' \neq x_1$ ist. Es sei r der kleinste Index mit $x_k = x_k'$. Dann folgt aus (8.3) leicht

$$\int_{x_r'}^{x_r} g_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, \xi)\, d\xi = (\tau_r - \tau_r)\, g_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) = 0,$$

und somit muß $x_r' = x_r$ sein. Die entsprechende Behauptung für die Abbildung $K^* \to T^*$ möge der Leser selbst beweisen.

Die Abbildung $K^* \to T^*$ geht für den Spezialfall $g_K(P) = 1$, also für den Fall, wo die g_k die Inhalte v_k der ebenen Schnitte von K^* darstellen, auf eine mündliche Mitteilung von ERHARD SCHMIDT aus dem Jahre 1943 zurück[10]).

Die Konstante $g_0 = g_0(K)$ ist mit der Funktion $g_n(P)$ durch die Gleichung

$$g_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(P)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{8.6}$$

verbunden. Der Aufbau einer Theorie, ähnlich der BRUNN-MINKOWSKIschen, mit diesem verallgemeinerten Volumen wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

9. Durchführung des Einzigkeitsbeweises. Ist (A_λ) eine Mengenfunktion, die den Zusatzbedingungen des Satzes 3 von 6. genügt, so kann man (6.3) verschärfen und dadurch (6.4) beweisen.

Wir nehmen $g_n^\lambda(P) = \varphi^\lambda(P)$ an, wobei $\varphi^\lambda(P)$ die charakteristische Funktion von A_λ ist, und schreiben $v_0^\lambda, \ldots, v_n^\lambda$ an Stelle von $g_0^\lambda, \ldots, g_n^\lambda$. Die Funktionen $v_k^\lambda = v_k^\lambda(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ hängen lediglich von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$ von $P(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ ab. Ferner verschwinden sämtliche Funktionen $v_1^\lambda, \ldots, v_n^\lambda$ außerhalb A. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 9. *Ist (A_λ) im Punkt $\lambda = \lambda_0 \in J$ stetig und konvergiert $P_\lambda \to P_0$ $(P_\lambda \in A_\lambda,\ P_0 \in A_{\lambda_0}$ fest), so gilt für $k = 1, 2, \ldots, n-1$*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} v_k^\lambda(P) = v_k^{\lambda_0}(P_0). \tag{9.1}$$

Die Aussage (9.1) ist auch für $k = n$ richtig, da für genügend kleine Differenz $|\lambda - \lambda_0|$ P in A_{λ_0} liegt und somit $\varphi^\lambda(P) = \varphi^{\lambda_0}(P_0) = 1$ wird.

Zum Beweis der Behauptung für ein beliebiges $k\,(k < n)$ beachte man, daß man bei gegebenem $\delta > 0$ und $|P, P_0| < \delta$ die Differenz $|\lambda - \lambda_0|$ so klein wählen kann, daß P in A_{λ_0} und P_0 in A_λ liegen. Nun ist

$$|v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| \leq |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P)| + |v_k^{\lambda_0}(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)|,$$

und somit wird, da $\lim_{\lambda \to \lambda_0} |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P)| = 0$ und $\lim_{P \to P_0} |v_k^{\lambda_0}(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| = 0$ ist, $\lim_{\lambda \to \lambda_0} |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| = 0$. Das beweist die Behauptung.

Man bilde jetzt das Innere A_λ^* jedes A_λ auf das Innere T_0^* von T_0 mit Hilfe der BRUNN-MINKOWSKIschen Abbildung ab und bezeichne mit $x_k^\lambda = x_k^\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$

[10]) Man vgl. darüber meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von WULFF für die Gleichgewichtsform von Kristallen. Z. Kristallogr. (A) **105**, 304—314 (1943).

($k=1, \ldots, n$; $\lambda \in J$) die dadurch entstehenden Funktionen. Das nächste Ziel wird sein, mit Hilfe dieser Transformation den Inhalt $|A|$ der Punktmenge $A = \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ nach unten abzuschätzen. Man bilde nach dem Vorbild von 4. die RIEMANN-MINKOWSKIschen Summen

$$S = \sum_1^m |J_k|\, A_{\xi_k} \qquad (\xi_k \in J_k) \tag{9.2}$$

und wähle η so, daß für $\delta_M < \eta$ alle S in A^ε liegen, wobei diese, wie bereits erwähnt, die Parallelmenge von A in der Entfernung ε ist. Setzt man dann, bei festem S,

$$\eta_k = x_k^{\xi_1}(\tau_1, \ldots, \tau_k)\,|J_1| + \cdots + x_k^{\xi_l}(\tau_1, \ldots, \tau_k)\,|J_l|, \tag{9.3}$$

so ist offenbar

$$|A^\varepsilon| \geq \int_S d\eta_1 \ldots d\eta_n. \tag{9.4}$$

Man betrachte jetzt von jedem A_{ξ_k} denjenigen Teil A'_{ξ_k}, dessen Bild bei der BRUNN-MINKOWSKI-SCHMIDTschen Abbildung auf die Menge

$$T_\varepsilon\colon \quad \varepsilon \leq \tau_k \leq 1-\varepsilon \qquad (0<\varepsilon<\tfrac{1}{2};\ k=1,2,\ldots,n) \tag{9.5}$$

abgebildet wird. Die entsprechende lineare Kombination der A'_{ξ_k} sei mit S' bezeichnet. Man kann leicht sehen, daß sowohl jedes A'_{ξ_k} als auch S' konvexe Punktmengen sind. Schreibt man dann für den Augenblick J für das Integral rechts in (9.4), so wird nach bekannten Sätzen

$$J = \int d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1} \int d\eta_n. \tag{9.6}$$

Auf die explizite Angabe der Integrationsgrenzen wird hier verzichtet. Man transformiere nun J auf die Veränderlichen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und beachte, daß dann

$$J \geq \int d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1} \int \frac{\partial \eta_n}{\partial \tau_n}\, d\tau_n = \int \frac{\partial \eta_n}{\partial \tau_n}\, d\tau_n \cdot d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1}$$

wird. Durch n-malige Wiederholung dieses Verfahrens wird schließlich

$$J \geq \int_{T_\varepsilon} \left\{ \prod_1^n \frac{\partial \eta_k}{\partial \tau_k} \right\} d\tau_1 \ldots \tau_n \tag{9.7}$$

Man denke sich jetzt die Funktionen $v_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda)$ als Funktionen des Punktes $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, indem man die $x_1^\lambda, \ldots, x_n^\lambda$ durch $x_1^\lambda(\tau_1), \ldots, x_n^\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ersetzt. Hält man λ fest, so gilt nach den vorherigen Entwicklungen

$$\frac{\partial x_k^\lambda}{\partial \tau_k} = \frac{v_{k-1}^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_{k-1}^\lambda)}{v_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda)}, \tag{9.8}$$

und wir brauchen, um den Grenzübergang $\delta_M \to 0$ in (9.7) durchführen zu können, nur nachzuweisen, daß die rechte Seite hier (bei festem T und jedem k) in jeder Stetigkeitsstelle von A_λ stetig ist. Diese Behauptung ist

offenbar mit Rücksicht auf den Hilfssatz 7 für $k=1$ richtig. Man betrachte jetzt ein festes $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ und nehme an, es wäre für ein $k\,(1 \leq k \leq n)$

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} v_{k-1}^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}) = v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}), \tag{9.9}$$

wobei stets $x_r^{\lambda} = x_r^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ und $x_r^{\lambda'} = x_r^{\lambda'}(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ ist. Nun gilt nach den Entwicklungen von 8

$$\int_{-\infty}^{x_k^{\lambda}} v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}, \xi)\, d\xi = v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda})\, \tau_k$$

und

$$\int_{-\infty}^{x_k^{\lambda'}} v_k^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}, \xi)\, d\xi = v_{k-1}^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'})\, \tau_k.$$

Läßt man also $\lambda' \to \lambda$ konvergieren, so erhält man wegen (9.9)

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} \int_{-\infty}^{x_k'} v_k^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}, \xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x_k} v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}, \xi)\, d\xi,$$

und somit auch (wenn man bedenkt, daß man den Grenzübergang $\lambda' \to \lambda$ unter dem Integralzeichen bedenkenlos ausführen kann) die Gleichungen $\underline{\lim}_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'} = \overline{\lim}_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'} = x_k^{\lambda}$. Daraus folgt aber

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'}(\tau_1, \ldots, \tau_k) = x_k^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_k).$$

Man setze jetzt für den Augenblick bei konstantem $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

$$f_k(\lambda) = \frac{v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda})}{v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_k^{\lambda})} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.10}$$

und beachte, daß

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \eta_k}{\partial \tau_k} \right\} = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{l} f_k(\xi_\nu)\, |J_\nu| \right\}$$

ist und daß mit $\delta_M \to 0$ der Ausdruck rechts gegen $\prod_1^n \left\{ \int_0^1 f_k\, d\lambda \right\}$ konvergiert. Definiert man also die Funktionen $\varphi_k(\lambda)$ durch die Formel (7.11), so erhält man durch Anwendung von (7.9) die Ungleichung

$$|A^{\varepsilon}| \geq \int_{T_\varepsilon} \left\{ \int_0^1 (v_0^{\lambda})^{1/n}\, d\lambda \right\}^n d\tau_1 \ldots d\tau_n + \int_{T_\varepsilon} G(f)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n, \tag{9.11}$$

wobei $G(f)$ durch (7.10) definiert wird. Jetzt berücksichtige man, daß das Integral rechts gleich $(1-2\varepsilon)^n \left\{ \int_0^1 (v_0^{\lambda})^{1/n} d\lambda \right\}^n$ ist. Dann erhält man durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ mit Rücksicht darauf, daß $v_0^{\lambda} = |A_\lambda|$ ist,

$$\left| \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda \right| \geq \left\{ \int_0^1 |A_\lambda|^{1/n}\, d\lambda \right\}^n + \int_T G(f)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{9.12}$$

Hier ist natürlich das letzte Integral als Limes von Integralen $\int_{T_\varepsilon} G(f)\, d\tau_1 \dots d\tau_n$ für $\varepsilon \to 0$ aufzufassen. Soll nun

$$\left| \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda \right|^{1/n} = \int_0^1 |A_\lambda|^{1/n}\, d\lambda \tag{9.12}$$

gelten, so muß $\int_T G(f)\, d\tau_1 \dots d\tau_n$ verschwinden, was mit Rücksicht auf die Struktur von $G(f)$ darauf hinausläuft, daß für $k = 1, \dots, n$ bis auf die üblichen Mengen

$$f_k = \frac{v_{k-1}^\lambda(x_1^\lambda, \dots, x_{k-1}^\lambda)}{v_k^\lambda(x_1^\lambda, \dots, x_k^\lambda)} = C_k(\tau_1, \dots, \tau_k)\, \varphi(\lambda) \tag{9.13}$$

gelten muß. Der Wert von $\varphi(\lambda)$ läßt sich durch Multiplikation dieser Gleichungen untereinander bestimmen. Man findet dann $\varphi(\lambda) = |A_\lambda|^{1/n} > 0$ und somit mit Rücksicht auf frühere Entwicklungen

$$|A_{\lambda'}|^{1/n} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau_k} = |A_\lambda|^{1/n} \frac{\partial x_k^{\lambda'}}{\partial \tau_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Beachtet man jetzt, daß die Koordinaten x_k^λ lediglich von $\tau_1, \dots, \tau_k$ abhängen, so folgt hieraus leicht die Behauptung. Am einfachsten sieht man das ein, wenn man sich nur auf die erste der Gln. (9.13) beschränkt, die Punktmengen A_λ auf ihren Schwerpunkt bezieht und die Richtung der x_1-Achse variieren läßt. Ist dann p_α^λ die Stützfunktion von A_λ in der Richtung $\alpha(\xi_1, \dots, \xi_n)$, so wird

$$|A_\lambda|^{1/n} p_\alpha^{\lambda'} = |A_\lambda|^{1/n} p_\alpha^\lambda. \tag{9.14}$$

Daraus läßt sich die Behauptung über das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6.3) leicht ableiten.

Herrn Dr. W. FELSCHER habe ich an dieser Stelle, für wertvolle Hilfe bei der Durchsicht der Korrekturen, herzlichst zu danken.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 7. April 1956)

MESCHKOWSKI, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 189—202 (1956)

Rekursive reelle Zahlen

Von
HERBERT MESCHKOWSKI

I. Einleitung

In den letzten Jahren sind mehrfach Versuche unternommen worden, die „konstruktiven" Methoden der Theorie der rekursiven Funktionen auch für die Analysis nutzbar zu machen (siehe z. B. Literaturverzeichnis [2], [5], [6], [7]). Die ersten wichtigen Ergebnisse sind von SPECKER [2] gewonnen worden. Er zeigt unter anderem Folgendes:

Es sei $\mathfrak{R}_1$ die Klasse der primitiv rekursiven reellen Zahlen, $\mathfrak{R}_2$ die der primitiv rekursiven Dezimalbrüche, $\mathfrak{R}_3$ die der primitiv rekursiven Schnitte. Dann gilt $\mathfrak{R}_1 > \mathfrak{R}_2 > \mathfrak{R}_3$, wobei die auftretenden Inklusionen echt sind. Damit hängt es zusammen, daß eine Reihe von Sätzen der klassischen Analysis nicht ohne weiteres in einer „rekursiven" gelten.

Nun hat RICE [4] nachgewiesen, daß die drei Klassen $\mathfrak{R}_\nu$ zusammenfallen, wenn man statt der „primitiven" Rekursivität der Zahlenfolgen die „allgemeine" zuläßt. Bei RICE wird aber der Begriff der reellen Zahl nicht „konstruktiv" begründet. Er benutzt (wie auch manche anderen Autoren) stillschweigend den klassischen Begriff der reellen Zahl und nennt eine solche Zahl dann „rekursiv", wenn sie der Grenzwert einer rekursiven und rekursiv konvergenten Folge rationaler Zahlen ist. Es wird dann bei den Beweisen benutzt ([4] S. 786), daß man entscheiden kann, ob eine natürliche Zahl y größer ist als eine „gegebene" reelle Zahl oder nicht. Wenn man sich an die den rekursiven Charakter der Zahl bestimmenden (gegen diese Zahl rekursiv konvergierenden) Folge hält, ist aber eine entsprechende Entscheidung ($a_n > y$ für $n \geq N$) keineswegs immer zu vollziehen.

Auch die Aussage $\alpha = \beta$ für zwei reelle Zahlen wird unter Umständen problematisch, wenn man sie aus den Eigenschaften der rekursiven Folgen begründen will. Neben der von RICE u. a. benutzten „halbklassischen" Betrachtungsweise erscheint deshalb auch eine solche berechtigt, die den vertrauten Begriff der reellen Zahl nicht voraussetzt und von den rekursiven Folgen und ihren Eigenschaften ausgeht. Läßt man nur solche „konsequent konstruktiven" Methoden zu, so zeigt sich, daß der Nachweis für $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ bzw. $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ nicht geführt werden kann (Kap. III dieser Arbeit). Dabei ist $\mathfrak{R}_1'$ die Klasse der allgemein rekursiven reellen Zahlen, $\mathfrak{R}_2'$ die der allgemein rekursiven Dezimalbrüche und $\mathfrak{R}_3'$ die der allgemein rekursiven Schnitte.

Andererseits gelten für die rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen eine Reihe von Sätzen, die als Analoga gelten können für bekannte Sätze über reelle Zahlen (Kap. IV und V) und uns Mut machen können, auch in der Theorie der Funktionen „rekursive" Methoden einzuführen ([5], [6], [7]).

II. Definitionen

Erklärung 1. *Eine Folge $\Phi(n)$ rationaler Zahlen heißt rekursiv*[1]) *(bzw. primitiv rekursiv), wenn*

$$\Phi(n) = \frac{\varphi(n) - \psi(n)}{\chi(n)}$$

und die Folgen $\varphi(n)$, $\psi(n)$ und $\chi(n)$ (primitiv) rekursive Funktionen sind.

Erklärung 2. *Eine (primitiv) rekursive Folge rationaler Zahlen heißt (primitiv) rekursiv konvergent, wenn es eine (primitiv) rekursive Funktion $N(n)$ gibt, so daß*[2])

$$\Phi(\mu) - \Phi(\nu) = o(m)$$

gilt für $\mu, \nu \geq N(m)$.

$\Phi(n)$ heißt *eine rekursive Nullfolge*, wenn es eine rekursive Funktion $N(m)$ gibt, so daß $\Phi(n) = o(m)$ für $n \geq N(m)$. Wir sagen auch: $\Phi(n)$ konvergiert rekursiv gegen die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, wenn $\Phi(n) - \frac{p}{q}$ eine rekursive Nullfolge ist. Statt rekursiv und rekursiv konvergent soll auch kurz *regulär* gesagt werden.

Erklärung 3. *Zwei reguläre Folgen $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ heißen äquivalent (im Zeichen: $\approx$), wenn $\varphi(n) - \psi(n)$ eine reguläre Nullfolge ist.*

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir bei der in Erklärung 2 auftretenden Funktion $N(m)$ voraussetzen, daß

$$N(m+1) \geq N(m) \geq m \tag{1}$$

gilt.

Erklärung 4. *Eine reguläre Folge $\varphi(n)$ hat die Schnitteigenschaft, wenn es rekursive Funktionen $p(q)$ und $N(q)$ gibt, so daß*

$$\frac{p(q)}{q} \leq \varphi(n) < \frac{p(q)+1}{q}$$

für $n \geq N(q)$.

Erklärung 5. *Es seien $b_n = b(n)$ und $a_n = a(n)$ rekursive Funktionen, für die*

$$b(n) \geq 2, \quad a(n) \leq b(n) - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Dann heißen die rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen

$$C(n) = a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_n}{b_1 \cdot b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_1 \ldots b_n} \tag{3}$$

CANTOR-*Folgen. Für $b(n) = 10$ sprechen wir von rekursiven Dezimalfolgen, für $b(n) = n$ von Faktoriellenfolgen.*

---

[1]) „Rekursiv" ohne den Zusatz „primitiv" bedeutet in dieser Arbeit stets „allgemein rekursiv".

[2]) Für $|a| < \frac{1}{10^m}$ sagen wir nach GOODSTEIN: $a = o(m)$.

III. Bemerkungen zu den Sätzen von SPECKER

Nach [*1*, S. 279] gibt es zu einem „deduktiven Formalismus" F (der gewissen dort angegebenen Bedingungen genügt) eine primitiv rekursive Funktion $G(n)$, für die im Formalismus F weder die Aussage $(n)\,(G(n)=0)$ noch ihre Negation formal beweisbar ist.

Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ in einem solchen Formalismus F beweisbar. Dann definieren wir mit Hilfe der zu diesem Formalismus gehörenden primitiv rekursiven Funktion $G(n)$[3]:

$$\varrho(n) = \mu_\nu \left(\nu \leq n \wedge G(\nu) > 0\right)$$

und

$$a(n) = 1 + \operatorname{sgn} \varrho(n) \cdot (-1)^{\varrho(n)} \cdot \frac{1}{10^{\varrho(n)}}. \tag{4}$$

$\varrho(n)$ ist eine primitiv rekursive Funktion, $a(n)$ eine (primitiv) rekursive Folge rationaler Zahlen. Man überzeugt sich leicht, daß $a(n)$ auch rekursiv konvergent ist: Für $m > n \geq N$ ist nämlich

$$|a(m) - a(n)| < \frac{1}{10^N}.$$

Das ergibt sich so: Für $a(m) = a(n)$ ist diese Ungleichung trivial. $a(m) \neq a(n)$ ist aber nur möglich, wenn $a(n) = 1$ und $a(m) \neq 1$ ist. Dann müßte das kleinste ν, für das $G(\nu) > 0$ ist, zwischen n und m liegen:

$$m \geq \varrho(m) > n \geq N.$$

Dann ist aber

$$|a(m) - a(n)| = |a(m)| < \frac{1}{10^{\varrho(m)}} < \frac{1}{10^N},$$

$a(n)$ ist also eine reguläre Folge. Es gibt aber gewiß keinen zu $a(n)$ äquivalenten Dezimalbruch

$$D(n) = d(0) + \frac{d(1)}{10} + \cdots + \frac{d(n)}{10^n}.$$

Denn es ist ja wegen der Eigenschaften von $a(n)$ schon nicht entscheidbar, ob $d(0)$, die „Stelle vor dem Komma", 0 oder 1 sein muß.

Die Annahme, daß $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ formal beweisbar sei, ist also falsch.

Wesentlich einfacher ist es, ein Beispiel einer rekursiven reellen Zahl anzugeben, für die nach dem gegenwärtigen Stand unseres Wissens eine Dezimalbruchentwicklung nicht angegeben werden kann. Wir wollen eine natürliche Zahl eine GOLDBACH-Zahl nennen, wenn $2n$ als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann. Nach der (nicht bewiesenen) GOLDBACHschen Vermutung sind alle natürlichen Zahlen GOLDBACH-Zahlen.

[3] $\sigma(n) = \mu_\nu(\nu \leq \wedge\, \mathfrak{A}(\nu))$ heißt: $\sigma(n)$ ist gleich dem kleinsten $\nu \leq n$, für das die Aussage $\mathfrak{A}(\nu)$ richtig ist, wenn ein solches x existiert; sonst ist $\sigma(n) = 0$.

Die Aussage „n ist eine GOLDBACH-Zahl" kann so formalisiert werden:

$$(Ep)(Eq)[p < 2n \wedge q < 2n \wedge S(p) \leq 2 \wedge S(q) \leq 2 \wedge 2n = p + q].$$

Dabei ist $S(p)$ die (primitiv rekursive) Funktion, die die Anzahl der Teiler von p angibt (einschließlich 1 und p). Es gibt dann eine primitiv rekursive Funktion $g(n)$, die genau dann gleich 0 ist, wenn unsere Aussage richtig ist, sonst aber den Wert (1) annimmt. Mit Hilfe dieser Funktion $g(n)$ definieren wir

$$\varrho^*(n) = \mu_\nu\left(\nu \leq n \wedge g(\nu) = 1\right)$$

und

$$a^*(n) = 1 + \operatorname{sgn} \varrho^*(n)\,(-1)^{\varrho^*(n)} \frac{1}{10^{\varrho^*(n)}}.$$

Dann hat $a^*(n)$ ähnliche Eigenschaften wie $a(n)$. Solange die GOLDBACHsche Vermutung nicht bewiesen ist, kann auch keine zu $a^*(n)$ äquivalente Dezimalfolge angegeben werden.

Eine entsprechende Aussage ist möglich über die Beweisbarkeit von $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$. Wir benutzen dabei wieder wie oben die Funktion $\varrho(n)$ und erklären:

$$c(n) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \operatorname{sgn} \varrho(n) \frac{1}{10^{\varrho(n)}}. \tag{5}$$

Der letzte Summand von $c(n)$ hat den Wert 0 oder $10^{-\nu}$, wobei $\nu \leq n$. $c(n)$ ist also von der Form

$$c(n) = \frac{e_1}{10} + \frac{e_2}{10^2} + \cdots + \frac{e_n}{10^n},$$

wobei alle Zahlen e_ν bis auf eine gleich 3 sind. Diese eine könnte gleich 4 sein: Jedenfalls ist im Formalismus F nicht beweisbar, daß *alle* e_ν gleich 3 sind.

Die durch (5) definierte Folge ist also eine Dezimalfolge, für die Schnitteigenschaft nicht in F beweisbar ist. Denn es ist ja nicht entscheidbar, ob (von einer gewissen Nummer an) $c(n)$ größer oder kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ kann also nicht in F beweisbar sein.

Ein ähnliches Beispiel kann natürlich wieder mit Hilfe der Funktion $\varrho^*(n)$ gebildet werden. Wir haben also

Satz 1. Die Aussagen $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ und $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ sind nicht formal beweisbar[4].

IV. Schnitteigenschaften der regulären Folgen

Es ist bekannt [3], daß die Faktoriellenfolgen

$$\psi(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\chi(\nu)}{\nu!} \qquad (\chi(\nu) \leq \nu - 1)$$

die Schnitteigenschaft haben. Es gilt

$$\frac{p-1}{q} \leq \psi(n) < \frac{p}{q} \qquad \text{für } n > q,$$

[4]) Vergleiche dazu Satz 2 von [7].

wobei

$$p = [q \cdot \psi(q)] + 1.$$

Das folgt leicht aus der Tatsache, daß

$$[\psi(n) \cdot q] = [\psi(q) \cdot q] \qquad \text{für } n \geq q.$$

In dem Buch von R. PETER [3] wird auch gezeigt, daß umgekehrt jeder irrationalen Zahl r mit der Schnitteigenschaft eine CANTOR-Folge zugeordnet werden kann, die gegen r konvergiert. Der Beweis benutzt aber Ungleichungen mit „gegebenen" Irrationalzahlen. Wir wollen (im Sinne von Kap. 1) unter Verringerung der Voraussetzungen entsprechende Aussagen ableiten für reguläre Folgen.

Erklärung 6. *Eine reguläre Folge $\varphi(n)$ (mit $\varphi(n) \geq 0$[5]) hat die Schnitteigenschaft für den Nenner q, wenn es eine ganze Zahl p und eine natürliche Zahl N gibt, so daß*

$$\frac{p}{q} \leq \varphi(n) < \frac{p+1}{q}$$

gilt für $n \geq N(q)$.

$\varphi(n)$ hat die Schnitteigenschaft für eine Folge von Nennern $q_1, q_2, q_3, \ldots$ ($q_n = q(n)$ sei rekursiv), wenn es eine rekursive Funktion $p(\nu)$ und eine rekursive monoton nicht fallende Funktion $N(\nu)$ gibt, so daß

$$\frac{p(\nu)}{q_\nu} \leq \varphi(n) < \frac{p(\nu)+1}{q_\nu}$$

gilt für $n \geq N(\nu)$.

Die Folge $1 + (-1)^n \frac{1}{n}$ hat offenbar die Schnitteigenschaft für alle $q \neq 1$, die Folge $c(n)$ in (5) hat die Schnitteigenschaft *nicht* für solche Nenner q, die 3 als Primfaktor enthalten.

Satz 2. *Es sei $\Phi(n)$ eine reguläre Folge, die für die Nenner*

$$1, b_1, b_1 b_2, b_1 b_2 b_3, \ldots$$

die Schnitteigenschaft hat. Dabei soll $b_n = b(n)$ eine rekursive Funktion mit $b(n) \geq 2$ sein. Dann gibt es eine zu $\Phi(n)$ äquivalente CANTOR-*Folge*

$$\psi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_1 \cdot b_2} + \cdots + \frac{c_n}{b_1 \cdot b_2 \ldots b_n}$$

mit $c_\nu \leq b_\nu - 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$).

Die Voraussetzungen können wir auch so formulieren:

Es gibt zwei rekursive Funktionen $d(k) = d_k$ und $N(k)$, so daß

$$C \leq \Phi(n) < C + 1 \qquad (C \text{ ganz}) \tag{6}$$

[5]) Für Folgen mit negativem bzw. wechselndem Vorzeichen kann man die Definition sinngemäß variieren.

gilt[6]) für $n \geq N(0)$ und

$$\frac{d_k}{b_1 \dots b_k} \leq \Phi(n) - C < \frac{d_k + 1}{b_1 \dots b_k} \tag{7}$$

für $n \geq N(k)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Wir setzen nun $\Phi(n) - C = \Phi_0(n)$ und

$$\Phi_0(n) = \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_{k-1}}{b_1 \dots b_{k-1}} + \frac{\Phi_k(n)}{b_1 \dots b_k}. \tag{8}$$

Die Zahlen c_k sind dabei rekursiv so definiert:

$$c_0 = 0, \quad c_k = d_k - (a\, b_2 \dots b_k + \dots + c_{k-1} b_k) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots. \tag{9}$$

Es wird also

$$c_1 = d_1, \; c_2 = d_2 - c_1 b_2, \quad \text{usf.}$$

Aus (7), (8) und (9) folgt

$$c_k \leq \Phi_k(n) < c_k + 1 \tag{10}$$

für $n \geq N(k)$. Aus (9) ergibt sich aber weiter:

$$c_{k+1} = d_{k+1} - (c_1 b_2 \dots b_k + \dots + c_{k-1} b_k)\, b_{k+1} - c_k b_{k+1}$$

oder

$$b_{k+1}(d_k - c_k) = d_{k+1} - c_{k+1} - c_k b_{k+1},$$

also

$$c_{k+1} = d_{k+1} - d_k b_{k+1}. \tag{11}$$

Aus (7) folgt nun wegen der Monotonie von $N(k)$:

$$\frac{d_k}{b_1 \dots b_k} \leq \frac{d_{k+1}}{b_1 \dots b_{k+1}} < \frac{d_{k+1} + 1}{b_1 \dots b_{k+1}} \leq \frac{d_k + 1}{b_1 \dots b_k}. \tag{12}$$

Also haben wir

$$d_k \cdot b_{k+1} \leq d_{k+1}, \tag{13}$$

$$d_{k+1} + 1 \leq d_k \cdot b_{k+1} + b_{k+1}, \tag{14}$$

und nach (11), (13) und (14):

$$0 \leq c_{k+1} \leq b_{k+1} - 1. \tag{15}$$

Daß auch $0 \leq c_1 \leq b_1 - 1$ gilt, ergibt sich so: Nach (8) ist

$$\Phi_1(n) = \Phi_0(n) \cdot b_1 = \big(\Phi(n) - C\big)\, b_1;$$

nach (10) und (6) folgt daher

$$c_1 \leq \Phi_1(n) < b_1.$$

Damit ist zunächst gezeigt, daß die Koeffizienten c_k sich rekursiv aus $b(k)$ und $d(k)$ bestimmen lassen, so daß (15) gilt. Die rekursive Konvergenz

[6]) Hier ist die Schnitteigenschaft für den Nenner 1 benutzt.

von $\psi(n)$ folgt jetzt so: Es ist für $m > n \geq N$:

$$\psi(m) - \psi(n) = \frac{c_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \dots + \frac{c_m}{b_1 \dots b_m}$$
$$\leq \frac{b_{n+1} - 1}{b_1 \dots b_{n+1}} + \dots + \frac{b_m - 1}{b_1 \dots b_m} < \frac{1}{b_1 \dots b_n} < \frac{1}{2^N} < \frac{1}{10^{N/4}}.$$

Also ist $\psi(m) - \psi(n) = o(k)$ für $N \geq N(k) = 4k$.

Ähnlich ergibt sich die Äquivalenz von $\psi(n)$ und $\Phi(n)$. Es ist

$$|\Phi(n) - \psi(n)| = \frac{\Phi_{k+1}(n)}{b_1 \dots b_{k+1}} < \frac{c_{k+1} + 1}{b_1 \dots b_{k+1}} \leq \frac{1}{b_1 \dots b_k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Damit ist alles bewiesen.

Wir haben also das Ergebnis, daß wir einer regulären Folge $\Phi(n)$ genau dann eine äquivalente Faktoriellenfolge zuordnen können, wenn $\Phi(n)$ für *alle* Nenner n die Schnitteigenschaft hat. Zur Herstellung einer äquivalenten Dezimalfolge brauchen wir die Schnitteigenschaft für die Potenzen von 10, usf. Für die durch (5) definierte Folge kann nicht nur ein äquivalenter Dezimalbruch angegeben werden, sondern auch eine CANTOR-Folge mit beliebigen b_ν, die den Primfaktor 3 nicht enthalten.

Satz 3. *Eine* CANTOR-*Folge*

$$\psi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_1 \cdot b_2} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}$$

hat die Schnitteigenschaft für die Nenner $b_1, b_2, b_3, \dots$, *und zwar gilt*

$$\frac{p(q)}{b(q)} \leq \psi(n) < \frac{p(q) + 1}{b(q)}$$

für $n \geq q$ *und* $p(q) = [\psi(q) \cdot b(q)] + 1$.

Zum Beweis schreiben wir $\psi(n)$ in der Form

$$\psi(n) = \psi(\nu) + \frac{c_{\nu+1}}{b_1 \dots b_{\nu+1}} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}.$$

Dann wird wegen $c_\nu \leq b_\nu - 1$:

$$\psi(n) \cdot b_\nu - \psi(\nu)\, b_\nu \leq \frac{(b_{\nu+1} - 1)}{b_1 \dots b_{\nu+1}} + \dots + \frac{(b_n - 1)\, b_\nu}{b_1 \dots b_n} < \frac{1}{b_1 \dots b_{\nu-1}}.$$

Nun ist $\psi(\nu) \cdot b_\nu$ ein Bruch mit dem Nenner $b_1 b_2 b_3 \dots b_\nu$. Da nach unserer Ungleichung $\psi(n) \cdot b_\nu$ nur um *weniger* als $\frac{1}{b_1 \dots b_{\nu-1}}$ größer sein kann als $\psi(\nu) \cdot b_\nu$, gilt

$$[\psi(n) \cdot b_\nu] = [\psi(\nu)\, b_\nu]. \tag{16}$$

Setzt man jetzt

$$p(q) = [\psi(q) \cdot b_q] + 1 = [\psi(q) \cdot b(q)] + 1,$$

so folgt

$$\frac{p(q) - 1}{b(q)} \leq \psi(n) < \frac{p(q)}{b(q)},$$

q. e. d

R. PETER hat kürzlich [3, S. 193] eine interessante Aussage über irrationale Zahlen bewiesen, die mit den hier behandelten Fragen zusammenhängt. Wenn eine Zahl r (im klassischen Sinne) irrational ist, dann gibt es zu jedem Bruch $\frac{p}{q}$ eine (rationale) Zahl $k>0$ und ein N, so daß $\left|a_n-\frac{p}{q}\right|>k$ gilt für eine gegen r konvergierende Folge rationaler Zahlen (falls $n>N$). Wenn nun — das ist der Satz von R. PETER — diese Aussage in dem Sinne „effektiv" ist, daß es zwei rekursive Funktionen $\varkappa(p,q)$ und $\nu(p,q)$ gibt, so daß für alle $n\geq\nu(p,q)$

$$\left|a_n-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{\varkappa(p,q)}$$

gilt, dann hat die irrationale Zahl r die Schnitteigenschaft, d.h. es gibt eine rekursive Beziehung in m und n, die der Aussage $\frac{m}{n}>r$ äquivalent ist.

Wir wollen unter Vermeidung von Ungleichungen mit irrationalen Zahlen eine Verallgemeinerung dieses Satzes und eine weitere damit zusammenhängende Aussage beweisen.

Satz 4. *Es sei $\varphi(n)$ eine reguläre Folge, $b_\nu=b(\nu)$ eine rekursive Funktion mit $b(\nu)\geq 2$,*

$$q_0=1 \quad \textit{und} \quad q_\nu=b_1b_2b_3b_4\dots b_\nu \quad \textit{für} \quad \nu=1,2,3,\dots.$$

Wenn es zwei rekursive Funktionen $F(\nu)$ und $G(\nu)$ gibt, so daß

$$\left|\varphi(n)-\frac{p}{q_\nu}\right|>\frac{1}{F(\nu)} \tag{17}$$

gilt für $n\geq G(\nu)$, dann hat $\varphi(n)$ die Schnitteigenschaft für alle Nenner q_ν (Erklärung 6) [7]).

Für $b_n=n$ folgt daraus dann die allgemeine Schnitteigenschaft wie bei R. PETER.

Zum Beweis bezeichnen wir die „Stellenzahl" (im Dezimalsystem) von $F(\nu)$ mit $St(F(\nu))$:

$$St(F(\nu))=\mu_x[F(\nu)<10^x\wedge x<F(\nu)]$$

und setzen [8])

$$I(\nu)=\operatorname{Max}(St(F(\nu)),G(\nu)), \qquad N(I(\nu))=M(\nu). \tag{18}$$

$M(\nu)$ ist dann eine rekursive Funktion von ν. Dann gilt

$$|\varphi(n)-\varphi(M(\nu))|<\frac{1}{F(\nu)} \tag{19}$$

für $n\geq M(\nu)$. Denn es ist doch nach (18):

$$|\varphi(n)-\varphi(N(I(\nu)))|<\frac{1}{10^{I(\nu)}}\leq\frac{1}{10^{St(F(\nu))}}\leq\frac{1}{F(\nu)}.$$

---

[7]) Auf eine Abhängigkeit von p kann bei der Funktion $F(\nu)$ verzichtet werden, weil die Abschätzung (17) ja nur interessant ist für die Zahl p, die den größten Wert für $F(\nu)$ erfordert.

[8]) Dabei ist $N(k)$ die rekursive Funktion, die gemäß Erklärung 2 zur gegebenen Folge $\varphi(n)$ gehört.

Andererseits ist

$$\left|\varphi\left(M(\nu)\right) - \frac{p}{q_\nu}\right| = \left|\varphi\left(N(I_\nu)\right) - \frac{p}{q_\nu}\right| > \frac{1}{F(\nu)}. \tag{20}$$

Denn nach (1) und (18) gilt doch für alle ν:

$$N\left(I(\nu)\right) \geq I(\nu) \geq G(\nu).$$

Wir setzen jetzt

$$p_\nu = [q_\nu \cdot \varphi\left(M(\nu)\right)] + 1.$$

Dann gilt also:

$$\frac{p_\nu - 1}{q_\nu} \leq \varphi\left(M(\nu)\right) < \frac{p_\nu}{q_\nu}. \tag{21}$$

Nach (20) ist dann

$$\varphi\left(M(\nu)\right) - \frac{p_\nu - 1}{q_\nu} > \frac{1}{F(\nu)} \quad \text{und auch} \quad \frac{p_\nu}{q_\nu} - \varphi\left(M(\nu)\right) > \frac{1}{F(\nu)},$$

denn (20) gilt ja für *alle* p.

$\varphi\left(M(\nu)\right)$ hat also von den durch (21) gesetzten Schranken einen Abstand, der größer ist als $\frac{1}{F(\nu)}$. Wegen (19) muß deshalb auch $\varphi(n)$ für $n \geq M(\nu)$ zwischen diesen Schranken liegen:

$$\frac{p_\nu - 1}{q_\nu} \leq \varphi(n) < \frac{p_\nu}{q_\nu} \quad \text{für} \quad n \geq M(\nu).$$

Das heißt aber: $\varphi(n)$ hat die Schnitteigenschaft für die Nenner q_ν, q.e.d.

Nun kann man umgekehrt fragen, ob eine gegebene CANTOR-Folge für alle Nenner $q_\nu = b_1 \dots b_\nu$ einen durch eine rekursive Funktion festgelegten Abstand von allen Brüchen p/q_ν hat, wie es in (17) vorausgesetzt war. Das ist deshalb nicht zu erwarten, weil ja die CANTOR-Folge

$$\Phi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}$$

gegen eine rationale Zahl konvergieren kann, und zwar rekursiv. Das ist dann der Fall, wenn von einer gewissen Nummer an alle $c_n = 0$ werden oder $c_n = b_n - 1$ gilt für $n \geq N$. In diesem Fall konvergiert die Folge, wie man leicht einsieht, rekursiv gegen die rationale Zahl

$$C + \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_{N-1} + 1}{b_1 \dots b_{N-1}}.$$

Nehmen wir deshalb an, daß die Voraussetzungen

$$\begin{cases} (\nu)\,(E\,\sigma)\,[c_\nu = 0 \to c_{\nu+\sigma} \neq 0], \\ (\nu)\,(E\,\sigma)\,[c_\nu = b_\nu - 1 \to c_{\nu+\sigma} < b_{\nu+\sigma} - 1] \end{cases} \tag{22}$$

erfüllt seien. Es ist natürlich durchaus möglich, daß für eine vorgelegte Folge *nicht* entscheidbar ist, ob (22) gilt oder nicht. Es ist nicht schwer, dafür (mit ähnlichen Mitteln wie im vorigen Kapitel) Beispiele anzugeben.

Satz 5. *Es sei*

$$\Phi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \cdots + \frac{c_n}{b_1 \cdots b_n}$$

eine CANTOR*-Folge, für die* (22) *gilt. Dann gibt es zwei (allgemein) rekursive Funktionen* $\gamma(\nu)$ *und* $\delta(\nu)$, *so daß*

$$\left| \Phi(n) - \frac{p}{q_\nu} \right| \geq \frac{1}{\delta_\nu}$$

gilt für $n \geq \gamma(\nu)$ *und alle* p[9]).

Wegen (22) sind die Funktionen

$$\alpha(\nu) = \mu_\tau[\tau > \nu \wedge c_\tau \neq 0]$$

und

$$\beta(\nu) = \mu_\sigma[\sigma > \nu \wedge c_\sigma < b_\sigma + 1]$$

(allgemein) rekursiv. Dann ist für

$$n \geq \gamma(\nu) = \operatorname{Max}\big(\alpha(\nu), \beta(\nu)\big):$$

$$\Phi(\nu) + \frac{1}{b_1 \cdots b_{\alpha(\nu)}} \leq \Phi(n) \leq \Phi(\nu) + \frac{b_{\nu+1} - 1}{b_1 \cdots b_{\nu+1}} + \cdots + \frac{b_n - 1}{b_1 \cdots b_n} - \frac{1}{b_1 \cdots b_{\beta(\nu)}}$$

$$= \Phi(\nu) + \frac{1}{b_1 \cdots b_\nu} - \frac{1}{b_1 \cdots b_n} - \frac{1}{b_1 \cdots b_{\beta(\nu)}}$$

oder

$$\Phi(\nu) + \frac{1}{q(\alpha(\nu))} \leq \Phi(n) < \Phi(\nu) + \frac{1}{q(\nu)} - \frac{1}{q(\beta(\nu))}. \tag{23}$$

$\Phi(n)$ liegt also im Intervall $\left[\Phi(\nu);\ \Phi(\nu) + \frac{1}{q(\nu)}\right]$ und hat von den Eckpunkten einen Abstand, der mindestens gleich

$$\frac{1}{q(\alpha(\nu))} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{q(\beta(\nu))}$$

ist. Nun ist $\Phi(\nu)$ ein Bruch mit dem Nenner $q(\nu)$: $\Phi(\nu) = \frac{l(\nu)}{q(\nu)}$. Für $n \geq \gamma(\nu)$ ist dann

$$\frac{1}{q(\alpha(\nu))} \leq \Phi(n) - \frac{l(\nu)}{q(\nu)} \quad \text{und} \quad \frac{l(\nu)+1}{q(\nu)} - \Phi(n) > \frac{1}{q(\beta(\nu))}.$$

Es gilt also

$$\left| \Phi(n) - \frac{p}{q_\nu} \right| \geq \frac{1}{\delta(\nu)}$$

mit

$$\delta(\nu) = q\big(\gamma(\nu)\big) \quad \text{für} \quad n \geq \gamma(\nu).$$

Diese Ungleichung gilt zunächst für $p = l_\nu$ bzw. $p = l_\nu + 1$, dann aber a fortiori für alle andern natürlichen Zahlen p wegen (23).

---

[9]) $q_\nu = q(\nu)$ hat wieder dieselbe Bedeutung wie in Satz 4.

V. Äquivalente Folgen

In der klassischen Theorie kann man jeder reellen Zahl einen Dezimalbruch oder auch irgendeine andere CANTOR-Folge zuordnen. Es liegt die Frage nahe, wie weit man den regulären Folgen äquivalente Folgen zuordnen kann, die besonders einfach zu übersehen sind. Bevor wir solche „positiven" Möglichkeiten suchen, wollen wir auf einige bemerkenswerte Unterschiede der rekursiven Theorie gegenüber der klassischen hinweisen.

Stellen wir zunächst fest, daß man zu jeder regulären Folge $c(n)$ eine zweite angeben kann, für die nicht entscheidbar ist, ob sie zur ersten äquivalent ist oder nicht. Eine solche Folge erhält man, wenn man zu $c(n)$ die Folge $a(n)-1$ addiert, die durch (4) definiert wurde. $a(n)-1$ ist zwar regulär, aber es ist nicht entscheidbar, ob diese Folge eine reguläre Nullfolge ist. Weiter gilt

Satz 6. *Zu jeder regulären Folge $c(n)$ läßt sich eine rekursive Folge rationaler Zahlen $d(n)$ angeben, die im klassischen Sinne gegen denselben Grenzwert konvergiert wie $c(n)$, aber nicht mehr rekursiv konvergent ist.*

Zum Beweis ziehen wir die bei R. PETER [3, S. 152] definierte Funktion $\varrho(m, n)$ heran. Sie ist primitiv rekursiv, aber das Prädikat

$$(Ex) \quad (\varrho(m, x) = 0) \tag{24}$$

ist nicht entscheidbar[10]).

Mit $\varrho(m, x)$ definiert nun R. PETER die Funktion

$$\psi(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x)\ (x \leq n \to \varrho(m, x) \neq 0) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{25}$$

Wir setzen weiter

$$\alpha_n = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\psi(\mu, n+1) - \psi(\mu, n)}{2^\mu}. \tag{26}$$

Aus der Definition folgt, daß jeder Summand von α_n nichtnegativ ist. Weiter ist

$$S_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\psi(\mu, n+1)}{2^\mu} < 1.$$

Da S_n beschränkt ist, bilden die α_n in der klassischen Theorie eine Nullfolge. Nehmen wir nun an, α_n sei eine *reguläre* Nullfolge. Es gibt dann also eine rekursive Funktion $N(k)$, so daß $\alpha_n = o(k)$ gilt für $n \geq N(k)$.

Von den Summanden von α_n liefern aber wegen der Definition von $\psi(m, n)$ nur diejenigen einen positiven Beitrag, für die

$$\psi(\mu, n+1) = 1, \quad \psi(\mu, n) = 0$$

[10]) Dieses Prädikat ist nämlich der Aussage gleichwertig: m ist die Gödel-Nummer einer allgemein rekursiven Funktion, und x ist die „Ableitung" dieser Funktion für den Argumentwert m.

ist. Da alle Summanden von α_n nichtnegativ sind, müßte

$$\psi(\mu, n+1) = 2^{\mu} \cdot o(k)$$

sein für $n \geq N(k)$, also

$$\psi(\mu, n+1) = 2^{\mu} \cdot o(\mu) < 1$$

für $n \geq N(\mu)$. Das heißt aber: $\psi(\mu, n) = 0$ für $n \geq N(\mu)$. Dies Ergebnis wäre aber so zu deuten: Wenn für irgendein n der „Sprung" der ψ-Funktion erfolgt:

$$\psi(\mu, n) = 0, \quad \psi(\mu, n+1) = 1,$$

dann kann dieses n nicht zu groß sein, es gilt vielmehr: $n < N(\mu)$. Das kleinste x also, für das $\varrho(m, x) = 0$ wird, muß also kleiner als $N(\mu)$ sein. Dann wäre aber das Prädikat (24) äquivalent mit

$$(27) \qquad (Ex) \quad \big(x \leq N(m) \wedge \varrho(m, x) \doteq 0\big).$$

(27) ist aber [wegen der rekursiven Grenze $N(m)$] rekursiv, und das ist ein Widerspruch. Also ist α_n *keine rekursive* Nullfolge.

Addiert man α_n zu irgendeiner gegebenen regulären Folge $c(n)$, so wird diese „verdorben": $\beta(n) = c(n) + \alpha(n)$ konvergiert noch im klassischen Sinne gegen denselben Grenzwert wie $c(n)$, aber diese Folge ist nicht mehr rekursiv konvergent.

Wir wollen nun die Frage behandeln, wie man einer gegebenen regulären Folge eine äquivalente Folge in irgendeiner geeigneten „Normalform" zuordnen kann. Wenn für die Folge gewisse „Schnitteigenschaften" feststehen, ist die Zuordnung einer CANTOR-Folge möglich nach den in Kap. IV angegebenen Sätzen. In *jedem* Fall ist aber eine wohlbestimmte „Intervallschachtelung" möglich, die eine monoton wachsende und eine monoton fallende Folge liefert, die beide der gegebenen äquivalent sind.

Sei etwa $\Phi(n)$ die reguläre Folge und $\Phi(n) - \Phi(m) = o(k)$ für $n \geq N(k)$. Dann ist also

$$k \cdot \Phi(n) = k \cdot \Phi\big(N(k)\big) + k \cdot o(k).$$

Falls nun die erste Dezimale von $k \cdot \Phi\big(N(k)\big)$ von 0 und 9 verschieden ist

$$\alpha(k) = [10k \cdot \Phi(N(k))] - 10\,[k \cdot \Phi(N(k))] \neq 0, \neq 9,$$

so gilt wegen $k \cdot o(k) < \frac{1}{10}$:

$$[k \cdot \Phi(n)] = [k \cdot \Phi(N(k))] = l \quad \text{und} \quad \frac{l}{k} \leq \Phi(n) < \frac{l+1}{k}.$$

Wenn aber $\alpha(k) = 9$ ist, so gilt statt dessen

$$\frac{2l+1}{2k} \leq \Phi(n) < \frac{2l+3}{2k},$$

und für $\alpha(k) = 0$ haben wir die entsprechende Ungleichung mit den Zählern $2l-1$ und $2l+1$. Um diese Möglichkeiten zusammenzufassen, definieren

wir die primitiv rekursive Funktion

$$(28) \qquad \varepsilon_1(k) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \alpha(k) \neq 9, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \varepsilon_2(k) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \alpha(k) = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir beschränken uns nun auf Nenner von der Form $k = 10^\varrho$ und erhalten dann

Satz 7. *Sei $\Phi(n)$ eine reguläre Folge und $N(k)$ die gemäß Erklärung 2 zugeordnete rekursive Funktion,*

$$x(\varrho) = \frac{2[10^\varrho \cdot \Phi(N(10^\varrho))] + \varepsilon_1(10^\varrho) + \varepsilon_2(10^\varrho)}{2 \cdot 10^\varrho},$$

$$y(\varrho) = \frac{2[10^\varrho \cdot \Phi(N(10^\varrho))] + \varepsilon_1(10^\varrho) + \varepsilon_2(10^\varrho) + 2}{2 \cdot 10^\varrho}$$

Dann gilt

$$x(\varrho) < x(\varrho+1) < y(\varrho) < y(\varrho+1)$$

und

$$x(\varrho) \leq \Phi(n) < y(\varrho) \qquad \text{für } n \geq N(10^\varrho).$$

Dies Ergebnis steht keineswegs im Gegensatz der Tatsache, daß nicht immer zur gegebenen regulären Folge eine äquivalente Dezimalfolge gefunden werden kann. Nehmen wir als Beispiel die durch (4) definierte Folge $a(n)$. Die Folgen $x(n)$ und $y(n)$ würden hier so aussehen:

$$0{,}5\,;\ 0{,}95\,;\ 0{,}995 \ldots 1{,}005\,;\ 1{,}05\,;\ 1{,}5\,.$$

Es ist nicht entscheidbar, ob nicht etwa die Folge der $x(n)$ für irgendein n die 1 überschreitet.

Wenn man eine Theorie der Funktionen rekursiv begründen will, kann man sich nicht auf solche regulären Folgen beschränken, die eine äquivalente Dezimalbruchentwicklung (oder gar eine Faktoriellenentwicklung) zulassen. Man muß doch mit diesen Folgen rechnen. Und man sieht leicht, daß etwa die Summe oder die Differenz zweier regulärer Folgen wieder regulär ist. Aber zur Summe oder Differenz zweier Dezimalfolgen kann man nicht immer eine äquivalente Dezimalfolge angeben.

Nun bieten auch die regulären Folgen mit der zugehörigen Intervallschachtelung durchaus die Möglichkeit, die Analoga gewisser klassischer Sätze über stetige Funktionen zu begründen ([5] und [7]). Und man kann dazu definieren:

Erklärung 7. *Eine rekursive und rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen heißt eine reelle Zahl. Zwei reelle Zahlen heißen äquivalent,*

$$\{\varphi(n)\} \approx \{\psi(n)\},$$

wenn $\varphi(n) - \psi(n)$ eine reguläre Nullfolge ist.

Die Äquivalenz rekursiver reeller Zahlen ist eine symmetrische, transitive und reflexive Beziehung.

Man könnte daran denken, nicht die einzelne rekursive Folge, sondern die Klasse der äquivalenten Folgen als rekursive reelle Zahl zu definieren. Es bestehen aber Bedenken, den Begriff der reellen Zahl auf eine solche Mengendefinition zu begründen, weil es nicht immer entscheidbar ist, ob zwei vorgegebene reguläre Folgen äquivalent sind oder nicht.

Literatur

[1] HILBERT-BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, Bd. 2. Berlin 1939. — [2] SPECKER: Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. of Symb. Logic **14**, No. 3, 145—158 (1949). — [3] PETER: Rekursive Funktionen. Budapest 1951. — [4] RICE: Recursive real numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 784—791 (1954). — [5] GOODSTEIN: The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. Acta mathematica **92**, 171—190 (1954). — [6] GOODSTEIN: The recursive irrationality of π. J. of Symb. Logic **19**, No. 4, 267—274 (1954). — [7] MESCHKOWSKI: Zur rekursiven Funktionentheorie. Acta mathematica **95**, 9—23 (1956).

Berlin-Dahlem, Thielallee 66

(Eingegangen am 19. Juni 1956)

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 203—224 (1956)

Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit

Von
W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER

§ 1. Einleitung

Das Ziel der folgenden Seiten ist ein neuer Zugang zu den Lückenumkehrsätzen der Limitierungstheorie. Nach dem Aufbau einer mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln arbeitenden Beweismethode wird dieselbe auf einige spezielle Fälle angewandt. Zum Beispiel untersuchen wir das bekannte high-indices-Theorem und den entsprechenden Satz für das BOREL-Verfahren.

Wir geben zunächst einige Beispiele von Lückenumkehrsätzen. Unter einer Lückenbedingung für die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{1}$$

mit den Teilsummen $s_k = \sum_{l=0}^{k} u_l$ $(k = 0, 1, \ldots)$ verstehen wir eine Bedingung der Form

$$u_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq k_0, k_1, \ldots, \tag{2}$$

wobei $\{k_l\}_{l=0,1,\ldots}$ irgendeine gegebene Indexfolge (k_l ganz, $0 \leq k_0 < k_1 < \cdots$) ist. Daß Lückenbedingungen die Rolle von TAUBER-Bedingungen spielen können, ist in einfachen Fällen leicht einzusehen. Zum Beispiel gilt für das CESÀRO-Verfahren erster Ordnung der wohlbekannte

Satz 1.1 (Lückensatz für das C_1-Verfahren). *Ist die Reihe* (1) C_1*-summierbar und ist die Lückenbedingung* (2) *erfüllt für eine Folge* $\{k_l\}$*, bei der*

$$k_{l+1} - k_l > \vartheta k_l \quad \text{für ein } \vartheta > 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

gilt, so ist die Reihe (1) *konvergent.*

Man beweist dies auf wenigen Zeilen wie folgt. Es sei

$$t_m = \frac{1}{m+1}(s_0 + \cdots + s_m) \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

und etwa $\lim t_m = 0$. Setzen wir $[(1+\vartheta) k_l] = n$, so ist

$$(n+1)\, t_n = s_0 + \cdots + s_{k_l - 1} + (n - k_l + 1)\, s_{k_l}$$

oder

$$s_{k_l} = \frac{n+1}{n - k_l + 1} t_n - \frac{k_l}{n - k_l + 1} t_{k_l - 1},$$

woraus $s_{k_l} \to 0$ für $l \to \infty$, also $s_k \to 0$ für $k \to \infty$ folgt.

Ganz wesentlich tiefer als Satz 1.1 liegt der entsprechende Satz 1.2 für das ABEL-Verfahren (A-Verfahren). Die Reihe (1) heißt A-summierbar, wenn

das Funktionselement $\sum u_k x^k$ für $|x|<1$ konvergiert und wenn $\lim_{x\to 1-} \sum u_k x^k$ existiert.

Satz 1.2 (Lückensatz für das A-Verfahren). *Ist die Reihe* (1) *A-summierbar und ist die Lückenbedingung* (2) *erfüllt für eine Folge $\{k_l\}$, für die* (3) *gilt, so ist die Reihe* (1) *konvergent.*

Satz 1.2 folgt als Spezialfall aus

Satz 1.3 (High-indices-Theorem). *Erfüllt die reelle Zahlenfolge $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\ldots}$ $(0\leq \lambda_0<\lambda_1<\cdots)$ die Bedingung*

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k>\vartheta\lambda_k \quad \text{für ein } \vartheta>0 \qquad (k=0,1,\ldots)$$

und existiert

$$\lim_{x\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-\lambda_k x},$$

wobei $\sum u_k e^{-\lambda_k x}$ für $x>0$ als konvergent vorausgesetzt ist, so ist die Reihe (1) *konvergent.*

Das high-indices-Theorem wurde von LITTLEWOOD [1910] vermutet und von HARDY-LITTLEWOOD [1926] bewiesen. Einen besonders kurzen Beweis gab INGHAM [1937] (vgl. HARDY [1949, S. 172ff.]). Weitere Beweise stammen von WIENER [1936] (vgl. dazu LEVINSON [1938], [1940, S. 186ff.] und von PITT [1938_1]. Vgl. ferner BOSANQUET [1944], LORENTZ [1948].

Um nun den für uns wesentlichen Gesichtspunkt zu kennzeichnen, kehren wir zum Satz 1.2 zurück. Wir ziehen noch den folgenden Satz heran: Ist (1) A-summierbar und die Folge $\{s_k\}$ beschränkt, so ist (1) C_1-summierbar. Diesen $A\to C_1$-Satz, der z.B. in der Theorie des O-Umkehrsatzes des A-Verfahrens eine Rolle spielt, sehen wir von dorther als bekannt an. Kombinieren wir ihn mit dem Lückensatz für das C_1-Verfahren, so ergibt sich Satz 1.2 für den Fall, daß noch zusätzlich die Beschränktheit der Folge $\{s_k\}$ vorausgesetzt ist. Die Schwierigkeit beim Beweis des Satzes 1.2 liegt also darin, ohne diese Zusatzvoraussetzung auszukommen. (Eine entsprechende Schwierigkeit tritt beim O-Satz nicht auf, da man aus der A-Summierbarkeit von (1) zusammen mit der Bedingung $u_k=O\left(\frac{1}{k}\right)$ ohne Mühe auf die Beschränktheit der Folge $\{s_k\}$ schließt.)

Hier setzt nun die vorliegende Untersuchung ein. Ihr wesentliches Ergebnis ist eine Schlußweise, welche in vielen Fällen gestattet, aus einem Lückensatz für beschränkte Folgen den entsprechenden Lückensatz für beliebige Folgen herzuleiten. Mit dem Nachweis, daß diese Schlußweise im Fall des A-Verfahrens möglich ist (§ 5), wird dann ein neuer Beweis des Satzes 1.2 geführt sein.

Ähnlich wie beim A-Verfahren liegen die Verhältnisse bei vielen anderen Verfahren. Benützt man die von den O-Umkehrsätzen her bekannten Hilfsmittel, man denke z.B. an den Hauptsatz der WIENERschen Theorie, so kann man verhältnismäßig leicht scharfe Lückensätze für beschränkte Folgen herleiten. Die Ausdehnung auf beliebige Folgen ist dann die gegenüber den

O-Sätzen bei den Lückensätzen neu auftretende Schwierigkeit, zu deren Überwindung hier beigetragen werden soll.

Die Grundlage unserer Schlußweise (§ 3, § 4) bildet die schon bekannte Tatsache, daß ein permanentes perfektes Matrixverfahren entweder konvergenzgleich ist oder mindestens eine beschränkte divergente Folge limitiert (MAZUR-ORLICZ [1955], WILANSKY-ZELLER [1955]). Wir werden dies erneut und ausführlich mit möglichst elementaren Hilfsmitteln beweisen. Ständig arbeiten wir mit dem Begriff des FK-Raums. Weiterhin sind für unsere Zwecke wichtig die Begriffe Lückenperfektheit und lückenperfekter Teil eines Verfahrens, die sich in natürlicher Weise einstellen. Die Anwendung unserer Methode auf spezielle Verfahren (§ 5, § 6) kommt auf gewisse Approximationsfragen in den Wirkfeldern hinaus. Hierbei lassen sich Ergebnisse von ZELLER [1953_3] benützen.

In § 5 behandeln wir im wesentlichen die CESÀROschen und das ABELsche Verfahren, ferner das DIRICHLET-Reihen-Verfahren. Letzteres führt zum high-indices-Theorem, das auf einen O-Umkehrsatz zurückgeführt wird.

In § 6 untersuchen wir die EULER-KNOPPschen Verfahren E_α $(0<\alpha\leq 1)$ und das BORELsche Verfahren B (Definitionen siehe später). Es ergibt sich ein neuer Beweis der folgenden beiden Sätze.

Satz 1.4 (Lückensatz für das E_α-Verfahren). *Ist die Reihe* (1) E_α*-summierbar und ist die Lückenbedingung* (2) *erfüllt für eine Folge* $\{k_l\}$*, bei der*

$$k_{l+1}-k_l>\vartheta\sqrt{k_l} \quad \text{für ein } \vartheta>0 \qquad (l=0,1,\ldots) \tag{4}$$

gilt, so ist die Reihe (1) *konvergent.*

Satz 1.5 (Lückensatz für das B-Verfahren). *Ist die Reihe* (1), *für die*

$$\overline{\lim_k}\sqrt[k]{|u_k|}<\infty \tag{5}$$

ist, B-summierbar und ist die Lückenbedingung (2) *erfüllt für eine Folge* (k_l)*, für die* (4) *gilt, so ist die Reihe* (1) *konvergent.*

Ist die Reihe (1) E_α-summierbar, so ist sie auch B-summierbar, außerdem gilt dann (5). Daher ist Satz 1.4 in Satz 1.5 enthalten.

Satz 1.4 (im Fall $\alpha=\frac{1}{2}$) wurde unter der Zusatzvoraussetzung $s_k=O(k^\gamma)$ für ein $\gamma>0$ von MEYER-KÖNIG [1939, Satz 9], und nahezu in der oben angegebenen Form von ERDÖS [1952] bewiesen. Satz 1.5 geht im wesentlichen, nämlich mit der Voraussetzung $\overline{\lim_k}\sqrt[k]{|u_k|}\leq 1$ an Stelle von (5), auf PITT [1938_1, Theorem 17] zurück. Daß dann schon die schwächere Voraussetzung (5) ausreicht, kann mit Hilfe eines funktionentheoretischen Lückensatzes gezeigt werden (MEYER-KÖNIG [1953]).

Die eben angedeutete funktionentheoretische Reduktionsmethode und die funktionalanalytische Methode, die wir in dieser Arbeit darstellen, lassen sich — einzeln oder zusammen — noch auf weitere spezielle Verfahren anwenden, z. B. auf die durch analytische Fortsetzung definierte Variante des

ABEL-Verfahrens. Ähnliche Betrachtungen sind auch bei Umkehrsätzen anderer Art (mit Schwankungsbedingungen oder funktionentheoretischen Bedingungen) nützlich. Darauf werden wir zurückkommen.

§ 2. Limitierungstheoretische Grundlagen

Wir untersuchen *Matrixverfahren zur Limitierung von Zahlenfolgen.* Ist $\{s_k\}_{k=0,1,\ldots}$ eine Folge komplexer Zahlen, so setzen wir $\{s_k\}=\mathfrak{s}$ und reden von der Folge oder Stelle $\mathfrak{s}$. Ist die Folge $\{s_k\}$ konvergent (beschränkt, ...), so sagen wir, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, $\mathfrak{s}$ sei konvergent (beschränkt, ...). Die s_k heißen die Koordinaten von $\mathfrak{s}$. Ist $A=\{a_{mk}\}_{m,k=0,1,\ldots}$ eine Matrix mit komplexen Elementen, so bilden wir die Transformation

$$(1) \qquad \mathfrak{t}=A\,\mathfrak{s} \equiv t_m=\sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}s_k \qquad (m=0,1,\ldots).$$

$\mathfrak{s}$ heißt A-limitierbar, wenn alle t_m und $\lim t_m$ existieren. Die A-limitierbaren $\mathfrak{s}$ fassen wir zum *Folgenwirkfeld* $\mathfrak{A}$ des Verfahrens A zusammen. Jedem $\mathfrak{s}$ ordnen wir eine Stelle $\mathfrak{u}=\{u_k\}_{k=0,1,\ldots}$ und eine Reihe $\sum_0^{\infty} u_k$ zu vermöge $s_k=\sum_{l=0}^{k} u_l$. Im folgenden soll zwischen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{u}$ und $\sum u_k$ stets diese Beziehung bestehen, analog für $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{v}$ und $\sum v_k$, alles auch bei Einführung zusätzlicher Indizes. Die $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{s}\in\mathfrak{A}$ fassen wir zum *Reihenwirkfeld* $\tilde{\mathfrak{A}}$ zusammen. $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind eineindeutig aufeinander abgebildet. Indem wir mit jedem der beiden Felder $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ gleichzeitig auch das andere ins Auge fassen, sprechen wir kurz vom *Wirkfeld* des Verfahrens A. Ist $\mathfrak{u}\in\tilde{\mathfrak{A}}$, so sagen wir, A summiere $\mathfrak{u}$ (oder $\sum u_k$). Unter dem *Nullwirkfeld* $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ von A verstehen wir diejenigen $\mathfrak{s}\in\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{u}\in\tilde{\mathfrak{A}}$, für die $\lim t_m=0$ ist.

Bei (1) handelt es sich um eine Folge-Folge-(*FF*-)Transformation; wir sagen daher, das Verfahren A (so wie es bisher erklärt wurde) sei in der *FF*-Form gegeben. Wir untersuchen aber auch Matrixverfahren A — und verwenden dabei genau dieselben Bezeichnungen wie bisher —, bei denen der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{u}$ einerseits, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{v}$ andererseits nicht in der Form (1), sondern mit Hilfe einer Matrix A' oder A'' oder A''' durch eine der Transformationen

$$(2) \qquad \mathfrak{t}=A'\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}=A''\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}=A'''\mathfrak{s}$$

hergestellt wird. Im zweiten Fall z.B. heißt $\mathfrak{s}\in\mathfrak{A}$, daß $\mathfrak{v}$ existiert und $\sum v_k$ (d.h. $\lim t_m$) konvergiert, usw. Je nach der zugrunde liegenden Transformation sagen wir in den Fällen (2), das Verfahren A sei in der *RF*- bzw. *RR*- bzw. *FR*-Form gegeben. Oft existiert ein Matrixverfahren in mehreren der genannten Formen; z.B. läßt sich eine *FR*-Matrix leicht zu einer *FF*-Matrix, eine *RR*-Matrix leicht zu einer *RF*-Matrix umformen. Stets soll zwischen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{v}$ eine der Beziehungen (1) und (2) bestehen.

Statt m verwenden wir auch einen stetigen Parameter μ. Der Übergang von v_μ zu t_μ geschieht dann durch Integration. Eine Matrix mit unstetigem $m = 0, 1, \ldots$ bezeichnen wir als eine gewöhnliche Matrix.

Stets bedeutet $\mathfrak{k}$ eine Folge $\{k_l\}_{l=0,1,\ldots}$ ganzer Zahlen, für die $0 \leq k_0 < k_1 < \cdots$ ist. Ist ein $\mathfrak{k}$ und ein u gegeben, so spielt eine Rolle die *Lückenbedingung* $u_k = 0$ für $k \neq k_0, k_1, \ldots$ [wir schreiben dafür künftig: $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$]. Unter dem zu einem gegebenen $\mathfrak{k}$ gehörigen *Lückenumkehrsatz* des Verfahrens A verstehen wir die Aussage: Ein A-limitierbares $\mathfrak{s}$ mit $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ ist konvergent. Dies ist — abgesehen von Anwendbarkeitsfragen, die bei zeileninfiniten Matrizen auftreten können — gleichbedeutend damit, daß die Matrix A^* mit den Elementen

$$a^*_{ml} = a_{m k_l} + \cdots + a_{m, k_{l+1}-1} \qquad (m, l = 0, 1, \ldots),$$

die aus (der FF-Form von) A durch *Zusammenlegen von Spalten* (auch Weglassen von Anfangsspalten, falls $k_0 > 0$) entsteht, keine divergenten Folgen limitiert. Liegt das Verfahren in der RF-Form vor, so hat man von $A' = \{a'_{mk}\}$ durch *Spaltenauswahl* zu der Matrix A'^* mit den Elementen

$$a'^*_{ml} = a'_{m k_l} \qquad (m, l = 0, 1, \ldots)$$

überzugehen. Entsprechendes gilt bei der FR- bzw. RR-Form und bei stetigem Parameter μ.

Im folgenden nehmen wir nun stets an, *daß das Matrixverfahren A (und damit jedes zugehörige A^*) permanent ist.* Bei der Aufstellung von Lückenumkehrsätzen geht es dann darum, solche $\mathfrak{k}$ zu finden, für die das Wirkfeld $\mathfrak{A}^*$ genau aus den konvergenten Folgen besteht, d. h. A^* konvergenzgleich ist.

Im Rest dieses Paragraphen machen wir erste einfache (im wesentlichen bekannte) Anwendungen der letzten Überlegung. Der Hauptteil unserer Untersuchung beginnt mit § 3.

Hilfssatz 2.1. *Das permanente, in der FF-Form durch die gewöhnliche Matrix A gegebene Verfahren A sei konvergenzgleich. Dann ist*

$$\varliminf_k \sup_m |a_{mk}| > 0. \tag{3}$$

Beweis. Wir gehen indirekt vor: Es sei $\varliminf_k \sup_m |a_{mk}| = 0$. Wir wählen ein $\mathfrak{k}$ mit $\sup_m |a_{m k_l}| < 2^{-l}$ und setzen $s_k = 0$ $(k \neq k_l)$, $s_k = 1$ $(k = k_l)$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $2^{-n} < \varepsilon$ (n ganz, ≥ 0), so ist

$$|t_m| = \left| \sum_{l=0}^{\infty} a_{m k_l} \right| \leq \sum_{l=0}^{n} |a_{m k_l}| + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \leq \sum_{l=0}^{n} |a_{m k_l}| + \frac{1}{2^n} < \varepsilon + \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_0.$$

Somit strebt $t_m \to 0$, wird also $\mathfrak{s}$ limitiert. Nun ist aber $\mathfrak{s}$ divergent. Denn unendlich oft ist $s_k = 1$, andererseits ist wegen der Permanenz von A sicher nicht $\lim s_k = 1$.

Natürlich ist (3) keine hinreichende Bedingung für Konvergenzgleichheit, man nehme z. B. die Transformation $t_m = \frac{1}{2}(s_m + s_{m+1})$. Besitzt aber A die Eigenschaft (AK) — wie z. B. die C_α-Verfahren für $0 \leq \alpha \leq 1$ —, so ist dies

doch der Fall (Hilfssatz 2.2). Dabei sagen wir, A besitze (AK), wenn gilt

$$\text{(AK)} \qquad \lim_r \sup_m \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{mk} s_k \right| = 0 \quad \text{für jedes} \quad \mathfrak{s} \in \mathfrak{A}_0$$

(Abschnittskonvergenz im Nullwirkfeld). (AK) ist äquivalent mit

$$\text{(AB)} \qquad \sup_{m,n} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{mk} s_k \right| < \infty \quad \text{für} \quad \mathfrak{s} \in \mathfrak{A}_0$$

(Abschnittsbeschränktheit im Nullwirkfeld), wovon wir jedoch keinen Gebrauch machen. (Über (AK) und (AB) vgl. WILANSKY-ZELLER [1956] und die dort angegebene Literatur.) Über (AK) bemerken wir noch: Ist A ein (AK)-Verfahren, dann auch jedes aus A durch Spaltenzusammenfassung hervorgehende A^*, wie man unmittelbar einsieht.

Hilfssatz 2.2. *Besitzt das permanente, in der FF-Form durch die gewöhnliche Matrix A gegebene Verfahren A die Eigenschaft* (AK), *so ist A genau dann konvergenzgleich, wenn* (3) *gilt.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß (3) hinreichend für Konvergenzgleichheit ist. Sei etwa $\lim t_m = 0$, also $\mathfrak{s} \in \mathfrak{A}_0$; zu zeigen ist $\lim s_k = 0$. Wegen (3) dürfen wir

$$\sup_m |a_{mk}| > \delta \qquad \text{für ein } \delta > 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

annehmen. Wir bestimmen die Indizes $n = n(k)$ so, daß

$$\sup_m |a_{mk}| = |a_{nk}| > \delta \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

ist. Wegen (AK) strebt

$$y_r = \sup_m \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{mk} s_k \right| \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Für $k = 0, 1, \ldots$ ist nun

$$|a_{nk} s_k| = \left| \sum_{p=k}^{\infty} a_{np} s_p - \sum_{p=k+1}^{\infty} a_{np} s_p \right| \leq y_k + y_{k+1},$$

also gilt

$$|s_k| \leq \frac{1}{\delta} (y_k + y_{k+1}) \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Hilfssatz 2.2 wenden wir nun auf das C_1-Verfahren an. Daß C_1, auf der Transformation $t_m = (m+1)^{-1} \sum_{k=0}^{m} s_k$ beruhend, ein Verfahren mit (AK) ist, stellt man ganz leicht fest. Nun geben wir ein l vor. In der l-ten Spalte von C_1^* stehen die Elemente

$$c_{ml}^* = 0 \qquad \text{für } 0 \leq m \leq k_l - 1,$$

$$c_{ml}^* = \frac{m - k_l + 1}{m + 1} \qquad \text{für } k_l \leq m \leq k_{l+1} - 1,$$

$$c_{ml}^* = \frac{k_{l+1} - k_l}{m + 1} \qquad \text{für } k_{l+1} \leq m < \infty.$$

Daraus folgt

$$\sup_m |c^*_{ml}| = \frac{k_{l+1} - k_l}{k_{l+1}} \qquad (l = 0, 1, \ldots).$$

Nach Hilfssatz 2.2 ist C_1^* also genau dann konvergenzgleich, wenn

$$\lim_l \frac{k_{l+1} - k_l}{k_{l+1}} > 0$$

ist. Diese letzte Bedingung ist äquivalent mit

$$\lim_l \frac{k_{l+1} - k_l}{k_l} > 0. \tag{4}$$

Setzen wir nämlich $(k_{l+1} - k_l) k_l^{-1} = x_l$, $(k_{l+1} - k_l) k_{l+1}^{-1} = y_l$, so ist $y_l = f(x_l)$, wobei $f(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x > 0$ wächst. Damit ergibt sich der bekannte, in der einen Richtung auch in der Einleitung bewiesene

Satz 2.3 (Lückensatz für das C_1-Verfahren). *Die Bedingung $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ ist genau dann eine Umkehrbedingung des C_1-Verfahrens, wenn* (4) *erfüllt ist.*

Nur wenige der geläufigen Verfahren besitzen (AK). Im allgemeinen müssen wir daher zur Aufstellung von Lückensätzen schärfere Hilfsmittel heranziehen, als sie für Satz 2.3 nötig sind. Als solche kommen die von den O-Sätzen her bekannten Methoden in Frage. Sie liefern in der Regel zunächst aber nur Lückenumkehrsätze für beschränkte Folgen. Zu voller Wirksamkeit in der beabsichtigten Richtung kommen sie erst, wenn es gelingt, aus Lückensätzen für beschränkte Folgen solche für beliebige Folgen (genauer: für Folgen mit geringerer Größenordnungsbeschränkung) abzuleiten. Ein Verfahren, welches dies in vielen Fällen leistet, wird im folgenden aufgebaut.

§ 3. Funktionalanalytische Grundlagen

Wir machen von der Theorie der *FK-Räume* Gebrauch (vgl. etwa Mazur-Orlicz [1955]; Wlodarski [1955]; Zeller [1951], [1953$_2$]).

Ein F-Raum $\mathfrak{F}$ ist ein linearer Raum, in dem durch abzählbar viele Halbnormen $\|x\|_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ eine separierte Topologie und eine gleichmäßige Struktur erklärt sind, und der bezüglich dieser Struktur die Vollständigkeitseigenschaft besitzt. Ein FK-Raum ist ein F-Raum, der aus Stellen $x = \{x_k\}$ besteht und in dem die Abbildungen $x \to x_k$ linear und stetig sind. Ein FK-Raum $\mathfrak{G}$, der mehr Stellen als ein FK-Raum $\mathfrak{F}$ enthält, besitzt eine schwächere Topologie als $\mathfrak{F}$. Sind in einem FK-Raum alle Halbnormen Null außer einer, so sprechen wir von einem *BK-Raum*. Eine *Grundmenge* in einem FK-Raum ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft, daß die (endlichen) Linearkombinationen aus Elementen der Grundmenge im Raum dicht liegen. Wir setzen

$$e = \{1, 1, 1, \ldots\}, \quad e_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad e_1 = \{0, 1, 0, \ldots\}, \ \ldots$$

Unter einer *abbrechenden Stelle* verstehen wir ein $\mathfrak{x}$ mit $x_k = 0$ von einer Stelle an. Eine abbrechende Stelle ist eine Linearkombination der $\mathfrak{e}_i$ und umgekehrt.

Das Folgenwirkfeld $\mathfrak{A}$ eines gewöhnlichen Matrixverfahrens läßt sich — im wesentlichen auf eine Weise — als FK-Raum auffassen, also natürlich auch das Reihenwirkfeld $\tilde{\mathfrak{A}}$. Die benötigten Halbnormen sind für den FF- und RF-Fall direkt etwa bei ZELLER [1951, Satz 5.1] angegeben und damit auch für den FR- und RR-Fall bekannt. Mit den Halbnormen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind auch $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ FK-Räume. Bei Matrixverfahren mit stetigem Parameter μ gilt in vielen Fällen dasselbe. Beispiele folgen später.

Wir behandeln zunächst Aussagen, in denen auf die Existenz beschränkter divergenter Folgen in Wirkfeldern (allgemeiner: in FK-Räumen) geschlossen wird. Die Sätze 3.1 und 4.2 findet man in etwas schwächerer Form mit ähnlichem Beweis bei MAZUR-ORLICZ [1955] und WILANSKY-ZELLER [1955].

Satz 3.1 (Existenz beschränkter, divergenter Folgen in FK-Räumen).

a) *Bilden in einem FK-Raum $\mathfrak{F}$ die $\mathfrak{e}_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ allein oder zusammen mit $\mathfrak{e}$ eine Grundmenge, so ist entweder jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$ konvergent oder gibt es ein beschränktes divergentes $\mathfrak{y} \in \mathfrak{F}$.*

b) *Bilden in einem FK-Raum $\tilde{\mathfrak{F}}$ die $\mathfrak{e}_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ eine Grundmenge, so ist entweder $\sum x_k$ für jedes $\mathfrak{x} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ konvergent, oder gibt es ein $\mathfrak{y} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\sup_l \left| \sum_{k=0}^{l} y_k \right| < \infty$ und divergenter Reihe $\sum y_k$.*

Beweis. I: *Teil a), unter der Voraussetzung, daß die $\mathfrak{e}_i$ allein eine Grundmenge von $\mathfrak{F}$ bilden.* Es gebe ein divergentes $\mathfrak{w} \in \mathfrak{F}$. Zu zeigen ist, daß ein $\mathfrak{y}$ der geforderten Art existiert. Wir brauchen nur den Fall $\sup |w_k| = \infty$ zu verfolgen.

Wegen der Grundmengenbedingung gibt es eine Folge abbrechender Stellen $\mathfrak{x}^{(r)} = \{x_0^{(r)}, x_1^{(r)}, \ldots\} \in \mathfrak{F}$ $(r = 0, 1, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{w}$ (Grenzwertaussagen für Elemente aus $\mathfrak{F}$ sind im Sinne der F-Topologie von $\mathfrak{F}$ zu verstehen), d. h. mit $\|\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{w}\|_i \to 0$ für $r \to \infty$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Wir richten es so ein, daß

$$x_{r+1}^{(r)} = x_{r+2}^{(r)} = \cdots = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

ist. In $\mathfrak{F}$ als einem FK-Raum hat man koordinatenweise Konvergenz, also gilt $x_k^{(r)} \to w_k$ $(r \to \infty;\ k = 0, 1, \ldots)$. Wir konstruieren induktiv für $j = 1, 2, \ldots$ die Folgen

$$\mathfrak{z}^{(j)} = \{z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, \ldots\} \in \mathfrak{F}$$

$$n_j \ (n_j \text{ ganz},\ 0 < n_1 < n_2 < \cdots)$$

$$q_j \ (q_j \text{ ganz},\ 1 < q_1 < q_1 + 1 < q_2 < q_2 + 1 < \cdots)$$

$$\lambda_j \ (\lambda_j \text{ reell},\ 0 < \lambda_j < 1).$$

Der 0-te Induktionsschritt besteht darin, daß wir $n_0 = q_0 = 0$ setzen. Wir sehen den j-ten Schritt $(j = 0, 1, \ldots)$ als erledigt an. Er führte, falls $j \geq 1$

ist, zu $\mathfrak{z}^{(j)}, n_j, q_j, \lambda_j$, wobei noch gelten soll

(2) $$\|\mathfrak{z}^{(j)}\|_l \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, j;$$

(3) $$|z_l^{(j)}| \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, q_{j-1} + 1;$$

(4) $$z_l^{(j)} = 0 \quad \text{für} \quad l = q_j + 1,\ q_j + 2, \ldots;$$

(5) $$\max\{|z_{q_{j-1}+2}^{(j)}|, \ldots, |z_{q_j}^{(j)}|\} = |z_{n_j}^{(j)}| = \frac{1}{\lambda_j} \quad \text{mit} \quad q_{j-1} + 2 \leq n_j \leq q_j.$$

Beim $(j+1)$-ten Schritt, den wir jetzt beschreiben, machen wir für $\mathfrak{z}^{(j+1)}$ den Ansatz

$$\mathfrak{z}^{(j+1)} = \mathfrak{x}^{(q)} - \mathfrak{x}^{(p)} \qquad (q > p).$$

Wir wählen eine Nummer p, so daß für $q > p$ die Forderungen

(2*) $$\|\mathfrak{z}^{(j+1)}\|_l \leq \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, j+1,$$

(3*) $$|z_l^{(j+1)}| \leq \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, q_j + 1$$

erfüllt sind. Dies ist möglich, denn wegen $\mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{w}$ gilt $\lim\limits_{p,q\to\infty} \|\mathfrak{x}^{(q)} - \mathfrak{x}^{(p)}\|_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$, und wegen $x_k^{(r)} \to w_k$ gilt $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_k^{(q)} - x_k^{(p)}) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Weiter wählen wir — man beachte $\sup |w_k| = \infty$ — eine Nummer $m \geq p+1$ mit $|w_m| > 1$, und sodann — man beachte $x_m^{(r)} \to w_m$ — die Nummer $q > p$ mit $|x_m^{(q)}| > 1$. Wegen (1) ist $|z_m^{(j+1)}| = |x_m^{(q)}| > 1$ und

(4*) $$z_l^{(j+1)} = 0 \quad \text{für } l = q+1,\ q+2, \ldots.$$

Daraus, zusammen mit (3*), folgt $q_j + 2 \leq m \leq q$; insbesondere ist $q_j + 1 < q$. Nun setzen wir $q = q_{j+1}$. Wegen (2*) bis (4*) gelten dann die aus (2) bis (4) bei Ersetzung von j durch $j+1$ hervorgehenden Aussagen. Den größten der Beträge

$$|z_l^{(j+1)}| \qquad (l = q_j + 2, \ldots, q_{j+1}),$$

unter denen $|z_m^{(j+1)}| > 1$ enthalten ist, setzen wir $= \lambda_{j+1}^{-1}$; dann ist $0 < \lambda_{j+1} < 1$. Schließlich zeichnen wir eine Nummer n_{j+1} $(q_j + 2 \leq n_{j+1} \leq q_{j+1})$ aus, für die $|z_{n_{j+1}}^{(j+1)}| = \lambda_{j+1}^{-1}$ ist. Wegen $n_j \leq q_j$ [man beachte (5) bzw. $n_0 = q_0 = 0$] ist $n_j < n_{j+1}$, ferner ist die aus (5) bei Ersetzung von j durch $j+1$ hervorgehende Aussage erfüllt. Damit ist das Induktionsverfahren abgeschlossen, und wir dürfen (2) bis (5) für $j = 1, 2, \ldots$ als erfüllt ansehen.

Wegen $0 < \lambda_j < 1$ und (2) ist die Reihe $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \lambda_r \mathfrak{z}^{(r)}$ konvergent. Wir setzen $\mathfrak{y} = \sum\limits_{1}^{\infty} \lambda_r \mathfrak{z}^{(r)}$. Im folgenden sei $j \geq 1$. Wegen der koordinatenweisen Konvergenz und (4) ist

(6) $$y_k = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r z_k^{(r)} = \sum_{r=j}^{\infty} \lambda_r z_k^{(r)} \quad \text{für} \quad k > q_{j-1}.$$

Insbesondere ist

$$|y_k| \leq \lambda_j |z_k^{(j)}| + \sum_{r=j+1}^{\infty} |z_k^{(r)}| \quad \text{für} \quad q_{j-1} < k \leq q_j.$$

Schätzen wir hier den ersten Summanden rechts nach (5) und (3) durch 1, alle übrigen Summanden ($r = j+1, j+2, \ldots$) nach (3) durch $\frac{1}{2^r}$ ab, so erhalten wir $|y_k| \leq 1 + \frac{1}{2^j}$. Die Folge $\{y_k\}$ ist somit beschränkt. Weiter erhalten wir aus (6), wenn wir $k = n_j$ setzen,

$$|y_{n_j}| \geq \lambda_j |z_{n_j}^{(j)}| - \sum_{r=j+1}^{\infty} |z_{n_j}^{(r)}| \geq 1 - \frac{1}{2^j}$$

Daraus ergibt sich $\overline{\lim} |y_k| \geq 1$. Andererseits ist

$$|y_{q_{j-1}+1}| \leq \sum_{r=j}^{\infty} |z_{q_{j-1}+1}^{(r)}| \leq \sum_{r=j}^{\infty} \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Daraus ergibt sich $\underline{\lim} |y_k| = 0$. Die Folge $\{y_k\}$ ist somit divergent.

II: *Teil a), unter der Voraussetzung, daß die* $\mathfrak{e}_i$ *allein keine, zusammen mit* $\mathfrak{e}$ *aber eine Grundmenge von* $\mathfrak{F}$ *bilden.* Die lineare abgeschlossene Hülle der $\mathfrak{e}_i$ in $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{F}}$. $\overline{\mathfrak{F}}$ ist mit den Halbnormen aus $\mathfrak{F}$ ebenfalls ein *FK*-Raum. Es ist $\overline{\mathfrak{F}} \neq \mathfrak{F}$.

Wir überzeugen uns zuerst davon, daß $\mathfrak{e} \notin \overline{\mathfrak{F}}$. Wir wählen ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$. Dann gibt es Zahlen λ_p und abbrechende Stellen $\mathfrak{x}^{(p)}$ ($p = 0, 1, \ldots$) mit $\lambda_p \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^{(p)} \to \mathfrak{x}$ ($p \to \infty$). Nun machen wir die Annahme $\mathfrak{e} \in \overline{\mathfrak{F}}$. Dann gibt es abbrechende Stellen $\mathfrak{y}^{(p)}$ mit $\mathfrak{y}^{(p)} \to \mathfrak{e}$. Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge der Stellenfolge $\mathfrak{y}^{(p)}$ übergehen, können wir erreichen, daß

$$|\lambda_p| \|\mathfrak{y}^{(p)} - \mathfrak{e}\|_i < \frac{1}{p+1} \qquad (i = 0, \ldots, p;\ p = 0, 1, \ldots)$$

ist, d.h. $\lambda_p(\mathfrak{y}^{(p)} - \mathfrak{e}) \to 0$ strebt. Wir setzen $\mathfrak{z}^{(p)} = \mathfrak{x}^{(p)} + \lambda_p \mathfrak{y}^{(p)}$. Dann strebt

$$\mathfrak{z}^{(p)} = (\lambda_p \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^{(p)}) + \lambda_p (\mathfrak{y}^{(p)} - \mathfrak{e}) \to \mathfrak{x}.$$

Da die $\mathfrak{z}^{(p)}$ abbrechende Stellen sind, gilt $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{F}}$. Es wäre also $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$. Daher gilt $\mathfrak{e} \notin \overline{\mathfrak{F}}$.

Daraus folgt die Existenz eines i_0 (ganz, ≥ 0) mit der Eigenschaft: Ist $\mathfrak{x}$ eine abbrechende Stelle, so ist mindestens eine der Aussagen $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{e}\|_j < \frac{1}{i_0 + 1}$ ($j = 0, \ldots, i_0$) falsch. Andernfalls gäbe es nämlich zu jedem $i = 0, 1, \ldots$ ein abbrechendes $\mathfrak{x}^{(i)}$ mit $\|\mathfrak{x}^{(i)} - \mathfrak{e}\|_j < \frac{1}{i+1}$ ($j = 0, \ldots, i$), woraus $\mathfrak{x}^{(i)} \to \mathfrak{e}$, also $\mathfrak{e} \in \overline{\mathfrak{F}}$ folgen würde.

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis, daß jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$ in der Form $\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{e} + \bar{\mathfrak{x}}$ mit $\bar{\mathfrak{x}} \in \overline{\mathfrak{F}}$ dargestellt werden kann. Dabei machen wir von i_0 Gebrauch. Zunächst gibt es Zahlen λ_p und abbrechende $\mathfrak{x}^{(p)}$ ($p = 0, 1, \ldots$) mit

$$\mathfrak{y}^{(p)} = \lambda_p \mathfrak{e} + \mathfrak{x}^{(p)} \to \mathfrak{x} \qquad (p \to \infty).$$

Wir wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein p_0 mit

$$(7) \qquad \|\mathfrak{y}^{(q)} - \mathfrak{y}^{(p)}\|_j < \frac{\varepsilon}{i_0 + 1} \qquad (j = 0, \ldots, i_0) \qquad \text{für} \quad q > p > p_0.$$

Ein Paar (p, q) mit $q > p > p_0$ halten wir nun fest. Wir wollen $|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon$ nachweisen. Es sei $\lambda_q - \lambda_p \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{y}^{(q)} - \mathfrak{y}^{(p)}$ in der Form

$$\mathfrak{y}^{(q)} - \mathfrak{y}^{(p)} = (\lambda_q - \lambda_p)(\mathfrak{e} - \mathfrak{z}) \qquad (\mathfrak{z} \text{ abbrechend})$$

darstellbar. Wegen der Eigenschaft von i_0 gibt es ein j_0 $(0 \leq j_0 \leq i_0)$ mit

$$\|\mathfrak{z} - \mathfrak{e}\|_{j_0} \geq \frac{1}{i_0 + 1}.$$

Aus (7) für $j = j_0$ folgt

$$|\lambda_q - \lambda_p| \, \|\mathfrak{e} - \mathfrak{z}\|_{j_0} < \frac{\varepsilon}{i_0 + 1}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben $|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon$. Damit ist die Konvergenz der Folge $\{\lambda_p\}$ nachgewiesen: $\lambda_p \to \lambda$. Wegen

$$\mathfrak{x}^{(p)} = \mathfrak{y}^{(p)} - \lambda_p \mathfrak{e} \to \mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{e} \qquad (p \to \infty)$$

können wir auf $(\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{e}) \in \overline{\mathfrak{F}}$ schließen. Also ist $\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{e} + (\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{e})$ eine Darstellung von $\mathfrak{x}$ in der gewünschten Form. Daß diese Darstellung eindeutig ist, sieht man ganz leicht ein; wir benötigen es aber nicht.

Der Beweis der Behauptung ergibt sich jetzt mühelos: Nach dem in I Bewiesenen, angewandt auf den *FK*-Raum $\overline{\mathfrak{F}}$, ist entweder jedes $\bar{\mathfrak{x}} \in \overline{\mathfrak{F}}$, und damit jedes $\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{e} + \bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{F}$, konvergent, oder gibt es in $\overline{\mathfrak{F}}$, und damit in $\mathfrak{F}$, ein beschränktes divergentes $\mathfrak{y}$.

III: *Teil b)*. Jedem $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{\overline{\mathfrak{F}}}$ ordnen wir die Stelle

$$\mathfrak{x} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \ldots\}$$

zu. Die Gesamtheit aller dieser $\mathfrak{x}$ bildet in naheliegender Weise einen *FK*-Raum $\mathfrak{F}$, in dem die Bilder der $\tilde{\overline{\mathfrak{F}}}$-Elemente $\{1, 0, 0, \ldots\}$, $\{0, 1, 0, \ldots\}, \ldots$, also die Stellen

$$\{1, 1, 1, \ldots\}, \ \{0, 1, 1, \ldots\}, \ \{0, 0, 1, \ldots\}, \ \ldots,$$

eine Grundmenge bilden. Jede dieser Stellen ist eine Linearkombination von Stellen

$$\{1, 1, 1, \ldots\}, \ \{1, 0, 0, \ldots\}, \ \{0, 1, 0, \ldots\}, \ \ldots,$$

die daher ebenfalls eine Grundmenge in $\mathfrak{F}$ bilden. Die Anwendung von Teil a) auf $\mathfrak{F}$ liefert die Behauptung. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

§ 4. Lückenperfektheit

Wir betrachten im folgenden nur solche Matrixverfahren, deren Wirkfeld sich als *FK*-Raum auffassen läßt — was bei Matrizen mit stetigem ersten Parameter nicht immer zutrifft.

Bekanntlich heißt ein Matrixverfahren A perfekt, wenn $e, e_0, e_1, \ldots$ eine Grundmenge in $\mathfrak{A}$ oder — äquivalent damit — wenn $e_0, e_1, \ldots$ eine Grundmenge in $\tilde{\mathfrak{A}}$ bilden ($\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ als FK-Räume aufgefaßt). Die lineare abgeschlossene Hülle der $e, e_0, e_1, \ldots$ in $\mathfrak{A}$ bzw. der $e_0, e_1, \ldots$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$ nennen wir (vgl. ZELLER [1956]) den perfekten Teil $\mathfrak{A}^P$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ des Wirkfeldes. $\mathfrak{A}^P$ und $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ sind, mit den Halbnormen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}$, FK-Räume, und sind ebenso wie $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ vermöge $\tilde{x}_k = x_0 + \cdots + x_k$ ($x \in \mathfrak{A}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{A}}$) eineindeutig aufeinander bezogen. Indem wir mit jedem der beiden Räume $\mathfrak{A}^P$ und $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ gleichzeitig auch den andern ins Auge fassen, sprechen wir auch kurz von dem perfekten Teil des Verfahrens A. Genau dann ist A perfekt, wenn der perfekte Teil mit dem ganzen Wirkfeld zusammenfällt. Wir notieren

Hilfssatz 4.1. *Der perfekte Teil $\mathfrak{A}^P$ eines permanenten gewöhnlichen Matrixverfahrens A enthält alle beschränkten A-limitierbaren Folgen. Der perfekte Teil eines konvergenztreuen beliebigen Matrixverfahrens, dessen Wirkfeld ein FK-Raum ist, enthält alle konvergenten Folgen.*

Beweis. Der erste Teil folgt aus ZELLER [1951], Sätze 3.5 und 5.7b. Der zweite Teil — nur diesen benötigen wir später — ergibt sich daraus, daß im BK-Raum $\mathfrak{S}_C$ der konvergenten Folgen $e, e_0, e_1, \ldots$ eine Grundmenge bilden. Der FK-Raum $\mathfrak{A}$ hat wegen $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}_C$ eine gröbere Topologie als $\mathfrak{S}_C$, daher ist die lineare abgeschlossene Hülle von $e, e_0, e_1, \ldots$ im FK-Raum $\mathfrak{A}$ mindestens so groß wie im BK-Raum $\mathfrak{S}_C$, w. z. z. w.

Aus Satz 3.1 und Hilfssatz 4.1 folgt nun unmittelbar

Satz 4.2 (Existenz beschränkter divergenter Folgen im perfekten Teil). *Der perfekte Teil $\mathfrak{A}^P$ des permanenten Verfahrens A enthält entweder nur die konvergenten Folgen, oder mindestens eine beschränkte divergente Folge.*

Wie wir in § 2 sahen, sind für unsere Zwecke die aus A für beliebige $\mathfrak{k}$ durch Spaltenzusammenfassung entstehenden Verfahren A^* von Bedeutung. Wir wollen diese A^* als (die zu A gehörigen) *Lückenverfahren* bezeichnen.

Definition 4.3 (Lückenperfektheit). *Das permanente Verfahren A heißt lückenperfekt, wenn jedes zu A gehörige Lückenverfahren A^* perfekt ist.*

Ein perfektes A ist nicht notwendig lückenperfekt. Dies zeigt das Beispiel

$$3A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 2 & 1-2^{-1} & 2^{-1} & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1-2^{-2} & 2^{-2} & & \\ & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(die leeren Stellen sind mit Nullen zu besetzen). Erfüllt $\mathfrak{g} = \{g_m\}$ die Beziehung $\sum_m a_{mk} g_m = 0$ ($k = 0, 1, \ldots$), so ist $\mathfrak{g}$ ein Vielfaches von $\bar{\mathfrak{g}} = \{0, 1, \frac{1}{2}, -1, \ldots\}$ mit $\sum_m |\bar{g}_m| = \infty$. Nach dem bekannten Kriterium von MAZUR [1930] ist A

perfekt. Durch Zusammenfassen je zweier Spalten erhält man

$$\mathfrak{z}A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & \ldots \end{pmatrix}.$$

A^* hat dasselbe Wirkfeld (mit derselben Topologie) wie das Verfahren

$$\mathfrak{z}B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & \ldots \end{pmatrix},$$

das wegen der Orthogonalfolge $\mathfrak{h} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ mit $\Sigma_m |h_m| < \infty$ nicht perfekt ist. Damit ist auch A^* nicht perfekt.

Beim folgenden Satz denken wir uns ein festes $\mathfrak{k}$ zugrunde gelegt.

Satz 4.4 (Umkehrbedingungen für lückenperfekte Verfahren). *Ist das permanente Verfahren A lückenperfekt und $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ eine Umkehrbedingung bezüglich beschränkter Folgen, so auch bezüglich beliebiger Folgen.*

Beweis. Ist A lückenperfekt, also das zu A und $\mathfrak{k}$ gehörige Lückenverfahren A^* perfekt, und limitiert A^* keine beschränkten divergenten Folgen, so ist A^* nach Satz 4.2 konvergenzgleich.

Wir formen jetzt die Definition 4.3 *zu einem für die Anwendungen bequemen Kriterium um.* Folgende Sprechweise sei vereinbart. Ist $\mathfrak{F}$ ein FK-Raum, $\mathfrak{G}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{F}$ und gibt es zu einem $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$ eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(p)} \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{x}^{(p)} \to \mathfrak{x}$ $(p \to \infty)$, so sagen wir, $\mathfrak{x}$ lasse sich durch Stellen aus $\mathfrak{G}$ *approximieren*.

A sei permanent und ein $\mathfrak{k}$ sei gegeben. Wir bilden das zugehörige A^*. Die $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ mit $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ fassen wir zum linearen Raum $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$ zusammen. Die in $\widetilde{\mathfrak{A}}$ vorhandene Struktur macht auch $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ zum FK-Raum (z.B. ist $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ vollständig wegen der koordinatenweisen Konvergenz in $\widetilde{\mathfrak{A}}$). $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$, in dieser Weise zum FK-Raum gemacht, bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathfrak{A}}'_\mathfrak{k}$. Ist $\tilde{\mathfrak{x}} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ gegeben und streichen wir die Nullen an den Stellen $k \neq k_l$ weg, so erhalten wir ein $\tilde{\mathfrak{x}}^* \in \widetilde{\mathfrak{A}}^*$. Dadurch sind $\widetilde{\mathfrak{A}}^*$ und $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ eineindeutig aufeinander bezogen $(\widetilde{\mathfrak{A}}^* \leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k})$, und die in $\widetilde{\mathfrak{A}}^*$ vorhandene Struktur macht $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ auf eine zweite Weise zu einem FK-Raum, den wir mit $\widetilde{\mathfrak{A}}''_\mathfrak{k}$ bezeichnen. Wesentlich wird nachher sein, daß in $\widetilde{\mathfrak{A}}'_\mathfrak{k}$ derselbe Konvergenzbegriff vorliegt wie in $\widetilde{\mathfrak{A}}''_\mathfrak{k}$ (vgl. ZELLER [1951, Satz 4.5]). Die bei $\widetilde{\mathfrak{A}}^* \leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ in $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k}$ gelegenen Bilder der $\mathfrak{e}_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}^*$ $(i = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}_i^{(\mathfrak{k})}$. Sie entstehen aus den einzelnen $\mathfrak{e}_i$ durch Einstreuen

von Nullen, und zwar hat $e_i^{(\mathfrak{k})}$ als k_i-te Koordinate eine 1, während sonst lauter Nullen vorliegen. Die folgenden Aussagen sind nun der Reihe nach äquivalent.

1. A^* ist perfekt.
2. In $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ bilden die e_i eine Grundmenge.
3. In $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}}''$ bilden die $e_i^{(\mathfrak{k})}$ eine Grundmenge.
4. In $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}}'$ bilden die $e_i^{(\mathfrak{k})}$ eine Grundmenge.
5. Jedes $u \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}}'$ läßt sich in $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}}'$ durch abbrechende Stellen approximieren.
6. Jedes $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$ mit $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ läßt sich in $\tilde{\mathfrak{A}}$ durch abbrechende Stellen $u^{(p)}$ mit $u_k^{(p)} = 0$ $(k \neq k_l)$ approximieren.

Verwenden wir die Äquivalenz von 1. und 6., so erhalten wir, indem wir noch beliebige $\mathfrak{k}$ in Betracht ziehen, aus Definition 4.3 das

Kriterium 4.5 (Lückenperfektheit). *Das permanente Verfahren A ist genau dann lückenperfekt, wenn sich jedes $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$ durch abbrechende Stellen approximieren läßt, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei u der Fall ist.*

Die folgende Definition liegt nun nahe.

Definition 4.6 (Lückenperfekter Teil). *Ist A permanent, so verstehen wir unter dem lückenperfekten Teil von $\tilde{\mathfrak{A}}$ die Gesamtheit der $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$, die sich in $\tilde{\mathfrak{A}}$ approximieren lassen durch abbrechende Stellen, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei u der Fall ist.*

Dem lückenperfekten Teil von $\tilde{\mathfrak{A}}$ entspricht in $\mathfrak{A}$ der lückenperfekte Teil von $\mathfrak{A}$. Zusammenfassend sprechen wir auch von dem lückenperfekten Teil von A. Der lückenperfekte Teil ist im allgemeinen keine lineare Teilmenge des Wirkfeldes. Das permanente Verfahren A ist genau dann lückenperfekt, wenn der lückenperfekte Teil von A mit dem Wirkfeld $\mathfrak{A}$ zusammenfällt.

Beim folgenden Satz denken wir uns wieder ein festes $\mathfrak{k}$ zugrunde gelegt.

Satz 4.7 (Umkehrbedingungen für den lückenperfekten Teil). *Ist das Verfahren A permanent und $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ eine Umkehrbedingung bezüglich beschränkter Folgen, so auch bezüglich aller Folgen des lückenperfekten Teils.*

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Wir bilden das zu A und $\mathfrak{k}$ gehörige Lückenverfahren A^*. A^* limitiert keine beschränkte divergente Folge, also liegt in $\mathfrak{A}^{*P}$ keine beschränkte divergente Folge. Nach Satz 4.2 enthält daher $\tilde{\mathfrak{A}}^{*P}$ nur Stellen $\tilde{\xi}^*$ mit konvergenter $\sum \tilde{x}_k^*$.

Nun entstamme $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}}$ (wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie bei der Herleitung des Kriteriums 4.5) dem lückenperfekten Teil von A. $\tilde{\xi}$ läßt sich durch Linearkombinationen der $e_i^{(\mathfrak{k})}$ approximieren. Bei der Abbildung $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{k}} \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}^*$ gehe $\tilde{\xi}$ in $\tilde{\xi}^*$ über ($\tilde{\xi}^*$ entsteht aus $\tilde{\xi}$ durch Wegstreichen der Nullen bei $k \neq k_l$). Daher läßt sich $\tilde{\xi}^*$ durch Linearkombinationen der e_i approximieren; somit liegt $\tilde{\xi}^*$ in $\tilde{\mathfrak{A}}^{*P}$. Nach der zu Beginn des Beweises angestellten Überlegung ist $\sum \tilde{x}_k^*$ konvergent, also ist auch (Einstreuen von Nullen) $\sum \tilde{x}_k$ konvergent.

§ 5. Verfahren mit (AK), CESÀRO- und ABEL-Verfahren

In diesem und im nächsten Paragraphen wenden wir unsere Überlegungen auf einige spezielle Limitierungsverfahren an. Des öfteren wird es sich um die Feststellung handeln, daß das untersuchte Verfahren lückenperfekt ist. Da wir dazu Kriterium 4.5 heranziehen, spielen Approximationsfragen in den Wirkfeldern die Hauptrolle.

Das Verfahren A sei permanent und in der FF-Form durch die gewöhnliche Matrix A gegeben. In § 2 definierten wir die Eigenschaft (AK) von A. Man prüft unmittelbar nach, daß (AK) äquivalent ist mit

$$\text{(AK)} \qquad \{s_0, \ldots, s_p, 0, 0, \ldots\} \to \{s_0, s_1, \ldots\} \qquad (p \to \infty) \text{ für } \mathfrak{s} \in \mathfrak{A}_0$$

(wie immer sind Grenzwertrelationen bei Elementen eines FK-Raums im Sinn der Topologie des Raums zu verstehen). Dies wiederum ist äquivalent mit

$$\text{(AK)} \qquad \{s_0, \ldots, s_p, s, s, \ldots\} \to \{s_0, s_1, \ldots\} \qquad (p \to \infty) \text{ für } \mathfrak{s} \in \mathfrak{A},$$

wobei $s = \lim t_m$. Daraus ersieht man, daß ein (AK)-Verfahren perfekt ist. Nun bleibt die (AK)-Eigenschaft bei Spaltenzusammenfassung erhalten. Dies ergibt

Satz 5.1 (Lückenperfektheit bei (AK)). *Ein permanentes* (AK)*-Verfahren ist lückenperfekt.*

Bei der Aufstellung von Lückensätzen für (AK)-Verfahren hat man also die durch Satz 4.4 gegebene Erleichterung.

Wir kommen zu den CESÀROschen Verfahren C_α ($\alpha \geq 0$), die auf den miteinander äquivalenten (permanenten) Transformationen

$$\mathfrak{t} = C_\alpha \mathfrak{s} \equiv t_m = \binom{m+\alpha}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k+\alpha-1}{m-k} s_k,$$

$$\mathfrak{t} = C'_\alpha \mathfrak{u} \equiv t_m = \binom{m+\alpha}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k+\alpha}{m-k} u_k$$

beruhen. $\mathfrak{C}_\alpha$ ist ein BK-Raum mit der Norm $\|\mathfrak{s}\| = \sup |t_m|$, ferner ist C_α perfekt (MAZUR [1930]). Für $0 \leq \alpha \leq 1$ besitzt C_α die (AK)-Eigenschaft, ist C_α also lückenperfekt. Jedoch gilt sogar

Satz 5.2 (Lückenperfektheit von C_α). *Die* CESÀROschen *Verfahren* C_α ($\alpha \geq 0$) *sind lückenperfekt.*

Beweis. Für festes α sei $C'_\alpha = \{c'_{mk}\}$. Nach ZELLER [1953_3, Satz 5] gilt

$$\{c'_{p0} u_0, \ldots, c'_{pp} u_p, 0, 0, \ldots\} \to \{u_0, u_1, \ldots\} \qquad (p \to \infty)$$

für $\mathfrak{u} \in \mathfrak{C}_\alpha$. Kriterium 4.5 ergibt die Behauptung.

Nun sei A das auf der (permanenten) Transformation

$$t_\mu = (1-\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k s_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k \qquad (0 \leq \mu < 1,\ \mu \to 1-)$$

beruhende ABELsche Verfahren. Mit den Halbnormen

$$\|\mathfrak{s}\|_0 = \sup_{0 \le \mu < 1} |t_\mu|, \quad \|\mathfrak{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{i+1}\right)^k |u_k| \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

ist $\mathfrak{A}$ ein FK-Raum, ferner ist A perfekt (WLODARSKI [1955], ZELLER [1953_1]). Für $u \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ gilt

$$\{u_0 \varrho^0, u_1 \varrho^1, \ldots\} \to \{u_0, u_1, \ldots\} \qquad (\varrho \to 1 -),$$

außerdem bei festem ϱ $(0 \le \varrho < 1)$

$$\{u_0 \varrho^0, \ldots, u_p \varrho^p, 0, 0, \ldots\} \to \{u_0 \varrho^0, u_1 \varrho^1, \ldots\} \qquad (p \to \infty)$$

(ZELLER [1953_1]). Wegen Kriterium 4.5 ergibt sich daraus (vgl. unten die ähnlichen Schlüsse bei D_λ)

Satz 5.3 (Lückenperfektheit von A). *Das* ABEL*sche Verfahren ist lückenperfekt.*

Wir erhalten nun leicht das (bekannte) Resultat (s. Satz 1.2), *daß* $u_k = 0$ $(k \neq k_l)$ *genau dann eine Lückenbedingung für das A-Verfahren ist, wenn es ein* $\vartheta > 0$ *gibt, für das*

$$k_{l+1} - k_l > \vartheta k_l \qquad (l = 0, 1, \ldots)$$

ist. Wegen Satz 4.4 braucht man nur beschränkte Folgen zu berücksichtigen. Für solche ist aber A äquivalent mit C_1, und für C_1 steht Satz 2.3 zur Verfügung. Die analoge Überlegung können wir mit C_α anstatt A anstellen; der resultierende Lückensatz folgt wegen $C_\alpha \to A$ natürlich auch direkt aus dem A-Satz.

Wir zeigen jetzt noch, wie wir mit Hilfe unserer Methode *das high-indices-Theorem (Satz 1.3) auf einen O-Umkehrsatz zurückführen* können.

Verwenden wir beim ABELschen Verfahren DIRICHLET-Reihen statt Potenzreihen, so kommen wir zum D_λ-Verfahren (DIRICHLET-Reihen-Verfahren). Hierbei bedeutet λ eine gegebene reelle Folge $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\ldots}$ mit $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ und $\lambda_k \to \infty$. D_λ beruht auf der (permanenten) Transformation

$$t_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k \mu} u_k \qquad (0 < \mu < \infty, \ \mu \to +0).$$

Da uns das D_λ-Verfahren jetzt nur im Zusammenhang mit dem high-indices-Theorem interessiert, setzen wir voraus, daß es ein $\vartheta > 0$ gibt, für das

$$\lambda_{k+1} > (1 + \vartheta)\, \lambda_k \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

ist. Das genannte Theorem besteht dann in der Aussage, daß D_λ konvergenzgleich ist.

Wegen (1) strebt $\lambda_k^{-1} \log k \to 0$ $(k \to \infty)$. Daraus folgt (vgl. HARDY-RIESZ [1915, Theorem 9]), daß für $u \in \widetilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ die Reihen für die t_μ absolut konvergieren.

In der üblichen Weise zeigt man, daß $\mathfrak{D}_\lambda$ ein FK-Raum ist mit den Halbnormen

$$\|\mathfrak{s}\|_0 = \sup_{0<\mu<\infty} |t_\mu|, \qquad \|\mathfrak{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\, e^{-\lambda_k i^{-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Für $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ strebt

$$(2) \qquad \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, u_1 e^{-\lambda_1 \varrho}, \ldots\} \to \{u_0, u_1, \ldots\} \quad (\varrho \to +0).$$

Dies verifiziert man ohne Schwierigkeit. Zum Beispiel ist bezüglich der 0-ten Halbnorm zu zeigen, daß

$$\sup_{0<\mu<\infty} |t_{\mu+\varrho} - t_\mu| \to 0 \qquad (\varrho \to +0)$$

gilt, was wegen der Stetigkeit von t_μ in $0<\mu<\infty$ und wegen der Existenz von $\lim\limits_{\mu \to +0} t_\mu$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty} t_\mu$ sicher richtig ist. Weiter gilt, wiederum für $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathfrak{D}}_\lambda$, wenn ϱ $(0<\varrho<\infty)$ fest ist,

$$(3) \qquad \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, \ldots, u_p e^{-\lambda_p \varrho}, 0, 0, \ldots\} \to \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, u_1 e^{-\lambda_1 \varrho}, \ldots\} \quad (p \to \infty).$$

Auch dies weist man unmittelbar nach. Aus (2) und (3) zusammen folgt, daß sich jedes $\mathfrak{u} \in \widetilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ durch abbrechende Stellen approximieren läßt. Setzen wir nämlich $\{u_k^{-\lambda_k \varrho}\} = \mathfrak{u}^{(\varrho)}$, so können wir wegen (2) zunächst eine Folge $\{\varrho_j\}_{j=0,1,\ldots}$ $(0<\varrho_j<\infty)$ so bestimmen, daß

$$\|\mathfrak{u}^{(\varrho_j)} - \mathfrak{u}\|_i < \frac{1}{j+1} \qquad (i = 0, \ldots, j;\ j = 0, 1, \ldots)$$

ist. Sodann können wir wegen (3) zu jedem $j = 0, 1, \ldots$ eine abbrechende Stelle $\mathfrak{x}^{(j)}$ finden, so daß

$$\|\mathfrak{x}^{(j)} - \mathfrak{u}^{(\varrho_j)}\|_i < \frac{1}{j+1} \qquad (i = 0, \ldots, j;\ j = 0, 1, \ldots)$$

ist. Es gilt dann

$$\|\mathfrak{x}^{(j)} - \mathfrak{u}\|_i < \frac{2}{j+1} \qquad (i = 0, \ldots, j;\ j = 0, 1, \ldots),$$

also strebt $\mathfrak{x}^{(j)} \to \mathfrak{u}$ $(j \to \infty)$.

Damit ist bewiesen, daß D_λ perfekt ist. Aus Satz 4.2 folgt weiter, daß D_λ konvergenzgleich ist, wenn dies im Bereich der beschränkten Folgen der Fall ist. *Damit ist das high-indices-Theorem auf den folgenden Satz zurückgeführt: Ein beschränktes $\mathfrak{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ ist konvergent.*

Diese letzte Aussage gewinnen wir leicht aus dem gleich nachher angegebenen O-Satz, wie wir jetzt noch überlegen. Es sei $\mathfrak{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ und $\mathfrak{s}$ beschränkt. Dann ist insbesondere $\mathfrak{u}$ beschränkt; wegen

$$\frac{\lambda_k |u_k|}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = |u_k| \left(1 + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right) \leq |u_k| \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)$$

$(k = 1, 2, \ldots)$ ist also die TAUBER-Bedingung

$$(4) \qquad u_k = O\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) \qquad (k \to \infty)$$

erfüllt, woraus die Konvergenz von $\mathfrak{s}$ folgt.

Der benützte O-Satz lautet: Aus $\mathfrak{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ und (4) folgt die Konvergenz von $\mathfrak{s}$. [Hierbei braucht (1) nicht vorausgesetzt zu werden.] Vgl. HARDY [1949, Theorem 104, S. 161 und 176].

§ 6. EULER-KNOPP- und BOREL-Verfahren

Das EULER-KNOPPsche Verfahren E_α $(0 < \alpha \leq 1)$ beruht auf den miteinander äquivalenten (permanenten) Transformationen

$$\mathfrak{t} = E_\alpha \mathfrak{s} \equiv t_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} s_k,$$

$$\mathfrak{v} = E''_\alpha \mathfrak{u} \equiv v_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} u_k;$$

in der letzten Formel ist $\binom{m-1}{-1} = 1$ für $m = 0$ und $\binom{m-1}{-1} = 0$ für $m = 1, 2, \ldots$. Setzt man

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \qquad v(w) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m w^m,$$

so ist die Transformation auch durch die Beziehungen

$$v(w) = u\left(\frac{\alpha w}{1-(1-\alpha)w}\right), \qquad u(z) = v\left(\frac{z}{\alpha + (1-\alpha) z}\right)$$

definiert. Für $\mathfrak{u} \in \tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$ ist daher $u(z)$ regulär in dem Kreisgebiet

$$K_\alpha(z): \quad \left| z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \right| < \frac{1}{2-\alpha},$$

erner dreiecksstetig bei $z = 1$, wenn noch $u(1) = v(1)$ gesetzt wird. Das Wirkeld von E_α ist ein BK-Raum mit der Norm

$$\|\mathfrak{u}\| = \sup_m |t_m| = \sup_n \left| \sum_{m=0}^{n} v_m \right|,$$

ferner ist E_α perfekt (MAZUR [1930]).

Wir bereiten den Beweis des Satzes 6.5 durch einige Hilfssätze vor.

Hilfssatz 6.1. *Liegt* $\mathfrak{u}$ *in* $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$, *so sind die Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \varrho^k$ *für* $0 \leq \varrho \leq 1$ *gleichmäßig* E_α*-summierbar, d.h. die transformierten Reihen* $\sum_{m=0}^{\infty} v_m^{(\varrho)}$ *konvergieren gleichmäßig. Dabei ist* $E_\alpha\text{-}\Sigma_k u_k \varrho^k = \Sigma_m v_m^{(\varrho)} = u(\varrho)$ $(0 \leq \varrho \leq 1)$.

Beweis. Es gilt die Matrizenrelation

(1) $$E''_\alpha(\operatorname{diag}\{\varrho^k\}) = E''_\beta(\operatorname{diag}\{\sigma^k\})\, E''_\alpha,$$

bei der

$$\beta = \alpha + (1-\alpha)\varrho, \qquad \sigma = \frac{\varrho}{\alpha + (1-\alpha)\varrho}$$

gesetzt ist. Dies erkennt man durch direkte Verifikation oder aus der funktionentheoretischen Deutung der E-Transformation. Aus $0<\alpha\leq 1$ und $0\leq\varrho\leq 1$ folgt $\alpha\leq\beta\leq 1$ und $0\leq\sigma\leq 1$.

Wir setzen

$$\{v_0\sigma^0, v_1\sigma^1, \ldots\} = \tilde{\mathfrak{x}}^{(\sigma)}, \qquad \{v_0\sigma^0, v_0\sigma^0 + v_1\sigma^1, \ldots\} = \mathfrak{x}^{(\sigma)}.$$

Anwendung von (1) auf u liefert

$$\mathfrak{v}^{(\varrho)} = E''_\beta\,\tilde{\mathfrak{x}}^{(\sigma)}.$$

Indem wir von Reihen zu Folgen übergehen, schreiben wir dies in der Form

$$\mathfrak{t}^{(\varrho)} = E_\beta\,\mathfrak{x}^{(\sigma)}.$$

$\mathfrak{x}^{(\sigma)}$ ist wegen $\mathfrak{u}\in\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$ gleichmäßig beschränkt und konvergiert gleichmäßig gegen $v(\sigma)$. Daraus folgt unschwer (man benütze $\alpha\leq\beta\leq 1$), daß auch $\mathfrak{t}^{(\varrho)}$ gleichmäßig gegen $v(\sigma)$ konvergiert. Hierbei ist $v(\sigma)=u(\varrho)$.

Hilfssatz 6.2. *Für* $\mathfrak{u}\in\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$ *gilt*

$$\{u_0\varrho^0, u_1\varrho^1, \ldots\}\to\{u_0, u_1, \ldots\} \qquad (\varrho\to 1-).$$

Beweis. Mit $\mathfrak{v}^{(\varrho)} = E''_\alpha\{u_k\varrho^k\}$ lautet die Behauptung

$$\lim_{\varrho\to 1-} V(\varrho) = 0 \quad \text{mit} \quad V(\varrho) = \sup_n \left|\sum_{m=0}^{n}(v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)})\right|.$$

Für $r=0, 1, \ldots$ ist $V(\varrho)$

$$\leq \sum_{m=0}^{r}|v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}| + \sup_{n>r}\left|\sum_{m=0}^{\infty}(v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}) - \sum_{m=n+1}^{\infty}(v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)})\right|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{r}|v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}| + |u(\varrho) - u(1)| + \sup_{n>r}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}v_m^{(\varrho)}\right| + \sup_{n>r}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}v_m^{(1)}\right|,$$

woraus die Behauptung folgt wegen der in ϱ $(0\leq\varrho\leq 1)$ gleichmäßigen Konvergenz von $\Sigma_m v_m^{(\varrho)}$ (Hilfssatz 6.1) und wegen $u(\varrho)\to u(1)$, $v_m^{(\varrho)}\to v_m^{(1)}$ (m fest) für $\varrho\to 1-$.

Beim folgenden Hilfssatz denken wir uns ein festes $\mathfrak{t}$ zugrunde gelegt.

Hilfssatz 6.3. *Für das Funktionselement* $f(z)=\sum_0^\infty f_k z^k$ *mit* $\overline{\lim}_k\sqrt[k]{|f_k|}<\infty$ *sei* $f_k=0$ $(k\neq k_l)$; *ferner sei* K *ein kompakter Teil des zugehörigen (offenen)* Mittag-Leffler-*Sterns. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon>0$ *ein Polynom* $g(z)=\sum g_k z^k$ *mit* $|f(z)-g(z)|<\varepsilon$ *für* $z\in K$ *und* $g_k=0$ $(k\neq k_l)$.

Beweis. Wir nehmen ein Summierungsverfahren A, das $\sum f_k z^k$ in jedem kompakten Teil des Sterns gleichmäßig summiert und das in der RF-Form durch eine zeilenfinite Matrix A' gegeben wird. Solche Verfahren erhalten wir etwa aus verschiedenen Mittag-Lefflerschen Verfahren der Polynomentwicklung (vgl. z.B. Knopp [1926]). Für genügend großes m hat nun das Polynom $\Sigma_k a'_{mk}f_k z^k$ die gewünschten Eigenschaften.

Hilfssatz 6.4. *Liegt* $u \in \tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$, *so läßt sich für jedes feste* ϱ $(0 \leq \varrho < 1)$ *die Stelle* $u^{(\varrho)} = \{u_k \varrho^k\}$ *in* $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$ *durch abbrechende Stellen approximieren, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei* u *der Fall ist.*

Beweis. Wir wählen ein festes ϱ $(0 \leq \varrho < 1)$. Wegen $u^{(\varrho)}(z) = u(\varrho z)$ ist $u^{(\varrho)}(z)$ regulär im abgeschlossenen Kreisgebiet $\overline{K}_\alpha(z)$, $v^{(\varrho)}(w)$ regulär in $|w| \leq 1$. Nach Hilfssatz 6.3 bestimmen wir eine Polynomfolge $u^{(\varrho,p)}(z) = \sum_k u_k^{(\varrho,p)} z^k$ $(p = 0, 1, \ldots)$, die für $p \to \infty$ in einem $K_\alpha(z)$ ganz im Innern enthaltenden abgeschlossenen Gebiet gleichmäßig gegen $u^{(\varrho)}(z)$ konvergiert und für welche $u_k^{(\varrho,p)} = 0$ ist mindestens für diejenigen Indizes k, für die $u_k = 0$ ist. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß $v^{(\varrho)}(w)$ und alle $v^{(\varrho,p)}(w)$ in $|w| \leq 1 + \delta$ regulär sind und daß $v^{(\varrho,p)}(w)$ dort gleichmäßig gegen $v^{(\varrho)}(w)$ konvergiert. Wir wollen nun zeigen, daß

$$\mathrm{u}^{(\varrho,p)} \to \mathrm{u}^{(\varrho)} \qquad (p \to \infty) \tag{2}$$

strebt in $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$, womit die Behauptung bewiesen sein wird. Ist

$$|v^{(\varrho,p)}(w) - v^{(\varrho)}(w)| \leq \varepsilon \quad \text{in} \quad |w| \leq 1 + \delta$$

für ein p, so gilt für dieses p nach der CAUCHYschen Koeffizientenabschätzung

$$|v_m^{(\varrho,p)} - v_m^{(\varrho)}| \leq \frac{\varepsilon}{(1+\delta)^m} \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

und weiter

$$\|\mathrm{u}^{(\varrho,p)} - \mathrm{u}^{(\varrho)}\| = \sup_n \left| \sum_{m=0}^{n} (v_m^{(\varrho,p)} - v_m^{(\varrho)}) \right|$$

$$\leq \sup_n \sum_{m=0}^{n} |v_m^{(\varrho,p)} - v_m^{(\varrho)}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(1+\delta)^m} = \frac{(1+\delta)\,\varepsilon}{\delta}.$$

Daraus folgt (2).

Aus Kriterium 4.5 in Verbindung mit den Hilfssätzen 6.2 und 6.4 ergibt sich

Satz 6.5 (Lückenperfektheit von E_α). *Die* EULER-KNOPP*schen Verfahren* E_α $(0 < \alpha \leq 1)$ *sind lückenperfekt.*

Wollen wir also den Lückensatz für das E_α-Verfahren (Satz 1.4) beweisen, so können wir uns wegen Satz 4.4 mit beschränkten Folgen begnügen. In diesem Fall führen die Hilfsmittel, die man vom O-Umkehrsatz her kennt, verhältnismäßig leicht zum Ziel. Man verwende z. B., daß für beschränkte Folgen alle E_α-Verfahren miteinander (wegen nachher fügen wir hinzu: und mit dem BOREL-Verfahren) äquivalent sind (vgl. PITT [1938$_1$, S. 520] oder MEYER-KÖNIG [1949, Satz 25]), oder vgl. MEYER-KÖNIG [1939, Satz 8]. Bemerkt sei noch, daß (nach ERDÖS [1952]) die Bedingung (4) in Satz 1.4 bestmöglich ist.

Wir behandeln zuletzt noch das BOREL-Verfahren (B-Verfahren), das auf der Transformation

$$v_\mu = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} u_k \; (0 \leq \mu < \infty), \qquad t_\nu = \int_0^\nu v_\mu \, d\mu \quad (\nu \geq 0)$$

beruht. $\sum u_k$ heißt B-summierbar, wenn $\lim_{\nu\to\infty} t_\nu$ existiert. Das Wirkfeld $\mathfrak{B}$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen

$$\|\mathfrak{s}\|_0 = \sup_{0\le\nu<\infty} |t_\nu|, \qquad \|\mathfrak{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \frac{i^k}{k!} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wir unterscheiden zwischen regulärer und singulärer Summierbarkeit je nach Regularität bzw. Singularität des Funktionselementes $\sum u_k z^k$ bei $z = 0$.

Satz 6.6 (Lückenperfekter Teil des B-Verfahrens). *Eine regulär B-summierbare Reihe gehört zum lückenperfekten Teil des Reihenwirkfeldes.*

Dies ergibt sich aus den Betrachtungen bei ZELLER [1953_3]. Man kombiniere den Beweis des dortigen Satzes 3 mit Hilfssatz 6.4.

Wegen Satz 4.7 genügt es also wieder, den Beweis des Satzes 1.5 für beschränkte Folgen zu führen. Hierzu benützen wir etwa die Äquivalenz von B und E_α für beschränkte Folgen (s. oben).

Ähnlich wie die EULER-Verfahren können wir TAYLOR-Verfahren behandeln. Dabei müssen wir uns allerdings auf regulär summierbare Reihen (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1953]) beschränken. Lassen wir nämlich singuläre Summierbarkeit zu, so besitzt das TAYLOR-Verfahren keine nichttriviale Lückenumkehrbedingung.

Literatur

Mit F, R, Z wird auf die Referate in den Fortschritten der Mathematik, den Mathematical Reviews und dem Zentralblatt für Mathematik hingewiesen.

BOSANQUET, L. S. [1944]: Note on the converse of Abel's theorem. J. London Math. Soc. **19**, 161—168; R **7**, 152. — ERDÖS, P. [1952]: On a Tauberian theorem for Euler summability. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **4**, 51—56; R **14**, 265; Z **47**, 301. — HARDY, G. H. [1949]: Divergent Series. Oxford. 396 S. R **11**, 25; Z **32**, 58. — HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD [1926]: A further note on the converse of Abel's theorem. Proceedings L. M. S. (2) **25**, 219—236; F **52**, 220. — HARDY, G. H., and M. RIESZ [1915]: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge. 78 S. F **45**, 387. — INGHAM, A. E. [1937]: On the high-indices theorem of Hardy and Littlewood. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **8**, 1—7; F **63**, 173; Z **16**, 397. — KNOPP, K. [1926]: Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation. Acta Math. **47**, 313—335; F **52**, 290. — LEVINSON, N. [1938]: General gap Tauberian theorems. I. Proc. London math. Soc. (2) **44**, 289—306; F **64**, 179; Z **19**, 161. — [1940]: Gap and density theorems. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 26. New York. 246 S. F **66**, 332; R **2**, 180; Z **26**, 216. — LITTLEWOOD, J. E. [1910]: The converse of Abel's theorem on power series. Proc. London math. Soc. (2) **9**, 434—448; F **42**, 276. — LORENTZ, G. G. [1948]: Tauberian theorems and Tauberian conditions. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 226—234; R **9**, 425; Z **32**, 60. — MAZUR, S. [1930]: Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. I. Studia Math. **2**, 40—50; F **56**, 906. — MAZUR, S., and W. ORLICZ [1955]: On linear methods of summability. Studia Math. **14**, 129—160; R **16**, 814; Z **64**, 56. — MEYER-KÖNIG, W. [1939]: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II. Math. Z. **45**, 479—494; F **65**, 242; R **1**, 51; Z **24**, 29. — [1949]: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304; R **11**, 242; Z **41**, 184. — [1953]: Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt. Math. Z. **57**, 351—352; R **14**, 865; Z **50**, 68. — MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1953]: Über das Taylorsche

Summierungsverfahren. Math. Z. **60**, 348—352 (1954); R **16**, 28. — PITT, H. R. [1938_1]: General Tauberian theorems. Proc. London math. Soc. (2) **44**, 243—288; F **64**, 180; Z **19**, 109/466. — [1938_2]: Mercerian theorems. Proc. Cambridge philos. Soc. **34**, 510—520; F **64**, 182; Z **20**, 17. — WIENER, N. [1936]: A Tauberian gap theorem of Hardy and Littlewood. J. Chinese math. Soc. **1**, 15—22; F **62**, 1171; Z **15**, 209. — WILANSKY, A., and K. ZELLER [1955]: Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 501—509; R **16**, 690. — [1956]: Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Math. Z. **64**, 258—269. — WLODARSKI, L. [1955]: Sur les méthodes continues de limitation. I, II. Studia Math. **14**, 161—187, 188—199; R **16**, 814; Z **64**, 57. — ZELLER, K. [1951]: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487; R **12**, 604; Z **45**, 334. — [1953_1]: Sur la méthode de sommation d'Abel. C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 568—569; R **14**, 744. — [1953_2]: *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I, II. Math. Z. **58**, 288—305, 414—435; R **14**, 1092; R **15**, 134; Z **51**, 86. — [1953_3] Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431; R **15**, 618; Z **52**, 55. — [1956]: Über den perfekten Teil von Wirkfeldern. Math. Z. **64**, 123—130.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 4. Mai 1956)

PETERSEN, G. M.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 225—227 (1956)

Almost Convergence and two Matrix Limitation Methods

By

G. M. PETERSEN

In this note we want to consider two matrix limitation methods. The matrix $C=(c_{mn})$ is defined by the transformation $t_m=\frac{1}{2}(s_{2m}+s_{2m+1})$, $m=0, 1, 2, \ldots$, i.e. $c_{m,2m}=c_{m,2m+1}=\frac{1}{2}$ $c_{mn}=0$ everywhere else. The matrix $B=(b_{mn})$ is defined by the transformation $t_m=\frac{1}{2}(s_{2m+1}+s_{2m+2})$ $m=0, 1, 2, \ldots$, i.e. $b_{m,2m+1}=b_{m,2m+2}=\frac{1}{2}$, $b_{mn}=0$ elsewhere. The limitation methods C and B are consistent for bounded sequences as was shown by CASPER GOFFMAN and the author, [3]. We wish to show the relation of these methods to the method of Almost Convergence, LORENTZ, [2]. If $t_{n,p}=\frac{1}{p}(s_n+\cdots+s_{n+p})$, then $\{s_n\}$ is Almost Convergent if $\lim_{p\to\infty} t_{n,p}=s$ holds uniformly in n. A necessary and sufficient condition that a regular method includes Almost Convergence is that $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{mn}-a_{m,n+1}|=0$, such a method is said to be Strongly Regular.

It has been shown by LORENTZ [2] that for any sequence of methods $\{A_k\}$ $k=0, 1, 2, \ldots$ containing Almost Convergence, there is a bounded non-Almost convergent sequence that is limited by all the members of $\{A_k\}$. On the other hand, if every member of a set of methods $\{A_k\}$ $k=0, 1, 2, \ldots$ is contained by Almost Convergence (i.e. if the bounded sequences of each A_k are all almost convergent) then there is an Almost Convergent sequence not limited by any member of $\{A_k\}$.

We shall prove the following

Theorem 1. A necessary and sufficient condition that a sequence be Almost Convergent is that it be the sum of a bounded B-limitable and a bounded C-limitable sequence. That is the vector spaces of the B and C limitable sequences span the space of Almost Convergent sequences.

Proof. If a sequence $\{s_n\}$ is C limitable to 0, then $s_{2n}+s_{2n+1}=o(1)$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Any regular method $A=(a_{mk})$ that limits all bounded sequences that are C limitable to 0 has

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}s_k = a_{m0}s_0 - a_{m1}s_0 + a_{m2}s_2 - a_{m3}s_2 + \cdots + a_{m2k}s_{2k} -$$

$$- a_{m2k+1}s_{2k} + \cdots + \sum a_{mk}\sigma_k,$$

where $\{\sigma_k\}$ converges to 0. Since any method limiting all bounded C limitable sequences is consistent with C, BRUDNO [1], this implies

$$\lim_{m\to\infty} \sum (a_{m,2k} - a_{m,2k+1})\, s_{2k} = 0, \quad \text{where } \{s_{2k}\}$$

can be any bounded sequence. A necessary and sufficient condition for this has been given by SCHUR [5]; and for the above transformation

$$\lim_{m\to\infty} \sum |a_{m,2k} - a_{m,2k+1}| = 0.$$

A similar argument shows that for any matrix limiting all B limitable sequences,

$$\lim_{m\to\infty} \sum |a_{m,2k+1} - a_{m,2k+2}| = 0,$$

so that a necessary and sufficient condition that a matrix $A = (a_{m,n})$ limit all bounded B and C limitable sequences is

$$\lim_{m\to\infty} \sum |a_{m,n} - a_{m,n+1}| = 0.$$

Hence a matrix limits all B and C limitable sequences if and only if it is strongly regular. However, it has been shown by the author [4] that a necessary and sufficient condition for a sequence to be Almost Convergent is that it be limited by all strongly regular methods. This completes our proof.

The methods B and C are not consistent for certain unbounded sequences that are $O(n)$. However, if the rows of B and C are intertwined with the rows of the CESARO matrix, for example, this difficulty may be removed. In [3] CASPER GOFFMAN and the author found a set of consistent limitation methods, such that any bounded sequence was limited by at least one member of the set and to the values $\frac{1}{2}(U+L)$ where $U = \limsup s_n$ and $L = \liminf s_n$. These matrices are all consistent with B and C. It is clear that the member of this set that limits $1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ to $\frac{1}{2}$ and B and C form a triplet of methods such that no method can contain all three, any method containing B and C is strongly regular and so would be inconsistent with the other, hence, by a theorem of BRUDNO [1], no method could contain the triplet. No pair of consistent methods which can not be contained by a third method seems to be known.

§ 2

In this section we wish to treat C from a different point of view, and shall consider both the bounded and unbounded C limitable sequences. By an infinite rowed matrix we shall mean a matrix which has an infinite number of rows, each of which has an infinite number of non-zero elements.
We shall now prove

Theorem 2. No infinite rowed matrix can be equivalent to or stronger than C.

Proof. In the first place we can suppose that each row has an infinite number of non zero elements as by removing those rows without this property

we would only define a new matrix that was stronger than the previous one. Again s_n is C limitable to zero if $s_{2m} = -s_{2m+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. First we shall suppose that all the rows in the matrix have an infinite number of non-zero elements of the form $a_{m,2k}$, i.e. with an even index. In fact, let $k = m_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ define the set where $a_{m,2k}$ is non zero, and such that

$$1_1 < 1_2 < 2_1 < \cdots < 1_r < 2_{r-1} < \cdots < r_1 < \cdots .$$

Since the choice of s_{2k} is quite arbitrary, we can always choose our sequence so that

$$\sum_{k=0}^{2m_\nu} a_{mk} s_k = m + \nu$$

for all m and ν, by choosing $s_{2\cdot 1_1}, s_{2\cdot 1_2}, s_{2\cdot 2_1}, \ldots, s_{2\cdot 1_r}, \ldots, s_{2\cdot r_1}, \ldots$ in succession and $s_{2k} = 0$ when k is not of the set $\{m_\nu\}$. If some rows do not have an infinite number of non-zero even elements, they can be removed. If there are only a finite number of rows with even non-zero elements, a construction similar to the above is possible, though the choice of s_{2n} now depends on that of s_{2n+1}.

This last theorem has an application to the iteration of matrices. If $t_m = \frac{1}{2}(s_{2m} + s_{2m+1})$, and $A = (a_{mn})$ is regular, then it is always true that $\tau_m = \sum a_{mn} t_n$ is stronger than C. However, $\tau'_m = \frac{1}{2} a_{m0} s_0 + \frac{1}{2} a_{m1} s_1 + \cdots + \frac{1}{2} a_{mk} s_{2k} + \frac{1}{2} a_{mk} s_{2k+1} + \cdots$ may not be so.

References

[1] Brudno, A.: Summation of Bounded Sequences by Matrices (in Russian). Recueil Math. (Mat. Sbornik), N. S. **16**, 191—247 (1945). — [2] Lorentz, G. G.: A Contribution to the Theory of Divergent Sequences. Acta Math. **80**, 167—190 (1948). — [3] Goffman, Casper, and G. M. Petersen: Consistent Limitation Methods. Proc. Amer. Math. Soc. **1956**, 367—369. — [4] Petersen, G. M.: Almost Convergence and Well Distributed Sequences. Quart. J. Math. (Oxford) (to appear). — [5] Schur, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine u. angew. Math. **151**, 79—111 (1921). — [6] Zeller, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951).

University College of Swansea, Singleton Park, Swansea (Großbritannien)

(Eingegangen am 19. Mai 1956)

DJERASIMOVIĆ, B.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 228—239 (1956)

Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen

Von
BOŽIDAR DJERASIMOVIĆ

I. Das Ziel

1. Das Studium der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen, besonders der Eigenschaften binärer quadratischer Formen, wird erleichtert durch Einführung einer neuen Operation mit geordneten Komplexen von natürlichen Zahlen.

Das Ziel dieser Abhandlung ist, diese neue Operation in Weiterführung der Arbeit DJERASIMOVIĆ [*1*] zu definieren, ihre Eigenschaften zu untersuchen und mittels derselben gewisse neue Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen zu zeigen. Die Definition der neuen Operation verlangt die Erweiterung von gewissen bekannten Begriffen und das wird zuerst gezeigt.

II. Geordnete Komplexe ganzer Zahlen

2. In dieser Abhandlung werden wir auch mit geordneten Komplexen ganzer Zahlen operieren, deren Glieder irgendwelche ganze Zahlen sind, z.B.: $2, 3, -1, 1, -5, 0$ oder $-1, -2, 0, 5, -3$. Zum Unterschied von diesen Komplexen werden wir unter der Bezeichnung *Geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen* diejenigen geordneten Komplexe verstehen, deren *erstes* und *letztes* Glied *ganze*, doch die übrigen *natürliche* Zahlen sind, z.B.: $-2, 3, 5, 2, 1, 1$ oder $0, 5, 3, 1, -3$.

Als Folge der Einführung geordneter Komplexe ganzer Zahlen finden folgende Erweiterungen statt:

a) *Die Erweiterung des Operationsbegriffs „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt"* (DJ. [*1*], § 3). Die Definition dieser Operation kann man jetzt, unabhängig von der Größe des ersten oder letzten Gliedes, durch die folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$(1) \qquad {}^*A = 1, a_1 - 1, {}'A; \qquad A^* = A', a_m - 1, 1,$$

wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$ ein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, z.B.:

$${}^*1 = 1, 0 \qquad 0^* = -1, 1; \qquad {}^*\{-5\} = 1, -6.$$

Die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der früher gegebenen wird etwas später gezeigt.

b) *Die Erweiterung des* EULERschen *Funktionsbegriffs* [*A*]. Den Ausdruck [*A*] wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$ ein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, definieren

wir mit Hilfe der Rekursionsformel

$$[A] = a_1['A] + [''A] \quad \text{mit} \quad [V] = 1, ['V] = 0.$$

Wenn A ein geordneter Komplex ist, dessen sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind, dann stimmt diese Definition mit der bekannten Definition

$$(A) = \frac{[A]}{['A]}$$

überein.

Aus der neuen Definition ergeben sich alle die bekannten Eigenschaften der Funktion $[A]$ ausgedrückt durch die Formeln (2), (4), (6), (8), (9), (10), (14) und (15) in der schon erwähnten Abhandlung (Dj. [1]). Wir halten es nicht für nötig, das hier zu beweisen.

3. Die Operation mit geordneten Komplexen ganzer Zahlen erfordert die Einführung der Begriffe *gleicher* und *äquivalenter* Komplexe.

Definition 1. *a) Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind einander gleich,*

$$A = B,$$

wenn die Glieder des einen Komplexes der Reihe nach gleich den entsprechenden Gliedern des zweiten Komplexes sind.

b) Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind zueinander äquivalent,

$$A \sim B,$$

wenn sie die Gleichungen

$$(2) \qquad [A] = \varepsilon[B], \quad [A'] = \varepsilon[B'], \quad ['A] = \varepsilon['B], \quad ['A'] = \varepsilon['B']$$

befriedigen, wo $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ in allen vier Gleichungen der gleiche Wert ist.

Zum Beispiel: $3, -3, 1, 5 \sim 2, 1, 1, 6$ mit $\varepsilon = -1$.

Aus dieser Definition, auf Grund der Gleichung

$$[K]['K'] - ['K][K'] = (-1)^k,$$

wo K irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen mit k Gliedern ist, folgt: *Die Summe der Gliederzahlen zweier äquivalenter Komplexe ist eine gerade Zahl.*

Für die zueinander äquivalenten geordneten Komplexe ganzer Zahlen gelten die folgenden zwei Sätze:

Satz 1. *Zwei äquivalente geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind auch gleich.*

Beweis. Wenn A und B geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind, dann sind alle Glieder der Komplexe A', B', $\underline{A}'$ und $\underline{B}'$, außer vielleicht der ersten, natürliche Zahlen, und aus $A \sim B$ folgen, auf Grund der Bedingung (2), die Gleichungen

$$(A') = (B'), \quad (\underline{A}') = (\underline{B}'),$$

was mit

$$A' = B', \qquad 'A = 'B$$

gleichbedeutend ist, weil die Gliederzahlen der Komplexe A' und B' beide gerade oder ungerade sind. Aus den letzten zwei Gleichungen folgt auch die Gleichung $A = B$.

Satz 2. *Aus der Äquivalenz zweier geordneter Komplexe ganzer Zahlen*

$$A \sim B$$

folgen auch die Äquivalenzen

$$\underline{A} \sim \underline{B}, \quad A^* \sim B^*, \quad {}^*A \sim {}^*B, \quad KAL \sim KBL, \tag{3}$$

wo K und L geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind.

Beweis. Die erste der Äquivalenzen (3) folgt unmittelbar aus der Bedingung (2), während die zweite und dritte mit Hilfe der Gleichungen

$$[P^*] = [P], \qquad [{}^*P] = [P],$$

$$[P^{*\prime}] = [P] - [P'], \qquad [{}'^*P] = [P] - [{}'P] \tag{4}$$

bewiesen werden. Zum Beweis der letzten der Äquivalenzen (3) genügt es die Äquivalenz $KA \sim KB$ zu beweisen, welche die Folge der Bedingung (2) auf Grund der bekannten Rekursionsformel

$$[KA] = [K][A] + [K'][{}'A] \tag{5}$$

ist (DJ. [1], Formel (8)).

4. Zum Übergang von einem geordneten Komplex ganzer Zahlen auf irgendeinen ihm äquivalenten, genügen *die Äquivalenzen:*

$$A, 0, B \sim A', a_m + b_1, {}'B, \tag{6}$$

$$A, \alpha, B \sim A^*, -\alpha - 2, {}^*B, \tag{7}$$

wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$, $B = b_1 b_2 \dots b_n$ geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind, während α eine ganze Zahl ist.

Durch die direkte Anwendung der Rekursionsformel (5) und der Formel (4) werden die Gleichungen

$$[P, 0, Q] = [P', p + q, {}'Q],$$

$$[P, \alpha, Q] = -[P^*, -\alpha - 2, {}^*Q]$$

erhalten, wo p das letzte Glied des Komplexes P, während q das erste Glied des Komplexes Q ist. Diese Gleichungen sind befriedigt, wenn $P = A$, $Q = B$ oder $P = {}'A$, $Q = B$ oder $P = A$, $Q = B'$ oder $P = {}'A$, $Q = B'$ ist, falls $m \geq 1$, $n \geq 1$ ist, woraus nach den Bedingungen (2) die Äquivalenzen (6) und (7) folgen.

Nach Satz 1 kann in einer Menge zueinander äquivalenter geordneter Komplexe von ganzen Zahlen höchstens ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen bestehen. Wir werden beweisen, daß er auch fehlen kann.

Zusatz zu Satz 1. *Der geordnete Komplex von natürlichen Zahlen A, der einem gegebenen geordneten Komplexe von ganzen Zahlen B äquivalent ist,*

besteht dann und nur dann, wenn entweder die Bedingung

$$a)\quad [{}'B'] \neq 0,$$

oder

$$b)\quad [{}'B'] = 0 \quad \textit{mit} \quad [{}'B] = [B'] = \pm 1$$

befriedigt ist. Im Fall b) ist der Komplex A eingliedrig.

Beweis. Wenn A ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen ist und $['A'] = 0$, so folgt $'A' = V'$, was bedeutet, daß der Komplex A eingliedrig ist. Aber dann ist auch $['A] = [A'] = 1$. Umgekehrt, ist $['A'] = \varepsilon['B'] \neq 0$, dann sind die Komplexe A', und $\underline{A}'$ nach den Bedingungen (2), durch die Brüche

$$(A') = \frac{[B']}{['B']}, \qquad (\underline{A}') = \frac{['B]}{['B']}$$

eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel: Es besteht kein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen, der dem Komplex $a, 1, -1, b$ äquivalent ist.

5. Aus der Äquivalenz (6) folgt die neue Interpretation des leeren Komplexes

$$V = 0, 0 \tag{8}$$

weil nach (6)

$$A, 0, 0, B \sim AB$$

ist. Die Gleichheit (8) ist auch im Einklang mit den Werten

$$[V] = 1, \ ['V] = [V'] = 0, \ [''V] = ['V'] = [V''] = [V] = 1$$

(PERRON [2], § 9, Formel (6) und (7)).

So kann jetzt die Operation „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt" auf den leeren Komplex V angewandt werden:

$$*V = 1, -1, 0, \qquad V* = 0, -1, 1. \tag{8'}$$

Die Äquivalenz (6) ermöglicht, die Identität der früher gegebenen Definition der Operation „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt" mit der in dieser Abhandlung gegebenen Definition zu erweisen. Nach der alten Definition ist $\{a, 1\}* = a + 1$, während nach der neuen $\{a, 1\}* = a, 0, 1$ ist, woraus die Identität der beiden Definitionen offensichtlich, weil $a + 1 \sim a, 0, 1$ ist.

III. Die Operation „|"

6. Definition 2. *Der Ausdruck $A|B$, wo*

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \ B = b_1 b_2 \dots b_n \qquad (m \geq 0 \text{ endlich}, \ n \geq 0)$$

geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind, ist ebenfalls ein geordneter Komplex ganzer Zahlen, und zwar:

$$A|B = A, -1, *B.$$

Die so definierte Operation werden wir Operation „|" nennen und ihre verschiedenartigen und nützlichen Eigenschaften im folgenden zeigen.

7. Vor allem befriedigt der Komplex $A|B$ die Gleichung

$$[A|B] = [A'][B] - [A]['B]. \tag{9}$$

Den Ausdruck $[A|B]$ können wir nämlich in der Form

$$[A|B] = [A, -1, {}^*B] = [A, -1][{}^*B] + [A]['{}^*B]$$

schreiben, aus welcher, auf Grund der zweiten Gl. (4), die Gl. (9) folgt.

8. Die Operation „|" gestattet eine „Kürzung" von *gleichen* Gliedern, wenn dieselben getrennt durch das „|" unmittelbar neben ihm stehen. Das besagen die Formeln:

$$AK|\underline{K}B \sim A|B, \tag{10}$$

$$[AK|\underline{K}B] = (-1)^k [A|B], \tag{11}$$

wobei K irgendwelcher geordneter Komplex ganzer Zahlen und k seine Gliederzahl ist.

Beweis. Nach der Definition 2 und den Äquivalenzen (6) und (7) ist

$$Aa|aB = A, a, -1, 1, a-1, B \sim A, a, 0, -a-1, {}^*B \sim A, -1, {}^*B = A|B,$$

woraus die Äquivalenz (10) folgt. Mit der Anwendung der Formel (9) erhält man

$$\begin{aligned}[Aa|aB] &= [A][aB] - [Aa][B] = \\ &= [A]\{a[B] + ['B]\} - \{a[A] + [A']\}[B] = -[A|B],\end{aligned}$$

woraus die Gl. (11) folgt.

9. Für die Operation „|" gilt:

Zusatz zu Satz 2. *Aus der Äquivalenz zweier geordneter Komplexe ganzer Zahlen*

$$A \sim B$$

folgen die Äquivalenzen

$$A|K \sim B|K, \quad K|A \sim K|B, \tag{12}$$

wobei K irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist.

Der Beweis folgt aus dem Satz 2, weil die Äquivalenzen (12) in der Form

$$A, -1, {}^*K \sim B, -1, {}^*K; \quad K, -1, {}^*A \sim K, -1, {}^*B$$

geschrieben werden können.

10. Für die Operation „|" gilt nicht das Kommutativ-, wohl aber das Assoziativgesetz:

$$\{A|B\}|C = A|\{B|C\}. \tag{13}$$

In der Tat, nach der Definition 2 erhalten beide Seiten dieser Gleichung die gleiche Form:

$$A|B|C = A, -1, {}^*B, -1, {}^*C.$$

So ist z.B.:

$$A|V|B \sim AB, \tag{14}$$

weil nach (8), (6) und (7):

$$A|V|B \sim A|0,0|B = A, -1, 1, -1, 0, -1, {}^*B \sim$$
$$\sim A, -1, 1, -2, {}^*B \sim A, 0, 0, B \sim AB$$

ist.

11. Seien A, B und C geordnete Komplexe ganzer Zahlen, der Äquivalenz

$$A|B \sim C \tag{15}$$

genügend. *Wir werden zeigen, daß aus einer solchen Äquivalenz jeder in ihr figurierende Komplex als Funktion der beiden übrigen bestimmt werden kann.*

Tatsächlich, nach dem Zusatz zu Satz 2 folgt aus der Äquivalenz (15) die Äquivalenz

$$\underline{A}|A|B \sim \underline{A}|C,$$

welche, nach (10), sich zurückführt auf die Form

$$V|V|B \sim \underline{A}|C$$

und schließlich, nach (14), auf die Form

$$B \sim \underline{A}|C \tag{15'}$$

zurückgeführt werden kann. In derselben Weise folgt aus (15) auch die Äquivalenz

$$A \sim C|\underline{B} \tag{15''}$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

12. Früher haben wir den Sinn des Ausdrucks A^ν definiert, wo ν eine natürliche Zahl oder Null ist (Dj. [*1*], § 2) und jetzt ist uns die Möglichkeit gegeben, denselben Ausdruck auch für negative Werte der ganzen Zahl ν zu definieren.

Definition 3. *Der Ausdruck A^{-1}, wo A irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, ist ebenfalls ein geordneter Komplex ganzer Zahlen, so daß*

$$AA^{-1} \sim V \tag{16}$$

ist.

Bei dieser Gelegenheit haben wir den leeren Komplex V als ein Einheitselement in der Menge geordneter Komplexe ganzer Zahlen betrachtet, wofür wir genug Grund haben. Um die Existenz des Komplexes A^{-1} zu beweisen und einen expliziten Ausdruck für ihn zu erhalten, benützen wir den Zusatz zu Satz 2. Aus der Äquivalenz (16) folgt die Äquivalenz

$$V|\underline{A}|AA^{-1} \sim V|\underline{A}|V$$

deren linke Seite nach (10) und (14) die Form

$$V|V|A^{-1} \sim A^{-1}$$

erhält, so daß schließlich

(17) $$A^{-1} = V|\underline{A}|V$$

ist. Demnach

(18) $$A^{-\nu} = V|\underline{A}^{\nu}|V$$

wo ν eine natürliche Zahl ist. Wir bemerken, daß auch

$$A^{-1}A \sim V|\underline{A}|A \sim V|V|V \sim V$$

ist.

Zum Beispiel:

$$\{a\}^{-1} = V|a|V = -1, 1, a-1, -1, 1, -1, 0 \sim 0, -a, 0,$$
$$A^{-1} \sim -1, {}^{*}\underline{A}^{*}, -1.$$

13. Für die Operation „|", ausgeführt mit zwei geordneten Komplexen von natürlichen Zahlen gilt

Satz 3. *Sind*

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_m, \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \end{aligned}\right\} \quad \textit{unter der Bedingung} \quad \begin{cases} a_m \neq b_1, \\ A|B \neq a|b \quad \textit{mit} \quad a \gtreqless b, \end{cases}$$

irgendzwei geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen, so besteht immer ein und nur ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen C, welcher zum Komplex A|B äquivalent ist,

$$C \sim A|B,$$

und zwar

	$A\|B$	*wobei*	C
(19)	$a_1\|B$	$a_1 \neq b_1, \quad n \geq 2$	$a_1 - b_1 - 1, \ {}^{*\prime}B$
(20)	$A\|b_1$	$a_m \neq b_1, \quad m \geq 2$	$A'^{*}, b_1 - a_m - 1$
(21)	$A\|B$	$a_m > b_1$, $m \geq 2, \quad n \geq 2$	$A', a_m - b_1 - 1, \ {}^{*\prime}B$
(22)	$A\|B$	$a_m < b_1$, $m \geq 2, \quad n \geq 2$	$A'^{*}, b_1 - a_m - 1, \ {}'B$

Dabei ist

(23) $$[A|B] = \varepsilon[C], \quad ['A|B] = \varepsilon['C], \quad [A|B'] = \varepsilon[C'], \quad ['A|B'] = \varepsilon['C']$$

und

$$\varepsilon = -1 \quad \textit{bei} \quad m = 1, \ n \geq 2;$$
$$\varepsilon = +1 \quad \textit{bei} \quad m \geq 2, \ n = 1;$$
$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_1 - a_m) \quad \textit{bei} \quad m \geq 2, \ n \geq 2.$$

Beweis. Aus der Definition 2 folgt durch Anwendung der Äquivalenzen (6) und (7)

$$A|B = A, -1, {}^*B \sim A'^*, -a_m - 2, 1, -2, {}^*B \sim$$
$$\sim A'^*, -a_m - 1, 0, B \sim A'^*, b_1 - a_m - 1, {}'B$$

und das ist die Form (22) des Komplexes C. Für $B = b_1$ folgt daraus auch die Form (20). Ferner ist, nach (7):

$$A'^*, b_1 - a_m - 1, {}'B \sim A', a_m - b_1 - 1, {}^*{}'B,$$

woraus die Formen (21) und (19) des Komplexes C folgen. Nach Zusatz zu Satz 1 kann die Existenz des Komplexes C ausbleiben, nur wenn

$$[{}'A|B'] = 0, \quad \text{d.h.} \quad (B') = (\underline{A'})$$

ist, woraus

$$B' = \underline{A'} \quad \text{oder} \quad B' = \underline{A'}^*$$

folgt. Aber im zweiten dieser beiden Fälle ist auch $[{}'A|B] = [A|B'] = \pm 1$ und auf Grund der Bedingung $a_m \neq b_1$, besteht der geordnete Komplex von natürlichen Zahlen C dann und nur dann nicht, wenn

$$A|B = a|b \quad \text{mit} \quad a \gtreqless b.$$

Daß C der einzige dem Komplex $A|B$ äquivalente geordnete Komplex von natürlichen Zahlen ist, folgt unmittelbar aus Satz 1.

Die Formeln (23) folgen auf Grund von (2) und (8), wenn man bedenkt, daß

$$A|B = A, -1, {}^*B \sim A^*, -1, B \sim C$$

ist. Den Wert von ε erhält man durch Vergleich mit der Formel (9).

Bemerkung 1. Zu den Komplexen $A|V$ (für $m \geq 1$) und $V|B$ (für $n \geq 1$) bestimmen wir den äquivalenten Komplex C mit Hilfe der Formeln (19) bis (22), $V = 0, 0$ setzend.

Bemerkung 2. Die Formeln (19) bis (22) sind für die Bestimmung des Komplexes C nicht unbedingt nötig, da man in jedem einzelnen Fall durch die Anwendung der Äquivalenzen (6) und (7) von $A|B$ zu C übergehen kann

IV. Anwendung auf die periodischen regelmäßigen Kettenbrüche

14. Wir betrachten die Kettenbruchentwicklung von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen

$$\xi = (B\bar{A}), \quad \eta = (C\underline{\bar{A}}), \tag{24}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_m \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \\ C &= c_1 c_2 \dots c_p \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} &b_1 \text{ und } c_1 \text{ ganze Zahlen, alle übrige } b_\nu, \\ &c_\nu \text{ und alle } a_\nu \text{ natürliche Zahlen} \end{aligned}\right.$$

sind. Der Komplex A braucht dabei nicht die primitive Periode, und die Komplexe B und C ebenso nicht kürzestmögliche Vorperioden darzustellen, d.h. die letzteren müssen nicht die Bedingungen $b_n \neq a_m$ und $c_\rho \neq a_1$ befriedigen. Im allgemeinen ist es gar nicht möglich, daß beide diese Bedingungen gleichzeitig befriedigen, falls ξ und η die Formen (24) haben.

Zwischen den so definierten Komplexen A, B und C besteht ein bestimmter Zusammenhang, worüber der folgende Satz Aufschluß gibt:

Satz 4. *Die Vorperioden B und C der Kettenbruchentwicklung von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen*

$$\xi = (B\bar{A}) \quad \textit{und} \quad \eta = (C\underline{\bar{A}})$$

und die Periode A des ersteren befriedigen die Äquivalenz

$$A \sim \underline{C}\,|\,B, \tag{25}$$

aus welcher auch die Äquivalenzen

$$B \sim C\,|\,A, \tag{25'}$$

$$C \sim B\,|\,\underline{A} \tag{25''}$$

folgen.

Beweis. Wenn im Ausdruck

$$(C\underline{\bar{A}}) = \frac{[C]\,(\bar{A}) + [C']}{['C]\,(\bar{A}) + ['C']}$$

die quadratische Irrationalzahl $(\underline{\bar{A}})$ durch die zu ihr konjugierte Zahl $-(0\bar{A})$ ersetzt wird, dann wird $(C\underline{A})$ in

$$(B\bar{A}) = \frac{[B]\,(\bar{A}) + [B']}{['B]\,(\bar{A}) + ['B']}$$

transformiert und es folgt die Gleichung

$$\frac{[B]\,(\bar{A}) + [B']}{['B]\,(\bar{A}) + ['B']} = \frac{[C] - [C']\,(\bar{A})}{['C] - ['C']\,(\bar{A})},$$

d.h.

$$['\underline{C}\,|\,B]\,(\bar{A})^2 - \{[\underline{C}\,|\,B] - ['\underline{C}\,|\,B']\}\,(\bar{A}) - [\underline{C}\,|\,B'] = 0.$$

Nach Satz 3 besteht ein und nur ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen L, welcher äquivalent dem Komplex $\underline{C}\,|\,B$, ist;

$$L \sim \underline{C}\,|\,B.$$

So erhält nach (23) die vorherige Gleichung die Form

$$['L]\,(\bar{A})^2 - \{[L] - ['L']\}\,(\bar{A}) - [L'] = 0$$

was

$$(\bar{A}) = (\bar{L})$$

bedeutet, und wir können

$$A = L$$

setzen, wobei A nicht die primitive Periode darzustellen braucht. Dadurch ist die Äquivalenz (25) bewiesen. Die übrigen zwei folgen aus ihr nach Zusatz zu Satz 2.

Wenn A die primitive Periode und $b_m \neq a_m$ ist, dann stellt der aus der Äquivalenz (25″) gewonnene Komplex C die kürzeste Vorperiode dar, falls ξ und η die Formen (24) haben. Es kann vorkommen, daß der so entstandene Komplex C kein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen, oder aber daß $c_p \leq 0$ ist. In diesem Falle soll A^2 oder A^3 statt A verwendet werden. Zum Beispiel: Ist $\xi = (1, \overline{3})$, so ist

$$B|\underline{A} = 1|3 \sim -3, 1, -1, 0,$$
$$B|\underline{A^2} = 1|3, 3 \sim -3, 1, 2$$

und $C = -3, 1, 2$.

Dieselbe Bemerkung ist auch für die Äquivalenz (25′) gültig.

Betrachten wir auch die Äquivalenz (25). Es seien die geordneten Komplexe von natürlichen Zahlen $B = b_1 b_2 \dots b_n$, $C = c_1 c_2 \dots c_p$ ($b_n > 0$ für $n \geq 2$, $c_p > 0$ für $p \geq 2$) willkürlich gegeben. Es ist in diesem Falle ersichtlich, *daß die regelmäßigen Kettenbrüche* $\xi = (B\overline{A})$, $\eta = (C\underline{\overline{A}})$ *dann und nur dann bestehen, wenn ein geordneter Komplex* A, *dessen sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind, und welcher dem Komplex* $\underline{C}|B$ *äquivalent ist, besteht.* Es sei

$$b_1 = c_1,\ b_2 = c_2, \dots, b_k = c_k; \quad b_{k+1} > c_{k+1}, \quad (k \geq 0).$$

Auf Grund des obigen Satzes 3 und des Satzes 3 in Dj. [1], folgt im gegenwärtigen Falle, daß die gegebenen Komplexe B und C die folgenden Bedingungen befriedigen müssen:

a) $n \geq 0,\ p \geq 2$ für $k = 0$,
$n \geq k+1,\ p \geq k+2$ für $k \geq 1$;

b) $c_1 = -1$ für $n = 0$,
$b_{k+1} - c_{k+1} \geq 2$ für $n = k+1$;

c) $c_{k+2} \geq 2$ für $p = k+2$.

Beispiel. Sei $B = -2, 3$, $C = -3, 5, 6$. Dann folgt aus der Äquivalenz (25)

$$A \sim 6, 5, -3|-2, 3$$

und nach (22)

$$A = 6, 4, 4.$$

Demnach ist

$$\xi = (-2, 3, \overline{6, 4, 4}), \quad \eta = (-3, 5, 6, \overline{4, 4, 6}).$$

15. Die Äquivalenz (25″) gibt die Möglichkeit, mit Hilfe der gegebenen Kettenbruchentwicklung $\xi = (B\overline{A})$ einer quadratischen Irrationalzahl die Kettenbruchentwicklung $\eta = (C\underline{\overline{A}})$ der ihr konjugierten Zahl zu bestimmen. Demnach ersetzt diese Äquivalenz vollkommen den Satz 1 in unserer früheren Abhandlung (Dj. [1]). Dabei fällt die Bedingung $\xi > 1$ weg.

Die Äquivalenz (25″) ermöglicht auch die Ausführung des direkten Beweises von Satz 2 in der erwähnten früheren Abhandlung.

Sei $\xi = (B\bar{A})$ neben $b_n \neq a_m$ gegeben. Nach (25) können die Vorperioden B und C zweier zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen nicht gegenseitig gleich sein. Folglich ist

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = \operatorname{sgn}\{(B) - (C)\} = \operatorname{sgn}[\underline{C} \mid B],$$

d.h., nach (25) und (23),

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = \varepsilon \operatorname{sgn}[A \mid \underline{B} \mid B],$$

wobei $\varepsilon = -1$ für $n = 0$, $\varepsilon = +1$ für $n = 1$ und $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_n - a_m)$ für $n \geq 2$ ist. Ferner ist nach (11)

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = (-1)^n \varepsilon \operatorname{sgn}[A \mid V \mid V] = -(-1)^n \varepsilon,$$

woraus unmittelbar der erwähnte Satz 2 folgt. Auch hier, wie im Satz 3 der erwähnten Abhandlung, fällt die Bedingung $\xi > 1$ weg.

16. Seien ξ und η auch weiterhin zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen, durch die Ausdrücke (24) gegeben. Dann sind sie Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0, \tag{26}$$

wobei

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = ['BA'][B] - ['BA]['B'], \\ -\beta = [BA'][B] - [BA]['B'] + ['BA'][B] - ['BA][B'], \\ \gamma = [BA'][B] - [BA][B'] \end{array}\right. \tag{27}$$

ist (PERRON [2], § 19, Formeln (6)). Auf Grund der Gl. (9) erhalten diese Koeffizienten die Form

$$\alpha = ['BA \mid \underline{B'}], \quad -\beta = [BA \mid \underline{B'}] + ['BA \mid \underline{B}], \quad \gamma = [BA \mid \underline{B}]. \tag{28}$$

Da nach der Äquivalenz (25″)

$$A \mid \underline{B} \sim \underline{C} \quad \text{so ist} \quad BA \mid \underline{B} \sim B\underline{C},$$

und die Koeffizienten α, β und γ können nach (23) in der Form

$$\alpha = \varepsilon['B\underline{C'}], \quad -\beta = \varepsilon\{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}, \quad \gamma = \varepsilon[B\underline{C}] \tag{29}$$

geschrieben werden, wobei $\varepsilon = -1$ für $n = 0$, $\varepsilon = +1$ für $n = 1$ und $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_n - a_m)$ für $n \geq 2$ ist.

So erhält die quadratische Gl. (26) schließlich die Form

$$['B\underline{C'}]\xi^2 - \{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}\xi + [B\underline{C}] = 0. \tag{30}$$

Wir bemerken, daß die Gleichung

$$['BA^{\nu-1}\underline{C'}]\xi^2 - \{[BA^{\nu-1}\underline{C'}] + ['BA^{\nu-1}\underline{C}]\}\xi + [BA^{\nu-1}\underline{C}] = 0, \tag{31}$$

wo ν irgendwelche ganze Zahl verschieden von Null ist, äquivalent der Gl. (30) ist. Um die Gl. (31) zu erhalten, genügt es in der Formel (28) B durch $BA^{\nu-1}$ und A durch A^{ν} zu ersetzen. Aus der Gl. (31) erhält man die Gl. (30) für $\nu = 1$ oder $\nu = -1$.

Beispiel. Sei die Zahl $\xi = (1, 2, \overline{2, 3, 1, 1})$ gegeben. Nach (25″) und (21) ist

$$C \sim 1, 2 \,|\, 1, 1, 3, 2 \sim 5, 2 \quad \text{d.h.} \quad C = 5, 2.$$

Wir bilden den Komplex

$$B\underline{C} = 1, 2, 2, 5,$$

so daß nach (30) die gegebene Zahl ξ Wurzel der Gleichung

$$5\xi^2 - 34\xi + 38 = 0$$

ist, also

$$\xi = \frac{17 - \sqrt{99}}{5}, \qquad \eta = \frac{17 + \sqrt{99}}{5},$$

weil $\xi < \eta = (5, 2, \overline{1, 1, 3, 2})$.

Literatur

[1] Djerasimović, B.: Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Math. Z. **62**, 320—329 (1955). — [2] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954.

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien)

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

Scott, W. R.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 240 (1956)

On a result of B. H. Neumann

Von
W. R. Scott

B. H. Neumann [*1*, 13.1, 13.2 and (1.1)] has recently proved the following

Theorem. *If G is a group such that for every subgroup H the conjugate class of H is finite, then for all H, H is of finite index in some normal subgroup of G.*

As his proof is somewhat lengthy, it seems desirable to have a direct proof. A short proof is given below.

Let $N(H)$ denote the normalizer of H, $C(x)$ the centralizer of x, and $[G:H]$ the index of H in G.

Proof of theorem. Let H be a subgroup of G, and $H_1, \ldots, H_n$ its conjugates. There is an $x_i \in G$ such that $H_i = x_i^{-1} H x_i$. It follows easily from the assumption on G that the conjugate class of x_i is finite. Hence $[H:H \cap C(x_i)]$ is finite, and since $H \cap C(x_i) \subset H_i$, $[H:H \cap H_i]$ is finite. If $N = \cap H_i$, then $[H:N]$ is finite, and N is normal in G. Thus H/N is a finite subgroup of G/N and has only a finite number of conjugates. Therefore its normal closure K/N is finite. Hence K is a normal subgroup of G containing H as a subgroup of finite index.

Bibliography

[*1*] Neumann, B. H.: Groups with finite classes of conjugate subgroups. Math. Z. **63**, 76—96 (1955).

University of Kansas, and Institute for Advanced Study

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

PETERSSON, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 241—268 (1956)

Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul

Von
HANS PETERSSON

Einleitung

Im folgenden handelt es sich um eine Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Problemkreis der additiven Zahlentheorie vom Partitionentypus. Dem vorliegenden Text gehen zwei Arbeiten voran, in denen bereits Probleme dieser Art mit den Methoden der Modulfunktionen angegriffen wurden ([1], [2] des Literaturverzeichnisses am Schluß der Einleitung, im folgenden zitiert mit (PI) bzw. (PII)). Die Resultate von (PI) betreffen die Grundlagen des Verfahrens und dessen Anwendung auf ein sehr allgemeines Partitionenproblem, von dem mehrere Sonderfälle einer ersten Diskussion unterzogen werden. Einer dieser Fälle, ein nur drei Parameter enthaltendes Problem, wird mit dem gleichen Verfahren in (PII) sehr viel eingehender behandelt. Durch eine wesentliche Ausgestaltung der Methoden gelangt man einerseits zu erheblich schärferen Ergebnissen als in (PI), andrerseits zu neuen einfachen und größtenteils unerwarteten Zusammenhängen arithmetischer und arithmetisch-analytischer Natur. Dieser Prozeß der Intensivierung wird hier fortgesetzt.

Gegenstand von (PII) sind im einfachsten Falle Partitionen, deren Summanden entweder sämtlich quadratische Reste oder sämtlich quadratische Nichtreste nach einem gegebenen Primzahlmodul q sind, wo $q \equiv 1 \bmod 4$, $q > 5$. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich — ich zitiere wieder den einfachsten Fall — um Partitionen, deren Summanden einer festen der l Klassen nach der Gruppe der l-ten Potenzreste $\bmod q$ angehören; dabei sind l und q gemäß $l \geqq 2$, $q \equiv 1 \bmod 2l$, $q > 2l+1$ fest gegeben.

§ 1 gibt die genaue Definition der zu untersuchenden Partitionenanzahlen, die Bildung der zugehörigen erzeugenden Fourier-Reihen und — nach Anbringung einer Anfangsphase — die Bestimmung ihres Transformationsverhaltens bei Ausübung der Modulsubstitutionen einer gewissen Kongruenzgruppe der Stufe q. Das Hauptgewicht liegt auf der expliziten Darstellung der dabei auftretenden Multiplikatoren in einer besonders einfachen Gestalt; da hier l-te Potenzreste im Rationalen betrachtet werden, war diese Einfachheit für $l > 2$ von vornherein unwahrscheinlich.

In § 2 werden die erwähnten Kongruenzgruppen zunächst im Hinblick auf ihre Bedeutung für das vorliegende Problem untersucht. Darüber hinaus zeigt sich, daß die — für das Folgende nicht erforderliche — Bestimmung ihres Geschlechts nur geringen Aufwandes bedarf.

§ 3 enthält den vollen Transformations-Formalismus der erzeugenden Modulfunktionen des gestellten Partitionenproblems bei Ausübung beliebiger Modulsubstitutionen. Der Formalismus drückt aus, daß sich hierbei ein explizit gegebenes System multiplikativer Modulfunktionen unter Aufnahme konstanter Faktoren lediglich permutiert. Für die Faktoren (die Analoga der erwähnten Multiplikatoren) finden sich im Falle $l=2$ explizite Ausdrücke sehr einfacher Bauart [s. auch (PII)], während für $l>2$ hier die arithmetische Unzulänglichkeit der notwendigerweise im Rationalen verlaufenden Operationen hervortritt: Es gelingt nur, die sämtlichen auftretenden Symbole durch einfache Relationen auf $l-2$ oder $l-1$ von ihnen zurückzuführen, je nachdem, ob l gerade oder ungerade ist.

§ 4 bringt die Hauptergebnisse über die Partitionenanzahlen in Gestalt exakter Reihendarstellungen und asymptotischer Entwicklungen. Zwar bestehen diese letzteren für jedes einzelne Problem aus nur einer festen Anzahl von Gliedern; doch sind diese Glieder durch explizite Berechnung der eingehenden Exponentialsummen vollständig bestimmt, und es wird die Genauigkeit der entsprechenden Resultate von (PI) weit übertroffen. Gegenwärtig besteht kaum Aussicht, asymptotische Entwicklungen zu gewinnen, deren Gliederzahl mit der betreffenden — hier ganzzahligen — Variabeln ins Unendliche wächst. Was in der Partitionenliteratur so bezeichnet wird, verdient diese Bezeichnung nicht wirklich, weil die wichtigsten Bestandteile der Glieder, gewisse Exponentialsummen oder Linearkomposita von solchen, nicht entfernt genau genug bekannt sind, als daß man das asymptotische Verhalten jedes einzelnen Gliedes auch nur ungefähr bestimmen könnte. Man muß sich also begnügen entweder mit allgemeinen Aussagen wie (PI) Satz 9 bzw. (PII) Satz 18 oder mit Entwicklungen, die nur so weit gehen, wie man imstande ist, die in den Gliedern auftretenden Exponentialsummen in geschlossener Form zu summieren.

§ 5 betrifft hauptsächlich die asymptotischen Relationen zwischen den vorher diskutierten Partitionenanzahlen. Das hier für $l>2$ vorliegende Problem besteht in der Verallgemeinerung eines in (PII) für $l=2$ bewiesenen sehr merkwürdigen Zusammenhanges, den ich zum Verständnis der Situation kurz zitiere: Es sei $\pi_n^+(q)$ bzw. $\pi_n^-(q)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden, die sämtlich quadratische Reste bzw. Nichtreste mod q sind. Es bezeichne P den Körper der rationalen Zahlen, ε die Grundeinheit, h die Klassenzahl des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{q})$, $a_5(q)$ die Anzahl der Darstellungen von q als Summe von fünf Quadraten (in der üblichen Zählung). Ferner sei

(0.1) $e_5^*(q)=\frac{1}{240}a_5(q)$, wenn $q\equiv 1 \bmod 8$, und $=\frac{1}{360}a_5(q)$, wenn $q\equiv 5 \bmod 8$;

dieses $e_5^*(q)$ erweist sich als natürliche Zahl $\equiv \frac{1}{4}(q-1) \bmod 2$. Dann gilt für $n\to\infty$

$$(0.2)\qquad \frac{\pi_n^+(q)}{\pi_n^-(q)}=\varepsilon^h\left\{1-c_0(q)\frac{e_5^*(q)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \quad \text{mit} \quad c_0(q)=\frac{\pi}{6}\sqrt{3\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Als die Analoga der $\pi_n^{\pm}(q)$ hat man für $l>2$ die Anzahlen $\pi_n^{(s)}(q)$ der Partitionen von n aufzufassen, deren Summanden in die durch den primen Rest $s \bmod q$ bestimmte Klasse nach der Gruppe $\mathfrak{P}$ der l-ten Potenzreste $\bmod q$ fallen. Vermöge der GALOISschen Theorie ist $\mathfrak{P}$ eindeutig ein reeller absolut-abelscher Zahlkörper K in $\mathsf{P}\left(\exp\frac{2\pi i}{q}\right)$ zugeordnet. Es liegt nahe, $\pi_n^{(s)}(q)$, der Konjugiertenbildung in K entsprechend, als zu $\pi_n^{(1)}(q)$ konjugierte Anzahlfunktion zu betrachten und nun die logarithmierte Relation (0.2) dadurch zu verallgemeinern, daß man den Regulator der Konjugiertenquotienten von $\pi_n^{(\cdot)}(q)$ aufstellt. Dieser Regulator erscheint auf der linken Seite der folgenden Gleichung, deren Gültigkeit aus § 4 hervorgeht: Durchlaufen s und t ein Vertretersystem der (eigentlichen) Nebenklassen nach der Gruppe $\mathfrak{P}$ in der gleichen Reihenfolge, so gilt für $n\to\infty$

$$\log\left|\frac{\pi_n^{(st^{-1})}(q)}{\pi_n^{(t^{-1})}(q)}\right|_{s\neq 1\neq t} = Rh\left(1+\frac{C_1(q)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{0.3}$$

wo R den Regulator der Grundeinheiten und h die Klassenzahl des Körpers K bezeichnet.

Die wesentliche Aufgabe des § 5 kann jetzt dahin präzisiert werden, daß für $C_1(q)$ eine Interpretation zu finden ist, analog derjenigen, welche sich für $l=2$ durch Logarithmieren von (0.2) ergibt, d.i.

$$C_1(q) = -\frac{c_0(q)\, e_5^*(q)}{h\log\varepsilon} \qquad (l=2).$$

Zur Lösung dieser Aufgabe wird man durch den inzwischen in [5] aufgedeckten Zusammenhang geführt: Man zerlege das Kreisteilungspolynom $f(u)=\sum_{\nu=0}^{q-1}u^{\nu}$ in zwei über $\mathsf{P}\left(\sqrt{q}\right)$ irreduzible Faktoren $f_+(u), f_-(u)$ mit höchsten Koeffizienten 1 und schreibe diese Faktoren als Polynome in $u-1$; die Anordnung der Faktoren bestimmt sich in naheliegender Weise aus der transzendenten Normierung der q-ten Einheitswurzeln. In der Bezeichnung

$$f_{\pm}(u)=\sum_{m=0}^{r}\lambda_{m\pm}(u-1)^m \qquad \left(r=\tfrac{1}{2}(q-1),\ \lambda_{r\pm}=1\right)$$

sind die Koeffizienten $\lambda_{m\pm}$ ganze, paarweise konjugierte Zahlen aus $\mathsf{P}\left(\sqrt{q}\right)$, und es gilt zunächst

$$\lambda_{0\pm}=f_{\pm}(1)=\sqrt{q}\,\varepsilon^{\mp h};$$

ferner, wenn $\varrho_{m\pm}=\lambda_{m\pm}\lambda_{0\pm}^{-1}$ gesetzt wird:

$$\varrho_{2+}-\varrho_{2-}=\sqrt{q}\,e_5^*(q).$$

Dementsprechend gewinnt man im Falle $l>2$ eine Darstellung für $C_1(q)$, in die die folgenden Größen eingehen: Erstens die Logarithmen der Kreiseinheiten von K, wie sie in der Klassenzahlbestimmung auftreten, zweitens

die mit l-ten Potenzen im Exponenten gebildeten Analoga der GAUSSschen Summen zum Primzahlmodul q; drittens die (den obigen $\varrho_{2\pm}$ entsprechenden) Quotienten der drittniedrigsten und der niedrigsten Koeffizienten der den obigen $f_{\pm}(u)$ entsprechenden Polynome in $u-1$. Man findet diese Polynome, indem man $f(u)$ in l über K irreduzible Faktoren mit höchstem Koeffizienten 1 zerlegt und die Faktoren als Polynome in $u-1$ schreibt. Formal ergibt sich $C_1(q)$ bis auf einen trivialen Faktor in Gestalt der Spur einer Matrix, die sich aus den drei (sinngemäß zu erklärenden) Regulatrizen der genannten Größensysteme zusammensetzt.

Literatur

[1] PETERSSON, HANS: Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. Abhandlungen d. Dtsch. Akad. d. Wiss. Berlin: Akademie-Verlag 1954. — [2] PETERSSON, HANS: Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multiplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe. Acta mathematica **95**, (1956). — [3] HASSE, HELMUT: Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Berlin: Akademie-Verlag 1952. — [4] HECKE, ERICH: Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen **1917**. — [5] PETERSSON, HANS: Über eine Zerlegung des Kreisteilungspolynoms von Primzahlordnung. Math. Nachrichten, Berlin **14** (1956).

§ 1. *Ansatz. Die erzeugenden Fourier-Reihen*

Fest gegeben seien die natürlichen Zahlen l und q unter den Bedingungen

$$l \geqq 2;\ q \text{ Primzahl},\ q \equiv 1 \bmod 2l,\ q > 2l+1. \tag{1.1}$$

Die meisten der im folgenden auftretenden Objekte hängen von l und q ab. Um die Symbolik zu entlasten, werden wir diese Abhängigkeit in der Bezeichnung vielfach nicht zum Ausdruck bringen.

Es bezeichne $\mathfrak{R}$ die multiplikative Gruppe der teilerfremden Restklassen mod q, $\mathfrak{P}$ die Untergruppe der l-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{V}$ ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathfrak{R}$ bezüglich $\mathfrak{P}$. Nach (1.1) besteht $\mathfrak{V}$ aus genau l Elementen und enthält $\mathfrak{P}$ die Restklasse von $-1 \bmod q$. Bedeutet $\{s\}$ allgemein die Restklasse der ganzen Zahl $s \bmod q$ $\big((s,q)=1\big)$, so schreiben wir

$$s\,\mathfrak{P} \text{ für } \{s\}\,\mathfrak{P} \text{ und } r \in s\,\mathfrak{P} \text{ für } \{r\} \in s\,\mathfrak{P} \qquad \big(r \text{ ganz},\ (r,q)=1\big), \tag{1.2}$$

ferner auch $s \in \mathfrak{V}$ an Stelle von $\{s\} \in \mathfrak{V}$; im letzteren Falle wird jeder Restklasse $\{s\}$ von $\mathfrak{V}$ eine ihrer Zahlen s eindeutig zugeordnet. Trägt ein Summen- oder Produktzeichen einen oberen Index — etwa s —, so besage dies die zusätzliche Bedingung $* \in s\,\mathfrak{P}$ für den laufenden Buchstaben $*$ und das betreffende s. Der Buchstabe h an einem Summen- oder Produktzeichen durchläuft, ohne daß dies nochmals hervorgehoben wird, die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(q-1)$, soweit sich dies mit eventuell gestellten anderen Bedingungen verträgt.

Jeder Nebenklasse $s\mathfrak{P}$ werde eine ganze Zahl $k_s \geq 0$ zugeordnet; wir erklären k_r für ganze zu q teilerfremde r durch

$$k_r = k_s, \quad \text{wenn} \quad r \in s\mathfrak{P}, \tag{1.3}$$

k durch $k = \sum_{s \in \mathfrak{B}} k_s$ und setzen im folgenden stets $k > 0$ voraus. Wir untersuchen das folgende *Partitionenproblem:* Man denke sich die natürlichen Zahlen m aus $s\mathfrak{P}$ in k_s verschiedenen Farben realisiert und verstehe unter $\pi_n(\mathfrak{k}) = \pi_n(\mathfrak{k}, q, l)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden, wobei die Summanden aus $s\mathfrak{P}$ $(s \in \mathfrak{B})$ in den k_s vorbestimmten Farben erscheinen. Zwei solche Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder Summand in beiden in jeder der für ihn vorbestimmten Farben gleich oft auftritt. Das Verschwinden eines k_s $(s \in \mathfrak{B})$ besage, daß überhaupt keine Summanden aus $s\mathfrak{P}$ verwendet werden. Die uneigentliche Partitionenanzahl $\pi_0(\mathfrak{k})$ setzen wir $= 1$; $\mathfrak{k}$ symbolisiert den Vektor mit den in irgendeiner fest gewählten Anordnung gebildeten Komponenten k_s $(s \in \mathfrak{B})$.

Um die *erzeugende Potenzreihe* der $\pi_n(\mathfrak{k})$ aufzustellen, setzen wir für ganzes r und komplexes u

$$\Phi_r(u) = \prod_{m=1}^{\infty}{}^{(r)} (1 - u^m) \qquad (|u| < 1,\ (r, q) = 1).$$

Dann wird

$$\prod_{s \in \mathfrak{B}} \Phi_s{}^{k_s}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k})\, u^n. \tag{1.4}$$

Von diesen Funktionen vollzieht sich der Übergang zu den *Modulfunktionen* in der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ $(y = \operatorname{Im} \tau > 0)$ durch die Substitution $u = u_q = \exp 2\pi i \frac{\tau}{q}$. Man gelangt dabei zu den Teilwerten der WEIERSTRASSschen Funktion $\vartheta_1(v, \tau)$. Die Normierung und das Verhalten der Teilwerte bei Ausübung von Modulsubstitutionen wurden in (PI) 8., ihre Beziehungen zu dem obigen Partitionenproblem für $l = 2$ in (PII) § 3 entwickelt. Wir beschränken uns hier darauf, die Hauptformeln des analytischen Apparats, auf den man durch die genannte Substitution geführt wird, anzugeben; sie sind wie im Falle $l = 2$ unmittelbar aus (PII) Satz 6 abzuleiten.

Man setze

$$g_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6} \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1,\ g_2(x') = g_2(x) \ \text{für}\ x' \equiv x \bmod 1,$$

ferner bei ganzem s

$$e_s = \sum_h^{(s)} h, \quad e_s' = \sum_h^{(s)} h^2, \quad \beta_s = \sum_h^{(s)} g_2\left(\frac{h}{q}\right) \quad \left((s, q) = 1\right), \tag{1.5}$$

und bei ganzem $m \geq 1$

$$u_m = u_m(\tau) = \exp 2\pi i \frac{\tau}{m}, \quad \xi_m = u_m\left(\frac{1}{2}\right) = \exp \frac{\pi i}{m}. \tag{1.6}$$

Dann hängt

$$P_s(\tau) = \Phi_s(u_q(\tau)) = \prod_{m=1}^{\infty}{}^{(s)} (1 - u_q^m) \tag{1.7}$$

mit der Modulfunktion [s. (PII), § 3]

$$Q_s(\tau) = \prod_h{}^{(s)} Q(\tau, h, 0, q) \qquad ((s, q) = 1) \tag{1.8}$$

durch

$$Q_s(\tau) = i^{(q-1)/2l} \xi_q^{e_s} e^{\pi i \beta_s \tau} P_s(\tau) \tag{1.9}$$

zusammen. $Q_s(\tau)$ transformiert sich unter Anwendung der Modulsubstitution $\tau \to S\tau$ gemäß

$$\begin{cases} Q_s(S\tau) = \mu_s(S)\, \hat{Q}_s(\tau, S), \quad \hat{Q}_s(\tau, S) = \prod_h{}^{(s)} Q(\tau, ah, bh, q), \\ \mu_s(S) = \lambda^{(q-1)/l}(S)\, \xi_q^{(1-a-b)e_s} \xi_{q^2}^{ab e_s'} \qquad \left(S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right), \end{cases} \tag{1.10}$$

wo $\lambda(S)$ das Multiplikatorsystem der DEDEKINDschen Modulform $\eta(\tau)$ bezeichnet [vgl. (PII) (1.20, 21)]. Versteht man unter Γ die Gruppe der Modulmatrizen, unter $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ die Gruppe der Matrizen $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $\beta \equiv 0 \bmod q$, $\alpha \in \mathfrak{P}$, so folgt zunächst

Satz 1. *Es gilt*

$$Q_{s'}(\tau) = Q_s(\tau) \quad \textit{für} \quad s' \in s\mathfrak{P} \qquad ((s, q) = 1),$$

$$Q_s(L\tau) = v_s(L)\, Q_s(\tau) \quad \textit{für} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^*$$

mit

$$v_s(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L)\, \xi_q^{(1-\alpha-\beta)e_s} \xi_{q^2}^{\alpha\beta e_s'} \prod_{R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}{}^{(s)} (-\xi_q^{2\alpha h})$$

und $R_q(t) = t - q[t/q]$ *in der üblichen Bedeutung der eckigen Klammer.*

Zur *Vereinfachung* des Ausdrucks $v_s(L)$ schreiben wir

$$v_s(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L)\, \xi_q^{\psi_s(L)} (-1)^{\sigma_s(L)},$$

$$\psi_s(L) = (1 - \alpha - \beta)\, e_s + \alpha \frac{\beta}{q} e_s' + \sum_{R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}{}^{(s)} 2\alpha h, \qquad \sigma_s(L) = \sum_{R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}{}^{(s)} 1$$

und erhalten zunächst

$$\alpha^{(q-1)/2l} \prod_h{}^{(s)} h = \prod_h{}^{(s)} (\alpha h) \equiv (-1)^{\sigma_s(L)} \prod_h{}^{(s)} h \bmod q,$$

also

$$(-1)^{\sigma_s(L)} \equiv \alpha^{(q-1)/2l} \bmod q.$$

Wegen $\alpha \in \mathfrak{P}$ existiert ein ganzes ϱ mit $\alpha \equiv \varrho^l \bmod q$; daraus folgt

$$(-1)^{\sigma^{(L)}} = \left(\frac{\varrho}{q}\right) \quad \text{(quadratisches Restsymbol).} \tag{1.11}$$

Welche l-te Kongruenzwurzel ϱ aus α man hier wählt, ist gleichgültig; ist $\mu\varrho$ eine andere, so gilt $\mu^l \equiv 1 \bmod q$ und nach (1.1)

$$\left(\frac{\mu}{q}\right) \equiv \mu^{(q-1)/2} = \mu^{l(q-1)/2l} \equiv 1 \bmod q.$$

Weiter setzen wir für ganzes, zu q teilerfremdes α

$$\gamma_s(\alpha) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}}^{(s)} h, \qquad \gamma_s^*(\alpha) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) < \frac{1}{2}q}}^{(s)} h, \tag{1.12}$$

so daß nach (1.5) $\gamma_s(\alpha) + \gamma_s^*(\alpha) = e_s$. Für $\alpha \in \mathfrak{P}$ folgt nun

$$-\alpha\gamma_s(\alpha) + \alpha\gamma_s^*(\alpha) \equiv e_s \bmod q, \quad \text{also} \quad 2\alpha\gamma_s(\alpha) \equiv (\alpha - 1)\, e_s \bmod q$$

und daraus

$$\psi_s(L) \equiv \alpha \frac{\beta}{q} e_s' \bmod q \qquad (L \in \Gamma^*).$$

Andrerseits hat man

$$2e_s' \equiv \sum_h^{(s)} h^2 + \sum_h^{(s)} (q-h)^2 = \sum_{j=1}^{q-1}{}^{(s)} j^2 \equiv s^2 \sum_{j=1}^{q-1}{}^{(1)} j^2 \bmod q$$

und mit g als Primitivzahl mod q:

$$(g^{2l} - 1) \sum_{j=1}^{q-1}{}^{(1)} j^2 \equiv (g^{2l} - 1) \sum_{0 \le \nu \le (q-1)/l - 1} g^{2\nu l} = g^{2(q-1)} - 1 \equiv 0 \bmod q.$$

Wegen (1.1) gibt dies

$$e_s' \equiv 0 \bmod q, \tag{1.13}$$

also insbesondere $\psi_s(L) \equiv 0 \bmod q$ für $(s, q) = 1$ und $L \in \Gamma^*$. Da überdies $e_s' \equiv e_s \bmod 2$, wird

$$\psi_s(L) \equiv (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\, e_s \equiv 0 \bmod 2,$$

und wir erhalten

Satz 2. *Für $(s, q) = 1$ und $L \in \Gamma^*$ gestattet $v_s(L)$ die von s unabhängige Darstellung*

$$v_s(L) = v(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L) \left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right) \qquad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right).$$

Dabei bedeutet $\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right)$ das quadratische Restsymbol $\left(\frac{\varrho}{q}\right) = (\varrho|q)$ für irgendeine l-te Kongruenzwurzel ϱ aus α mod q. Der Exponent von $\lambda(L)$ ist gerade, und

es gilt für jede Modulmatrix $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\lambda^2(S)=\begin{Bmatrix} i^{-c} \\ i^{d-1-cd} \end{Bmatrix} \exp\frac{\pi i}{6}\{(a+d)c-bd(c^2-1)\}, \quad \textit{wenn} \quad \begin{Bmatrix} c\equiv 1 \bmod 2 \\ d\equiv 1 \bmod 2 \end{Bmatrix}.$$

$\lambda^2(S)$ *stellt einen ungeraden Charakter auf der vollen Gruppe der Modulmatrizen dar.*

Für $L\equiv \pm I \bmod 12q$ ist $v(L)=1$. Daß v einen geraden abelschen Charakter auf der Gruppe Γ^* darstellt, folgt aus Satz 1. Für das Restsymbol $\left(\sqrt[l]{\alpha}/q\right)$ bedeutet dies die Charaktereigenschaft auf Γ^* mit der Parität $(q-1)/2l$. Die Charaktereigenschaft läßt sich arithmetisch direkt bestätigen. Die genannte Parität, d.h.

$$\left(\sqrt[l]{-1}/q\right)=(-1)^{(q-1)/2l}$$

ergibt sich arithmetisch, wenn wieder g eine Primitivzahl mod q bezeichnet, aus

$$\sqrt[l]{-1}\equiv g^{(q-1)/2l} \bmod q, \quad (g/q)=-1.$$

§ 2. *Die Gruppen* $\Gamma^*[l,q]$

Wir bestimmen zunächst für die Gruppe Γ^* ein endliches Bereichsystem vom Charakter einer Fundamentalmenge, das aus *Spitzensektoren* von Γ^* besteht. Ist allgemein Γ_0 eine die Matrix $-I$ enthaltende Untergruppe von endlichem Index in Γ, ζ eine Spitze von Γ_0, also $\zeta=A^{-1}\infty$ mit einem geeigneten $A\in\Gamma$, so heißt N die *Breite* der Spitze ζ von Γ_0, wenn N die kleinste natürliche Zahl mit $A^{-1}U^NA\in\Gamma_0$ ist $\left(U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; und jeder Bereich

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_0+N} A^{-1}U^k\mathfrak{E} \qquad \left(U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{2.1}$$

wird ein *Spitzensektor* (mit der Spitze ζ) der Gruppe Γ_0 genannt. Dabei bezeichnet $\mathfrak{E}$ die Menge der τ mit $|\tau|>1$, $|Re\,\tau|<\frac{1}{2}$ zuzüglich der Randpunkte τ mit $Re\,\tau\geq 0$ und des über die genannten τ zu erreichenden Grenzpunktes ∞. Durchläuft $\zeta_j=A_j^{-1}\infty$ $(A_j\in\Gamma,\ 1\leq j\leq\sigma_0)$ ein volles System inäquivalenter Spitzen von Γ_0 und hat ζ_j in Γ_0 die Breite N_j, so gewinnt man gleichzeitig in

$$\Gamma=\sum_{j=1}^{\sigma_0}\sum_{k \bmod N_j}\Gamma_0A_j^{-1}U^k \tag{2.2a}$$

eine Zerlegung von Γ in paarweise elementfremde Nebenklassen bezüglich Γ_0 und in

$$\mathfrak{F}_0=\sum_{j=1}^{\sigma_0}\sum_{k \bmod N_j}A_j^{-1}U^k\mathfrak{E} \tag{2.2b}$$

ein Bereichsystem der genannten Art für die Gruppe Γ_0 – vorausgesetzt, daß hier alle k konsekutive Zahlen durchlaufen und daß getrennt liegende Randpunkte identifiziert werden, wenn sie einander nach Γ_0 äquivalent sind (was nur eintritt, wenn sie elliptische Fixpunkte von Γ, nicht aber von Γ_0 sind).

Im vorliegenden Falle $\Gamma_0 = \Gamma^*$ läßt sich dieses Schema wie folgt realisieren: Man denke sich die Zahlen s in den Restklassen von $\mathfrak{P}$ gemäß § 1 irgendwie fest gewählt und setze

$$(2.3)\quad \begin{cases} S_{1,s} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{P}, \quad S_{2,s} = T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{P} \\ S_{1,s} = \begin{pmatrix} s & \nu q \\ 1 & s' \end{pmatrix}, \quad S_{2,s} = \begin{pmatrix} q & -s' \\ s & -\nu \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{P},\ s \notin \mathfrak{P}, \end{cases}$$

wo s' und ν zu s gemäß $ss' = \nu q + 1$ bestimmt seien. Durch elementare Rechnung bestätigt man den folgenden Sachverhalt:

Satz 3. *Die Darstellungen* (2.2a, b) *gelten für* $\Gamma_0 = \Gamma^*[l, q]$ *mit* $\sigma_0 = \sigma^* = 2l$ *und*

$$(2.4)\quad \begin{cases} \zeta_j = \infty \text{ bzw. } s \quad (A_j = S_{1,s}^{-1},\ N_j = q,\ 1 \le j \le l,\ s \in \mathfrak{P}), \\ \zeta_j = 0 \text{ bzw. } q/s \quad (A_j = S_{2,s}^{-1},\ N_j = 1,\ l+1 \le j \le 2l,\ s \in \mathfrak{P}). \end{cases}$$

Γ^* *hat in der vollen Modulgruppe* Γ *den Index* $l(q+1)$.

Auf dieser Grundlage läßt sich das Verhalten der Funktionen $Q_s(\tau)$ in den sämtlichen rationalen Spitzen der Modulfigur vollständig beschreiben.

Zur Entwicklung der Partitionenfunktionen $\pi_n(\mathfrak{k})$ in unendliche Reihen bedarf man einer Aussage über die *zweiten Zeilen* $\{m_1, m_2\}$ in den Matrizen M der Nebenklassen $A_j\Gamma^*$ $(1 \le j \le \sigma^*$, A_j nach Satz 3). Für alle diese $\{m_1, m_2\}$ ist $(m_1, m_2) = 1$ eine notwendige Bedingung. Darüber hinaus kennzeichnen wir in der vierten Spalte der folgenden Tabelle die Menge der dabei tatsächlich auftretenden m_1 genau und geben in der fünften Spalte eine weitere notwendige Bedingung für die auftretenden m_2 an. Diese ist zusammen mit $(m_2, m_1) = 1$ auch hinreichend.

Tabelle

ζ_j	N_j	A_j	m_1	m_2
∞	q	I	Alle ganzen m_1	$m_2 \in \mathfrak{P}$
$s \in \mathfrak{P},\ s \notin \mathfrak{P}$	q	$\pm S_{1,s}^{-1}$	Alle ganzen $m_1 \not\equiv 0$	$m_2 \in s\mathfrak{P}$
0 und $\frac{q}{s}$ $(s \in \mathfrak{P},\ s \notin \mathfrak{P})$	1	$\pm S_{2,s}^{-1}$	Alle ganzen $m_1 \in s\mathfrak{P}$	$m_2 \equiv 0 \bmod q$

Für die Anwendungen der Funktionen Q_s auf die oben formulierten Partitionenprobleme ist nach der Theorie von (PI) die Kenntnis der *Geschlechter* der Gruppen $\Gamma^*[l, q]$ ohne jede Bedeutung. Da diese Gruppen

aber ein gewisses selbständiges Interesse beanspruchen dürfen, sollen ihre Geschlechter jetzt bestimmt werden; es bedarf dazu nur eines geringen Aufwandes. — Wir bedienen uns der folgenden Formel: Bezeichnet p^* das Geschlecht von Γ^* und bedeuten e_2^*, e_3^* die Anzahlen der nach Γ^* inäquivalenten elliptischen Fixpunkte der Ordnungen 2 bzw. 3 von Γ^*, so gilt im Hinblick auf Satz 3

$$p^* - 1 + l + \frac{1}{4} e_2^* + \frac{1}{3} e_3^* = \frac{1}{12} l(q+1). \tag{2.5}$$

Man hat also lediglich e_2^* und e_3^* zu berechnen.

Neben der Geometrie der Modulfigur benutzen wir, daß Γ^* Untergruppe und sogar Normalteiler der bekannten Gruppe $\Gamma^0 = \Gamma^0[q]$ ist, die aus den Modulmatrizen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $b \equiv 0 \bmod q$ besteht. Γ^0 hat den (zusammenhängenden) Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F}^0 = \sum_{|m| < \frac{1}{2}q} U^m \mathfrak{E} + T\mathfrak{E} \tag{2.6}$$

und zerfällt gemäß

$$\Gamma^0 = \sum_{s \in \mathfrak{B}} \Gamma^* S_{1,s} \tag{2.7}$$

in elementfremde Nebenklassen von Γ^*. Daher ist das endlich-teilige Bereichsystem

$$\mathfrak{F}^* = \sum_{s \in \mathfrak{B}} S_{1,s} \mathfrak{F}^0 \tag{2.8}$$

eine Fundamentalmenge von Γ^*.

Ein volles System inäquivalenter elliptischer Fixpunkte von Γ^* findet sich demgemäß unter den Punkten

$$S_{1,s} U^m i \ (1 \leq |m| < \tfrac{1}{2} q, s \in \mathfrak{B}), \ S_{1,s} U^m \xi_3 \ (1 \leq |m| < \tfrac{1}{2} q, \ m \neq -1, s \in \mathfrak{B}), \tag{2.9}$$

und man hat lediglich die Erzeugenden der in Γ enthaltenen Fixgruppen dieser Punkte daraufhin zu prüfen, ob sie in Γ^* liegen. Wird

$$F_{jk} = U^j T U^{-k} = \begin{pmatrix} j & -(jk+1) \\ 1 & -k \end{pmatrix} = -F_{kj}^{-1}$$

geschrieben, so liegen die Erzeugenden

$$S_{1,s} F_{m\,m} S_{1,s}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad S_{1,s} F_{m,m+1} S_{1,s}^{-1} \quad (m, s \text{ wie in (2.9)}) \tag{2.10}$$

wegen

$$S_{1,s} F_{jk} S_{1,s}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} j + s(jk+1) & -s^2(jk+1) \\ * & * \end{pmatrix} \bmod q$$

genau dann in Γ^*, wenn für $\{j, k\} = \{m, m\}$ bzw. $\{m, m+1\}$

$$jk + 1 \equiv 0 \mod q, \ j \in \mathfrak{P} \tag{2.11}$$

zutrifft. Dies führt auf eine elementar-arithmetische Diskussion.

Mit ihr sind die Anzahlen e_2^*, e_3^* deshalb vollständig zu bestimmen, weil niemals zwei verschiedene der so gewonnenen elliptischen Fixpunkte ω_1, ω_2 von Γ^* einander nach Γ^* äquivalent sein können. Gilt nämlich $\omega_2 = L^* \omega_1$ mit einem L^* aus Γ^*, so läßt sich $L^* \mathfrak{F}^*$ durch eine elliptische Matrix E_2^* aus Γ^* mit dem Fixpunkt ω_2 in ein Bereichsystem $E_2^* L^* \mathfrak{F}^*$ überführen, das mit $\mathfrak{F}^*$ innere Punkte gemein hat, also mit $\mathfrak{F}^*$ zusammenfällt. Dies gibt in der Gestalt

$$E_2^* L^* = \pm I, \quad E_2^* L^* \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

einen Widerspruch.

Die arithmetische Diskussion liefert im Falle $j = k = m$ [vgl. (2.9, 10, 11)] zunächst für die Anzahl e_2^0 inäquivalenter elliptischer Fixpunkte der Ordnung 2 von Γ^0 den (bekannten) Wert

$$e_2^0 = 1 + \left(\frac{-1}{q}\right)$$

und überdies, daß e_2^* verschwindet, wenn $q \equiv 3 \bmod 4$ ist. Es sei g eine Primitivzahl mod q und $q \equiv 1 \bmod 4$. Die ganzen m mit $2 \leq |m| < \frac{1}{2} q$ sind mod q durch

$$m \equiv \pm g^\nu \quad \left(1 \leq \nu \leq \tfrac{1}{2}(q-1) - 1\right) \bmod q$$

repräsentierbar; $m^2 \equiv -1 \bmod q$ bedeutet $\nu = \frac{1}{4}(q-1)$, und es gilt genau dann $m \in \mathfrak{P}$, wenn $q \equiv 1 \bmod 4l$. Daraus folgt

$$e_2^* = 2l, \text{ wenn } q \equiv 1 \bmod 4l; \quad e_2^* = 0, \text{ wenn } q \equiv 2l+1 \bmod 4l.$$

Im Falle $j = m$, $k = m+1$ hat man nach (2.11) zunächst die Kongruenz

$$m^2 + m + 1 \equiv 0 \bmod q, \quad \text{oder} \quad (2m+1)^2 \equiv -3 \bmod q \tag{2.12}$$

zu erfüllen, was $\left(\frac{q}{3}\right) = +1$ erfordert. Gilt dies, so existiert unter den positiv-reduzierten Resten mod q genau eine ungerade quadratische Kongruenzwurzel $2m+1$ aus -3, für die dann $2 \leq m \leq \frac{1}{2}(q-3)$ zutrifft. Da (2.12) auch durch $-m-1$ an Stelle von m gelöst wird, erhält man für die Anzahl e_3^0 der inäquivalenten Fixpunkte der Ordnung 3 von $\Gamma^0[q]$ den Wert

$$e_3^0 = 1 + \left(\frac{q}{3}\right).$$

Für $q \equiv 1 \bmod 3$ sind $x = m$ und $x = -m-1$ die einzigen Lösungen der Kongruenz $x^3 \equiv 1 \bmod q$, die den Relationen

$$x \not\equiv 1 \bmod q, \quad 2 \leq |x| \leq \tfrac{1}{2}(q-1) \tag{2.13}$$

genügen. Setzt man wieder $x \equiv \pm g^\nu \left(1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}(q-3)\right) \bmod q$, so bedeutet $x^3 \equiv 1 \bmod q$ zusammen mit (2.13), daß $\nu = \frac{1}{6}(q-1)$ oder $\nu = \frac{1}{3}(q-1)$ mit dem Minuszeichen im ersten und dem Pluszeichen im zweiten Falle. Ist eines dieser ν durch l teilbar, so auch das andere. Daher gilt

$$e_3^* = 2l, \text{ wenn } q \equiv 1 \bmod 6l; \quad e_3^* = 0, \text{ wenn } q \equiv 2l+1,\ 4l+1 \bmod 6l.$$

Diese Deduktion besteht bei sinngemäßer Erklärung von $\Gamma^*[1, q]$ auch für $l = 1$ und $q = 2l + 1$, wofern nur $q > 3$ ist. Wir erhalten zusammenfassend nach (2.5)

Satz 4. *Es sei l eine natürliche Zahl, q eine Primzahl $\equiv 1 \bmod 2l$, $q > 3$. Es bezeichne μ^* den Index der Gruppe $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ in der vollen Modulgruppe; σ^*, e_2^*, e_3^* die Anzahl inäquivalenter Fixpunkte bzw. der Ordnung $\infty, 2, 3$ von Γ^*; p^* das topologische Geschlecht von Γ^*. — Dann ist*

$$\mu^* = l(q+1), \quad \sigma^* = 2l, \quad e_2^* = 2l\,\delta\left(\frac{q-1}{4l}\right), \quad e_3^* = 2l\,\delta\left(\frac{q-1}{6l}\right),$$

$$p^* = 1 + \frac{1}{12}l(q-11) - \frac{1}{2}l\,\delta\left(\frac{q-1}{4l}\right) - \frac{2}{3}l\,\delta\left(\frac{q-1}{6l}\right),$$

dabei wie üblich $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \equiv 0 \bmod 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

§ 3. *Transformation der Funktionen Q_s durch Modulsubstitutionen*

Für die Darstellung der Partitionenanzahlen $\pi_m(\mathfrak{k})$ durch unendliche Reihen benötigt man die Kenntnis des Verhaltens der mit $u = u_q(\tau)$ gebildeten Funktionen (1.4) in den *sämtlichen Spitzen* der Gruppe Γ^*. Man gewinnt diese Kenntnis aus den Entwicklungen der Funktionen $Q_s(\tau)$ in den Spitzen, gemäß deren sich das einzelne $Q_s(\tau)$ als Potenzreihe (mit im allgemeinen gebrochenen Exponenten) in der betreffenden Ortsvariablen $\exp 2\pi i \frac{A\tau}{N}$ ausdrückt [Bezeichnungen wie bei (2.1)]. Nach Satz 3 bedeutet das die Darstellung von $Q_s(S_{1,t}\tau)$, $Q_s(S_{2,t}\tau)$ $(s, t \in \mathfrak{Z})$ als Potenzreihen in u_q bzw. u_1.

Wir diskutieren allgemeiner das Verhalten von $Q_s(\tau)$ bei *Anwendung beliebiger Modulsubstitutionen* S. Es sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und zunächst $b \equiv 0 \bmod q$. Nach (1.10) und (PII), Satz 6 erhält man

$$Q_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(S)\,\xi_q^{\psi_s(S)}\,\varrho(s, a)\,Q_{sa}(\tau) \qquad \text{[vgl. (1.6)]}$$

mit

$$\psi_s(S) = (1 - a - b)\,e_s + a\,\frac{b}{q}\,e_s' + 2a\,\gamma_s(a) \qquad \text{[vgl. (1.5, 12)]}$$

und

$$\varrho(s, t) = \prod_{R_q(th) > \frac{1}{2}q}^{h}{}^{(s)}(-1) \qquad (s, t \text{ ganz mit } (st, q) = 1, \text{ vgl. Satz 1}). \tag{3.1}$$

Das in § 1 dargelegte Verfahren liefert hier

$$\psi_s(S) \equiv e_s - e_{sa} \bmod q, \qquad \psi_s(S) \equiv 0 \bmod 2.$$

Daher wird

$$Q_s(S\tau) = \xi_q^{e_s - e_{sa}}\,\lambda^{(q-1)/l}(S)\,\eta_s(a)\,Q_{sa}(\tau) \qquad (b \equiv 0 \bmod q), \tag{3.2}$$

wo $\eta_s(a)$ gemäß (1.5), (3.1) durch

$$\eta_s(t) = (-1)^{e_s - e_{st}}\,\varrho(s, t) \tag{3.3}$$

zu erklären ist. Auf diese Formel (3.2) läßt sich der Fall eines beliebigen $S \in \Gamma$ mit $a \not\equiv 0 \bmod q$ leicht zurückführen. Der Faktor $\lambda^{(q-1)/l}(S)\,\eta_s(a)$ ändert sich beim Übergang von S zu $-S$ nicht.

Um den Fall $a \equiv 0 \bmod q$ zu behandeln, bilden wir zunächst nach (1.10)

$$Q_s(T\tau) = \mu_s(-T) \prod_h^{(s)} Q(\tau, 0, h, q) \qquad \left(T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Eine Formel von Satz 2 zeigt hier $\mu_s(-T) = \lambda^{(q-1)/l}(-T) = i^{(q-1)/2}$, und daher ergibt sich

$$Q_s(T\tau) = i^{(q-1)/2} \xi_q^{e_s} \omega_s u_{24l}^{q-1} P_s^*(\tau) \tag{3.4}$$

mit

$$\omega_s = \prod_h^{(s)} 2 \sin \frac{\pi h}{q}, \quad P_s^*(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j \bmod q}^{(s)} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m). \tag{3.5}$$

Bezeichnet K den in der Einleitung genannten absolut-abelschen Zahlkörper, der als Klassenkörper zur Gruppe $\mathfrak{P}$ mit dem Führer q aufgefaßt werden kann, so ist K reell, hat den Absolutgrad l, die Galois-Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ und enthält die (ganz-algebraischen) Koeffizienten der Entwicklung von $P_s^*(\tau)$ in eine Potenzreihe in der Variablen u_1.

Nun sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $a \equiv 0 \bmod q$. Es gilt $S = -S'T$ mit $S' = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ und daher nach (3.2, 4)

$$Q_s(S\tau) = i^{(q-1)/2} \xi_q^{e_s} \lambda^{(q-1)/l}(ST)\, \eta_s(b)\, \omega_{bs} u_{24l}^{q-1} P_{bs}^*(\tau). \tag{3.6}$$

Die Formeln (3.2, 4, 6) legen es nahe, an Stelle von Q_s die Funktion

$$R_s(\tau) = i^{-(q-1)/2} \xi_q^{-e_s} Q_s(\tau) \qquad (s \text{ ganz}, (s,q) = 1) \tag{3.7}$$

einzuführen. Für sie besteht der folgende

Satz 5. *Die Ausdrücke* (3.7) $R_s(\tau)$ *stellen multiplikative Funktionen der Gruppe* $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ *dar. Sie sind in der oberen* τ*-Halbebene holomorph und von Null verschieden. In der folgenden Zusammenstellung der Relationen, denen sie genügen, bedeuten* s, t *ganze Zahlen mit* $(st, q) = 1$, $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *Modulmatrizen. Es gilt*

(a) $R_t(\tau) = R_s(\tau)$, *wenn* $t \in s\mathfrak{P}$;

(b) $R_s(\tau) = e^{\pi i \beta_s \tau} P_s(\tau)$ [vgl. (1.5, 7)];

(c) $R_s(L\tau) = v(L)\, R_s(\tau)$, *wenn* $L \in \Gamma^*$ (vgl. Satz 2);

(d) $R_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(S)\, \eta_s(a)\, R_{sa}(\tau)$, *wenn* $b \equiv 0 \bmod q$ [vgl. (3.1, 3)];

(e) $R_s(T\tau) = \omega_s u_{24l}^{q-1} P_s^*(\tau)$ [vgl. (1.6), (3.5)];

(f) $R_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(ST)\, \eta_s(b)\, \omega_{sb} u_{24l}^{q-1} P_{sb}^*(\tau)$, *wenn* $a \equiv 0 \bmod q$.

Die hier angegebenen Relationen sind bewiesen. Zu ihrer Ergänzung dient, wenn $a \not\equiv 0 \bmod q$ ist und $S' = SU^{-k} = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ mit ganzem k und $b' \equiv 0 \bmod q$ bestimmt wird:

$$R_s(S\tau) = \xi_6^{-k(q-1)/2l}\, \lambda^{(q-1)/l}(S)\, \eta_s(a)\, R_{sa}(\tau + k) \qquad (a \not\equiv 0,\ b \equiv ak \bmod q).$$

Nach (1.13) ist $q\beta_s \equiv q(q-1)/12l \bmod 2$; dies erklärt, daß die rechte Seite sich beim Übergang von k zu $k+q$ nicht ändert. Um die Behauptungen des Textes von Satz 5 zu bestätigen, hat man lediglich noch (d) mit $S = S_{1,t}$ und (f) mit $S = -S_{2,t}$ $(t \in \mathfrak{B},\ t \notin \mathfrak{P})$ anzuschreiben. In diesen Formeln

$$(3.8) \qquad \begin{cases} R_s(S_{1,t}\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(S_{1,t})\, \eta_s(t)\, R_{st}(\tau), \\ R_s(S_{2,t}\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(-S_{2,t}T)\, \eta_s(t')\, \omega_{st'}\, u_{24l}^{q-1}\, P_{st'}^{*}(\tau) \end{cases} \qquad (s, t \in \mathfrak{B})$$

berechnen sich die ersten Faktoren auf den rechten Seiten nach Satz 2 aus

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \lambda^2(S_{1,t}) = -i\,\xi_6^{t+t'} = \xi_6^{t+t'-3}, \\ \lambda^2(-S_{2,t}T) = \lambda^2(-TS_{2,t}) = i^q\, \xi_6^{-q(t+t')} = \xi_6^{-q(t+t'-3)}. \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt die *konstanten Faktoren* auf den rechten Seiten in den Formeln des Satzes 5; es sind dies die Potenzen von $\lambda^2(S)$ für $S \in \Gamma$, sowie ω_s und $\eta_s(t)$ für $(st, q) = 1$. Von ihnen ist ω_s stets > 0 und stets $\neq 1$; $\lambda^2(S)$ ist eine zwölfte Einheitswurzel und hängt von S nur mod 12 ab; $\eta_s(t)$ nimmt nur die Werte ± 1 an, hängt aber davon ab, in welchen Nebenklassen nach der Gruppe der l-ten bzw. $(2l)$-ten Potenzreste mod q die Zahlen s und t liegen. Eine nennenswerte Reduktion ist weder bei ω_s noch bei $\lambda^2(S)$ zu erwarten. Von ω_s wird in § 5 die Rede sein. Bei $\lambda^2(S)$ wäre lediglich an die — aus der expliziten Darstellung nicht ersichtliche — Charaktereigenschaft zu erinnern, die in (3.9) benutzt wurde. Deutet man die Transposition einer Matrix durch einen Punkt an, so erhält man $T\dot{S}T^{-1} = S^{-1}$ und daraus $\lambda^2(\dot{S}) = \lambda^{-2}(S)$ für $S \in \Gamma$.

Wir untersuchen nun $\eta_s(t)$ etwas näher. Im Falle $l = 2$ findet man nach (PII) (3.21), wenn, was hier allein interessiert, t quadratischer Nichtrest mod q ist:

$$(3.10) \qquad \eta_s^2(t) = 1, \qquad \eta_s(t) \equiv \frac{q-1}{2}!\left(\frac{s}{q}\right) t^{\frac{1}{2}(q-1)} \bmod q \qquad (l = 2).$$

Für $l > 2$ läßt sich, wie wir zeigen wollen, eine Reduktion durchführen, die aber naturgemäß, da sie im rationalen Zahlkörper operiert, kein abgerundetes Resultat gibt. Das folgende Verfahren betrifft alle $l \geq 2$; die dabei auftretenden r, s, t stellen ganze zu q teilerfremde Zahlen dar.

Zunächst sei hervorgehoben, daß e_s, $\varrho(s,t)$, $\eta_s(t)$ nur von den Restklassen mod q abhängen, in denen s und t liegen. Überdies gilt

$$(3.11) \qquad e_{\alpha s} = e_s, \quad \varrho(\alpha s, t) = \varrho(s,t), \quad \eta_{\alpha s}(t) = \eta_s(t) \qquad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Wir setzen $\vartheta_s = \vartheta(s) = \prod_h^{(s)} h$ und erhalten

$$t^{(q-1)/2l}\vartheta_s = \prod_h^{(s)} th \equiv \varrho(s,t)\,\vartheta_{st} \bmod q,$$

also

$$(3.12) \qquad \vartheta_{st} \equiv \varrho(s,t)\,\vartheta_s\, t^{(q-1)/2l} \bmod q.$$

Da $\vartheta_{\alpha s} = \vartheta_s$ für $\alpha \in \mathfrak{P}$, so folgt nach (1.11)

$$(3.13) \qquad \varrho(s,\alpha) = \eta_s(\alpha) = \left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right) \qquad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Zerlegt man ϑ_{rst} nach (3.12) auf zwei Weisen, so findet man

$$(3.14) \qquad \varrho(r, st) = \varrho(r,s)\,\varrho(rs,t)$$

und, da die Faktoren $(-1)^{e_s - e_{st}}$ dieselbe Regel befolgen, auch

$$(3.15) \qquad \eta_r(st) = \eta_r(s)\,\eta_{rs}(t).$$

Diese Relation liefert insbesondere

$$(3.16) \qquad \eta_s(t) = \eta_1(s)\,\eta_1(st), \quad \eta_s(1) = 1$$

und nach (3.13)

$$(3.17) \qquad \eta_s(\alpha t) = \eta_s(t)\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right) \qquad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Hiermit ist die Berechnung der $\eta_s(t)$, wofern man die Werte $\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right)$ für die α in $\mathfrak{P}$ als bekannt ansieht, auf die der $\eta_1(s)$ für die s eines Vertretersystems $\mathfrak{V}$ *zurückgeführt*. Im Falle $l \equiv 0 \bmod 2$ besteht zwischen den $\eta_1(t)$, wenn t die Zahlen eines passend bestimmten Vertretersystems $\mathfrak{V}$ durchläuft, noch eine *Produktrelation*. Wir leiten für beliebige $l \geqq 2$ eine *allgemeinere Relation* dadurch her, daß wir t in (3.12) durch ag^ν ersetzen, wo a eine feste ganze Zahl mit $(a,q) = 1$, g eine Primitivzahl mod q bezeichnet, und die für $\nu = 0, 1, \ldots, l-1$ entstehenden Kongruenzen miteinander multiplizieren. Da hierbei sag^ν ein Vertretersystem $\mathfrak{V}$ durchläuft, ergibt sich

$$(3.18) \qquad \frac{q-1}{2}! \equiv \vartheta_s^l\, a^{(q-1)/2}\, g^{\frac{1}{2}l(l-1)(q-1)/4l} \prod_{\nu=0}^{l-1} \varrho(s, ag^\nu) \bmod q.$$

Andrerseits hat man

$$(3.19)\quad \begin{cases} \vartheta_s^2 \equiv (-1)^{(q-1)/2l} \prod_h^{(s)} h(q-h) = (-1)^{(q-1)/2l} \prod_{j=1}^{p-1}{}^{(s)} j \equiv (-s^2)^{(q-1)/2l} \prod_{j=1}^{q-1}{}^{(1)} j \\ \quad \equiv (-s^2)^{(q-1)/2l} g^{((q-1)/l-1)(q-1)/2} \equiv (-1)^{(q-1)/2l-1} s^{(q-1)/l} \bmod q \end{cases}$$

und $\sum_{t\in\mathfrak{B}} e_t = \frac{1}{8}(q^2-1)$, daher

$$(3.20)\qquad \prod_{t\in\mathfrak{B}} (-1)^{e_{st}-e_{0t}} = \left(\frac{2}{q}\right)(-1)^{l e_s}.$$

Wir trennen jetzt die Fälle $l \equiv 0$ und $l \equiv 1 \bmod 2$.

a) $l \equiv 0 \bmod 2$. Dann ist $q \equiv 1 \bmod 4$ und $\left(\frac{q-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \bmod q$, also

$$g^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \pm \frac{q-1}{2}!, \quad g^{l(l-1)(q-1)/4l} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}l}\left(\mp \frac{q-1}{2}!\right) \bmod q$$

und nach (3.19, 20)

$$\vartheta_s^l \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(q-1)+\frac{1}{2}l} s^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}l} s^{\frac{1}{2}(q-1)} \prod_{t\in\mathfrak{B}} (-1)^{e_{st}-e_{0t}},$$

also nach (3.18)

$$(3.21)\qquad \prod_{\nu=0}^{l-1} \eta_s(a g^\nu) \equiv \mp (a s)^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \frac{q-1}{2}! \left(\frac{s a}{q}\right) g^{\frac{1}{4}(q-1)} \bmod q.$$

Im Falle $l = 2$ wird die linke Seite nach (3.15) gleich $\eta_{s\,a}(g)$; daher ist (3.21) in (3.10) enthalten ($l = 2$). Die genannte Produktrelation ergibt sich aus (3.21) für $s = 1$ mit den $a g^\nu$ als speziellen Vertretern eines Systems $\mathfrak{B}$.

b) $l \equiv 1 \bmod 2$. Man erhält in ähnlicher Weise, wenn man $\vartheta_s^{l-1} \bmod q$ nach (3.19) umformt:

$$(3.22)\qquad \prod_{\nu=0}^{l-1} \eta_s(a g^\nu) \equiv -\frac{q-1}{2}!\ (-1)^{(l+1)(q-1)/4}\left(\frac{2a}{q}\right) s^{(l-1)(q-1)/2l} (-1)^{e_s} \vartheta_s \bmod q.$$

Hier ist es zweckmäßig, nach (3.19) die Größen $\sigma(s)$ durch

$$\vartheta_s \equiv \left\{ \begin{matrix} \frac{q-1}{2}!\ s^{(q-1)/2l} \sigma(s) \bmod q & \text{für } q \equiv 1 \bmod 4 \\ s^{(q-1)/2l} \sigma(s) \bmod q & \text{für } q \equiv 3 \bmod 4 \end{matrix} \right\}, \quad \sigma^2(s) = 1$$

einzuführen. Andrerseits ist $(-1)^{e_s}\vartheta_s = \prod_h^{(s)} (-1)^h h$ das Produkt eines vollen Halbsystems gerader Reste aus der Nebenklasse $s\mathfrak{P}$ und daher

$$(-1)^{e_s}\vartheta_s \equiv 2^{(q-1)/2l}\vartheta(s/2) \bmod q,$$

wo $s/2$ in der Restklassengruppe $\mathfrak{R}$ zu bilden ist. Somit ergibt sich schließlich

$$(3.23)\quad \begin{cases} \prod_{\nu=0}^{l-1} \eta_s(a g^\nu) = \left(\frac{a\, s/2}{q}\right) \sigma(s/2) \quad \text{für} \quad q \equiv 1 \bmod 4, \\ \prod_{\nu=0}^{l-1} \eta_s(a g^\nu) \equiv \frac{q-1}{2}!\, (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)} \left(\frac{a\, s/2}{q}\right) \sigma(s/2) \bmod q \quad \text{für} \quad q \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

§ 4. *Reihendarstellung und asymptotisches Verhalten der* $\pi_n(\mathfrak{k})$

Im folgenden rechnen wir in der üblichen Weise mit *für q ganzen* Zahlen mod q; bei entsprechender Definition der Restklassen seien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}$ wie in § 1 erklärt, und es werde dann wieder die Schreibweise (1.2) angewendet. Ist das Vertretersystem $\mathfrak{V}$ und sind die ganzen Zahlen $k_s \geq 0$ ($s \in \mathfrak{V}$) gemäß § 1 gegeben, so bestimmen wir, wenn r für q ganz und nicht durch q teilbar ist, k_r durch (1.3). Entsprechend sind e_r, e'_r, β_r, ω_r, $\varrho(r, t)$, $\eta_r(t)$, $S_{1,r}$, $S_{2,r}$ aufzufassen. Ist hier auch t für q ganz, $t \equiv t_0 \not\equiv 0 \bmod q$, t_0 ganz, so sei $\varrho(r, t) = \varrho(r, t_0)$, $\eta_r(t) = \eta_r(t_0)$. Die Reihenfolge der Komponenten k_s des Vektors $\mathfrak{k}$ kann durch eine Numerierung der s in $\mathfrak{V}$ festgelegt werden. Der Vektor, dessen dem Vertreter s von $\mathfrak{V}$ zugeordnete Komponente an Stelle von k_s den Wert $k_{sr^{-1}}$ hat, wird mit $\mathfrak{k}(r)$ bezeichnet. Die Komponentensumme $k = \sum_{s \in \mathfrak{V}} k_s$ von $\mathfrak{k}$ sei stets > 0.

Wir setzen [vgl. (1.5), (3.1, 3, 5)]

$$(4.1)\quad \begin{cases} \beta(\mathfrak{k}) = \sum_{s \in \mathfrak{V}} k_s \beta_s = \sum_h k_h g_2\left(\frac{h}{q}\right), \\ \eta(t, -\mathfrak{k}) = \prod_{s \in \mathfrak{V}} \eta_s^{-k_s}(t), \qquad \omega(-\mathfrak{k}) = \prod_{s \in \mathfrak{V}} \omega_s^{-k_s} \end{cases}$$

und bilden die Funktionen [vgl. (1.7), (3.5)]

$$(4.2)\quad \begin{cases} P(\tau, -\mathfrak{k}) = \prod_{s \in \mathfrak{V}} P_s^{-k_s}(\tau) = \prod_{\substack{m=1 \\ (m,q)=1}}^{\infty} (1 - u_q^m)^{-k_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k})\, u_q^n, \\ P^*(\tau, -\mathfrak{k}) = \prod_{s \in \mathfrak{V}} P_s^{*-k_s}(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\substack{j \bmod q \\ (j,q)=1}} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m)^{-k_j}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $\pi_n^*(\mathfrak{k})$ in der Reihenentwicklung dieser zweiten Funktion

$$P^*(\tau, -\mathfrak{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{k})\, u_1^n$$

sind ganze algebraische Zahlen des Körpers K. Der Zusammenhang der Produkte (4.2) mit Modulfunktionen wird durch [vgl. (3.7)]

$$(4.3)\qquad R(\tau, -\mathfrak{k}) = \prod_{s \in \mathfrak{V}} R_s^{-k_s}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k})\, u_q^{n - \frac{1}{2} q \beta(\mathfrak{k})}$$

hergestellt. Mit den Werten $v(L)$ aus Satz 2 und

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \psi_{1,t}(\mathfrak{k}) = \lambda^{-k(q-1)/l}(S_{1,t})\,\eta(t,-\mathfrak{k}) \\ \psi_{2,t}(\mathfrak{k}) = \lambda^{-k(q-1)/l}(-TS_{2,t})\,\eta(t^{-1},-\mathfrak{k}) \end{cases} \qquad (t \text{ für } q \text{ ganz, } (t,q)=1)$$

gilt nach Satz 5 und (3.8)

$$(4.5)\qquad \begin{cases} R(L\tau,-\mathfrak{k}) = v^{-k}(L)\,R(\tau,-\mathfrak{k}) \qquad (L\in\Gamma^*) \\ R(S_{1,t}\tau,-\mathfrak{k}) = \psi_{1,t}(\mathfrak{k})R\big(\tau,-\mathfrak{k}(t)\big) = \psi_{1,t}(\mathfrak{k})\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\big(\mathfrak{k}(t)\big)\,u_q^{n-\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k}(t))} \\ R(S_{2,t}\tau,-\mathfrak{k}) = \psi_{2,t}(\mathfrak{k})\,\omega\big(-\mathfrak{k}(t^{-1})\big)\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n^*\big(\mathfrak{k}(t^{-1})\big)\,u_1^{n-k(q-1)/24l} \end{cases}$$

Dabei hat u_N^{ϱ} für reelle N, ϱ mit $N>0$ die Bedeutung $\exp 2\pi i\frac{\varrho\tau}{N}$, und es ist

$$(4.6)\qquad \psi_{1,t}(\mathfrak{k}) = \psi_{2,t}(\mathfrak{k}) = 1 \qquad \text{für } t\in\mathfrak{P}.$$

Nunmehr lassen sich die Sätze 1, 2 aus (PII) auf die Funktion $R(\tau,-\mathfrak{k})$ anwenden; man findet

Satz 6 (Reihendarstellung der $\pi_n(\mathfrak{k})$). *Wenn $n>0$ und $>\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k})$ ist, gilt*

$$(4.7)\qquad \pi_n(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2n-q\beta(\mathfrak{k})}\sum_{s\in\mathfrak{P}}\big(\mathfrak{S}_n^{(1,s)}(\mathfrak{k})+\mathfrak{S}_n^{(2,s)}(\mathfrak{k})\big).$$

Hier bedeuten $\mathfrak{S}_n^{(1,s)}$, $\mathfrak{S}_n^{(2,s)}$ die linearen Komposita

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_n^{(1,s)}(\mathfrak{k}) = \psi_{1,s}(\mathfrak{k})\sum\limits_{0\le m<\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k}(s))}\pi_m\big(\mathfrak{k}(s)\big)\,a_{n-\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k})}\big(S_{1,s}^{-1},\mathfrak{R},\tfrac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k}(s))-m\big), \\ \mathfrak{S}_n^{(2,s)}(\mathfrak{k}) = \\ = \psi_{2,s}(\mathfrak{k})\,\omega\big(-\mathfrak{k}(s^{-1})\big)\sum\limits_{0\le m<k(q-1)/24l}\pi_m^*\big(\mathfrak{k}(s^{-1})\big)\,a_{n-\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k})}\big(S_{2,s}^{-1},\mathfrak{R},k(q-1)/24l-m\big) \end{cases}$$

der unendlichen Reihen

$$(4.9)\qquad \begin{cases} a_{n-\mu}\big(S_{1,s}^{-1},\mathfrak{R},\mu_{1,s}-m\big) = \\ \quad = \sum\limits_{m_1=1}^{\infty}W_{m_1}\big(n-\mu,S_{1,s}^{-1},\mathfrak{R},m-\mu_{1,s}\big)f_1\Big(\frac{4\pi}{m_1q}\sqrt{(n-\mu)(\mu_{1,s}-m)}\Big), \\ a_{n-\mu}\big(S_{2,s}^{-1},\mathfrak{R},\mu_{2,s}-m\big) = \\ \quad = \sum\limits_{\substack{m_1=1\\ m_1\in\mathfrak{P}}}^{\infty}W_{m_1}\big(n-\mu,S_{2,s}^{-1},\mathfrak{R},m-\mu_{2,s}\big)f_1\Big(\frac{4\pi}{m_1\sqrt{q}}\sqrt{(n-\mu)(\mu_{2,s}-m)}\Big). \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ *symbolisiert die Formenklasse* $\{\Gamma^*, -2, v\}$, *die willkürlichen Werte* $v\left(S_{1,s}^{-1}\right)$. $v\left(S_{2,s}^{-1}\right)$ $(s \notin \mathfrak{B})$ *wurden* $=1$ *gesetzt,* $\mu, \mu_{1,s}, \mu_{2,s}$ *stehen zur Abkürzung für*

$$\mu = \tfrac{1}{2} q \beta(\mathfrak{k}) = \mu_{1,1}, \quad \mu_{1,s} = \tfrac{1}{2} q \beta(\mathfrak{k}(s)), \quad \mu_{2,s} = k(q-1)/24l, \tag{4.10}$$

und in den Ausdrücken für $a_{n-\mu}$ *ist sowohl* $n-\mu$, *als auch* $\mu_{1,s}-m$, *als auch* $\mu_{2,s}-m$ *positiv; die Erklärung durch* BESSELsche *Funktionen und eine asymptotische Eigenschaft von* f_1 *besagen*

$$f_1(z) = z I_1(z), \; f_1(2\pi u) \sim \sqrt{u}\, e^{2\pi u}\left(1 + O(u^{-1})\right) \quad (u > 0, \; u \to +\infty). \tag{4.11}$$

Von den oben definierten Aggregaten $\mathfrak{S}_n^{(1,s)}$ $(s \in \mathfrak{B})$ ist mindestens eines leer. Denn da die Ordnungensumme der Funktion $R(\tau, -\mathfrak{k})$ nach Satz 5 verschwindet, gilt nach (4.5)

$$-\frac{1}{2} q \sum_{t \in \mathfrak{B}} \beta(\mathfrak{k}(t)) - \frac{k(q-1)}{24} = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{t \in \mathfrak{B}} \beta(\mathfrak{k}(t)) = -\frac{k(q-1)}{12q},$$

was man elementar bestätigen kann; es sind also nicht alle $\beta(\mathfrak{k}(s)) > 0$ $(s \in \mathfrak{B})$.

Um aus der Reihendarstellung von Satz 5 eine *asymptotische Entwicklung* für die $\pi_n(\mathfrak{k})$ $(n \to \infty)$ abzuleiten, hat man ein geeignetes endliches Teilsystem der Reihenglieder — unter Berücksichtigung insbesondere der Werte π_m^* und W_{m_1} — nach der Stärke des Anwachsens zu ordnen und zu zeigen, daß das Aggregat der restlichen Glieder schwächer anwächst, als alle Glieder des Systems. Wegen (PII) Satz 1 und (4.11) kann man sich darauf beschränken, die Größenordnungen der einzelnen Glieder zu vergleichen. Wir beweisen in dieser Richtung vier Sätze. Der erste besteht in der Bestimmung des am stärksten anwachsenden Gliedes der Darstellung. Der zweite folgt aus dem ersten und gibt eine schwächere asymptotische Formel in elementaren Ausdrücken. Diese beiden Sätze gelten allgemein, und zwar sogar für die umfassenden Partitionenfunktionen p_n aus (PI). Der dritte und vierte Satz hingegen gelten bei gegebenem l nur für die q oberhalb gewisser Grenzen. Sie besagen, daß gewisse mit $m_1 = 1$ bzw. mit $m_1 = 1$ und $m_1 = 2$ gebildete Glieder des betreffenden Aggregats $\mathfrak{S}^{(2,s)}$ alle anderen asymptotisch überwiegen.

Das Verfahren, das man zum Beweis solcher Sätze, insbesondere des dritten und vierten, anwenden muß, wurde in (PII) § 4 ausführlich erläutert, so daß wir uns hier kurz fassen können. Man hat zunächst unter den Voraussetzungen von Satz 5

$$W_1(n-\mu, S_{2,1}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{2,1} - m) = 1 \tag{4.12}$$

und in grober Annäherung

$$\begin{cases} \mu_{2,1} - \dfrac{1}{q}\mu_{1,s} = k\dfrac{q-1}{24l} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_h k_{hs^{-1}}\left(\frac{h^2}{q^2} - \frac{h}{q} + \frac{1}{6}\right) \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_h k_{hs^{-1}}\left(\frac{h}{q} - \frac{h^2}{q^2}\right) > k\frac{q-1}{16l^2}\left(1 - \frac{1}{3l}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Daraus folgt

Satz 7. *Mit* $\varrho_1 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{6l}\left(1-\frac{1}{q}\right)}$ *gilt für* $n \to \infty$

$$\pi_n(\mathfrak{k}) = \frac{\omega(-\mathfrak{k})}{2n-2\mu} f_1\left(\varrho_1\sqrt{n-\mu}\right) + O\left(n^{-1} f_1\left(\varrho_1'\sqrt{n-\mu}\right)\right); \tag{4.14}$$

hier bezeichnet ϱ_1' *eine von* n *unabhängige Zahl mit* $0 < \varrho_1' < \varrho_1$. *Ist sowohl* $\frac{k(q-1)}{32l}$ *als auch die untere Schranke in* (4.13) *mindestens* 1, *so kann*

$$\varrho_1' = 2\pi\sqrt{\frac{k}{6l}\left(1-\frac{1}{q}\right)-\frac{4}{q}} = \varrho_1\sqrt{1-\frac{24l}{k(q-1)}}$$

gesetzt werden.

(4.14) entsteht aus (PI) (10.7) durch Spezialisierung auf das vorliegende Problem. Benutzt man die asymptotische Formel

$$f_1(z) = e^z\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\left(1-\frac{3}{2^3 z}-\frac{15}{2^7 z^2}-\frac{105}{2^{10} z^3}+O\left(z^{-4}\right)\right) \quad (z>0,\ z\to\infty),$$

so erhält man

Satz 8. *Es gilt*

$$\pi_n(\mathfrak{k}) = \frac{\omega(-\mathfrak{k})}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{\varrho_1}\, n^{-\frac{3}{4}} e^{\varrho_1\sqrt{n}}\left(1+c_1 n^{-\frac{1}{2}}+c_2 n^{-1}+c_3 n^{-\frac{3}{2}}+O\left(n^{-2}\right)\right)$$

mit den Werten $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + a_1 b_1 + b_2$, $c_3 = a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3$, *wo*

$$a_1 = -\frac{1}{2}\varrho_1\mu, \quad a_2 = \frac{1}{8}\varrho_1^2\mu^2, \quad a_3 = -\frac{1}{48}\varrho_1^3\mu^3 - \frac{1}{8}\varrho_1\mu^2,$$

$$b_1 = -\frac{3}{2^3\varrho_1}, \quad b_2 = \frac{3}{4}\mu - \frac{15}{2^7\varrho_1^2}, \quad b_3 = -\frac{21}{32\varrho_1}\mu - \frac{105}{2^{10}\varrho_1^3}.$$

Satz 8 gilt wörtlich für die Partitionenanzahlen $p_n([k],[l],N)$ aus (PI) Satz 14 an Stelle von $\pi_n(\mathfrak{k})$, wenn in der obigen Formel $\omega(-\mathfrak{k})$, μ durch die analog definierten Zahlen ω_0 bzw. $-\frac{1}{2}N\beta$ aus (PI) Satz 14 ersetzt werden. Daß, wie dort behauptet, die Fehlerabschätzung in (PI) (10.9) nicht verschärfbar ist, besagt nach Satz 8 genau, daß c_1 nicht verschwindet. Da μ und K rationale Zahlen sind, bedeutet dies die Irrationalität von π^2.

Um die anderen beiden Sätze zu beweisen, bedarf man einer schärferen Abschätzung der $\beta(\mathfrak{k}(s))$ nach oben, als sie (4.13) liefert. Es bedeute χ einen der l Restcharaktere mod q, die auf der Gruppe $\mathfrak{P}$ zu 1 werden. Wir bilden, indem wir uns einer bekannten analytischen Identität sowie bekannter Umformungen und Bezeichnungen bedienen:

$$B(\chi) = \sum_{s\in\mathfrak{P}}\chi(s)\beta_s = \sum_h \chi(h)\, g_2\left(\frac{h}{q}\right)$$

$$= \sum_h \chi(h)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi m\frac{h}{q}}{\pi^2 m^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^2 m^2}\sum_{j \bmod q}\chi(j)\,\xi_q^{2mj}.$$

Im Falle des Hauptcharakters $\chi=\chi_0$ ist $B(\chi)=-\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{q}\right)$. Im Falle $\chi\neq\chi_0$ ist

$$\sum_{j \bmod q}\chi(j)\,\xi_q^{2mj}=\overline{\chi}(m)\,G(\chi) \quad \text{mit} \quad G(\chi)=\sum_{j \bmod q}\chi(j)\,\xi_q^{2j},$$

also

$$B(\chi)=\frac{1}{2\pi^2}\,G(\chi)\,L(2,\overline{\chi}),$$

und daher

$$|B(\chi)|<\frac{1}{12}\sqrt{q}\left(1-\frac{1}{q^2}\right) \qquad (\chi\neq\chi_0),$$

mithin wegen $l\beta_s=\sum_{\chi}\overline{\chi}(s)\,B(\chi)$ insgesamt

$$|\beta_s|<\frac{1}{12l}\left(1-\frac{1}{q}\right)\left\{\sqrt{q}\left(1+\frac{1}{q}\right)(l-1)+1\right\},$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\beta(\mathfrak{k}(s))\right|<\frac{k(q-1)}{24lq}\left\{\sqrt{q}\left(1+\frac{1}{q}\right)(l-1)+1\right\}. \tag{4.15}$$

Es sind jetzt hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß

$$\max_{s\in\mathfrak{B}}\frac{1}{2}\,\beta(\mathfrak{k}(s))<\frac{1}{4}\mu_{2,1} \quad \text{bzw.} \quad <\frac{1}{9}\mu_{2,1} \tag{4.16}$$

zutrifft. Mit $n_0=2$ bzw. 3 ist eine solche hinreichende Bedingung nach (4.10, 15):

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)(l-1)+\frac{1}{\sqrt{q}}\leq\frac{1}{n_0^2}\sqrt{q}. \tag{4.17}$$

Ersetzt man hier $\sqrt{q}$ durch eine positive Variable x, so stellt die linke Seite eine monoton fallende, die rechte Seite eine monoton steigende Funktion von x dar. Es genügt also, ein $x>0$ anzugeben, das die Ungleichung erfüllt. Man setze $x=n_0^2(l-1)\,y$. Dann handelt es sich um

$$1+\frac{1}{n_0^4(l-1)^2y^2}+\frac{1}{n_0^2(l-1)^2y}\leq y, \tag{4.18}$$

und (4.18) gilt für $y=1+\left(n_0^2(l-1)\right)^{-1}$. Denn es ist $n_0^2(l-1)\,y-1=n_0^2(l-1)$, demnach

$$y=1+\frac{1}{n_0^2(l-1)\,y}\left(1-\frac{1}{n_0^2(l-1)\,y}\right)^{-1}>1+\frac{1}{n_0^2(l-1)\,y}+\frac{1}{n_0^4(l-1)^2y^2},$$

und dies ist in der Tat größer als die linke Seite von (4.18). Daher gilt (4.17), wenn

$$q\geq(4l-3)^2 \quad (n_0=2) \quad \text{und} \quad q\geq(9l-8)^2 \quad (n_0=3).$$

und nun ergibt sich

Satz 9. *Aus* $q \geq (4l-3)^2$ *folgt* (4.17) *mit* $n_0 = 2$ *und daraus folgt für* $n \to \infty$

$$\pi_n(\mathfrak{k}) = \frac{\omega(-\mathfrak{k})}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k\frac{q-1}{32l}} \pi_m^*(\mathfrak{k})\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{24l} - m\right)(n-\mu)}\right) +$$

$$+ O\left(n^{-1} f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k\frac{q-1}{96l}(n-\mu)}\right)\right).$$

Um eine noch genauere explizite asymptotische Darstellung zu gewinnen, muß man die Werte $W_2(n-\mu, S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{K}, \mu_{2,s} - m)$ für $2 \in s\mathfrak{P}$ ausrechnen. Die umständliche Rechnung ergibt, wenn die ganzen Zahlen e_s^* $((s,q)=1)$, $e^*(\mathfrak{k})$ durch

$$2e_s^* = q e_s - e_s' = \sum_h^{(s)} h(q-h), \qquad e^*(\mathfrak{k}) = \sum_{s \in \mathfrak{B}} k_s e_s^*$$

erklärt werden:

$$\psi_{2,s}(\mathfrak{k})\, W_2(n-\mu, S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{K}, \mu_{2,s} - m) = \eta(2^{-1}, -\mathfrak{k})\,(-1)^{e^*(\mathfrak{k})+m+n}$$

Hier ist $s=2$ zu setzen, wenn $2 \notin \mathfrak{P}$. Damit findet sich

Satz 10. *Aus* $q \geq (9l-8)^2$ *folgt* (4.17) *mit* $n_0 = 3$ *und daraus für* $n \to \infty$

$$\pi_n(\mathfrak{k}) = \frac{\omega(-\mathfrak{k})}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k\frac{q-1}{27l}} \pi_m^*(\mathfrak{k})\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{24l} - m\right)(n-\mu)}\right) +$$

$$+ (-1)^{e^*(\mathfrak{k})+n} \eta(2^{-1}, -\mathfrak{k}) \frac{\omega(-\mathfrak{k}(2^{-1}))}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k\frac{q-1}{43,2l}} (-1)^m \pi_m^*(-\mathfrak{k}(2^{-1})) \times$$

$$\times f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{96l} - \frac{m}{4}\right)(n-\mu)}\right) + O\left(n^{-1} f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k\frac{q-1}{216l}(n-\mu)}\right)\right).$$

Das Beispiel $l=2$ [vgl. (PII) § 4, Tabelle 5] läßt vermuten, daß die in Satz 9 und 10 genannten unteren Schranken $(4l-3)^2$ bzw. $(9l-8)^2$ für q in numerischen Fällen, etwa für $l=3$ und 4, noch beträchtlich erniedrigt werden können.

§ 5. *Asymptotische Relationen. Konstantenbestimmung*

Wir betrachten zunächst das asymptotische Verhalten des Quotienten $\frac{\pi_n(\mathfrak{k}^*)}{\pi_n(\mathfrak{k})}$ für $n \to \infty$; dabei wird angenommen, daß $\pi_n(\mathfrak{k})$ und $\pi_n(\mathfrak{k}^*)$ mit den gleichen Parametern l, q, aber mit verschiedenen Vektoren $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}^*$ gebildet sind. Aus Satz 8 folgt sofort, daß der obige Quotient für $n \to \infty$ einem positiven

Grenzwert zustrebt, wenn (die k entsprechende natürliche Zahl) k^* mit k übereinstimmt. Genauer ergibt sich aus Satz 8 der folgende

Satz 11. *Bildet man die Partitionenanzahlen $\pi_n(\mathfrak{k})$, $\pi_n(\mathfrak{k}^*)$ mit den gleichen Parametern l, q, so gilt unter der Voraussetzung $k^* = k$ und in der Bezeichnung $\mu^* = \frac{1}{2} q\, \beta(\mathfrak{k}^*)$:*

$$\frac{\pi_n(\mathfrak{k}^*)}{\pi_n(\mathfrak{k})} = \frac{\omega(-\mathfrak{k}^*)}{\omega(-\mathfrak{k})}\left(1 + \delta_1 n^{-\frac{1}{2}} + \delta_2 n^{-1} + \delta_3 n^{-\frac{3}{2}} + O\left(n^{-2}\right)\right) \quad (n \to \infty);$$

hier ist

$$\delta_1 = -\tfrac{1}{2}\varrho_1(\mu^* - \mu), \quad \delta_2 = \tfrac{1}{8}\varrho_1^2(\mu^* - \mu)^2 + \tfrac{3}{4}(\mu^* - \mu),$$

$$\delta_3 = -\tfrac{1}{48}\varrho_1^3(\mu^* - \mu)^3 - \tfrac{1}{4}\varrho_1(\mu^* - \mu)(2\mu^* - \mu) - \tfrac{3}{16}\varrho_1^{-1}(\mu^* - \mu).$$

Auch dieser Satz besteht bei sinngemäßer Übertragung der Bezeichnung wörtlich für die allgemeinen Partitionenfunktionen von (PI) Satz 14, vgl. auch den in der Einleitung von (PII) genannten Satz hierüber; für η, η^* ist jetzt $-\mu$, $-\mu^*$ zu schreiben. Im folgenden beschränken wir uns auf die Situation des Satzes 11, die wir noch weiter spezialisieren werden; die obige asymptotische Formel verwenden wir nur mit dem Fehlerglied $O(n^{-1})$.

Wir denken uns einen Vektor $\mathfrak{k}$ gemäß § 1 fest gewählt und betrachten nun die sämtlichen l arithmetischen Funktionen $\pi_n(\mathfrak{k}(s))$ $(s \in \mathfrak{V})$ von n gleichzeitig; von hier ab wird wieder die Terminologie, wie sie zu Beginn des § 4 erklärt wurde, benutzt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \pi_n[s] = \pi_n(\mathfrak{k}(s)), \quad \omega[s] = \omega(-\mathfrak{k}(s)), \quad \beta[s] = \beta(\mathfrak{k}(s)); \\ z_n = \dfrac{q\varrho_1}{4\sqrt{n}}, \quad u[s] = \log \omega[s] - z_n \beta[s]; \end{cases}$$

die Logarithmen positiver Zahlen sind reell, die Quadratwurzeln positiv zu wählen. Aus Satz 11 folgt zunächst

$$(5.2) \qquad \log \frac{\pi_n[s\,t^{-1}]}{\pi_n[s]} = u[s\,t^{-1}] - u[s] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (s, t \in \mathfrak{V},\ n \to \infty).$$

Unter den Zahlen s des Vertretersystems $\mathfrak{V}$ befinde sich $s = 1$ als Vertreter der Hauptklasse $\mathfrak{P}$; wir zeichnen irgendeine Anordnung von $\mathfrak{V}$, in der $s = 1$ an erster Stelle steht, aus. Entspricht jedem Paar von Elementen s, t von $\mathfrak{V}$ eine komplexe Zahl $w_{s,t}$, so bilden wir die Matrix $(w_{s,t})$ mit s als Zeilen-, t als Spaltenindex in der gleichen fest gewählten Reihenfolge. Wird die Matrix mit den Elementen $w_{s,t}$ unter Ausschluß von $s = 1$ und von $t = 1$ in dieser Weise gebildet, so bezeichnen wir sie mit $(w_{s,t})_*$. Entsprechend werde mit Determinanten verfahren. In diesem Sinne ist nach (5.2) für $n \to \infty$

$$(5.3) \qquad \left|\log \frac{\pi_n[s\,t^{-1}]}{\pi_n[s]}\right|_* = \left|\log \frac{\pi_n[s\,t^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]}\right|_* = \left|u[s\,t^{-1}] - u[s]\right|_* + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zur *Vereinfachung* der Determinante auf der rechten Seite bedienen wir uns des folgenden leicht beweisbaren Hilfssatzes: Sind a_{jk}, b_{jk} $(j,k=1,2,\ldots,m)$ komplexe Zahlen derart, daß

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jk} = a \neq 0, \quad a \text{ von } k \text{ unabhängig}, \quad \sum_{j=1}^{m} b_{jk} = 0,$$

so gilt in der zu der obigen analogen Bezeichnung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m} a_{j\nu} b_{\nu k}\right|_* = |a_{jk} - a_{j1}|_* |b_{jk}|_* = \frac{1}{a} |a_{jk}| |b_{jk}|_*. \tag{5.4}$$

Es sei [vgl. (1.5), (3.5), (5.1); eine Verwechslung mit (1.6) u_m ist nicht zu befürchten]

$$u_r = -\log \omega_r - z_n \beta_r \qquad (r \in \mathfrak{B}). \tag{5.5}$$

Wir wenden den Hilfssatz auf $k_{s^{-1}t} = a_{jk}$, $u_{st^{-1}} - u_s = b_{jk}$ $(l=m)$ an und erhalten

$$|u[st^{-1}] - u[s]|_* = \frac{D}{k} |u_{st^{-1}} - u_s|_* \qquad (D = |k_{\mathfrak{B}^{-1}}|);$$

nach (5.3) wird also mit diesem Werte D:

$$\left|\log \frac{\pi_n[st^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]}\right|_* = \frac{D}{k} |u_{st^{-1}} - u_{t^{-1}}|_* + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty). \tag{5.6}$$

Hier erscheint auf der linken Seite das genaue *Analogon* des Regulators des Systems

$$Q_n[s] = \frac{\pi_n[s]}{\pi_n[1]} = \frac{\pi_n(\mathfrak{k}(s))}{\pi_n(\mathfrak{k})} \qquad (s \in \mathfrak{B}), \tag{5.7}$$

bezogen auf den bei (3.5) eingeführten reellen absolut-abelschen Zahlkörper K zum Führer q. Wir setzen

$$R(Q_n[s]) = \left|\log \frac{\pi_n[st^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]}\right|_* \tag{5.8}$$

und nennen diese arithmetische Funktion von n kurz den *Regulator der Anzahlquotienten* $Q_n[s]$. Im folgenden beschreiben wir zwei Verfahren zur asymptotischen Auswertung des Regulators (5.8) mit einem Fehler von der Größenordnung $O(n^{-1})$. Ersichtlich kommt es darauf an, die Determinante $|u_{st^{-1}} - u_{t^{-1}}|_*$, die nach (5.5) von n abhängt, in diesem Sinne auszuwerten.

Das *erste* Verfahren schließt sich an die in HASSE [3] II. 11. mitgeteilte Umformung an. Danach ist, wenn die oben in § 4 eingeführten Charaktere χ herangezogen werden,

$$|u_{st^{-1}} - u_{t^{-1}}|_* = \prod_{\chi \neq 1} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s)\, u_s,$$

und eine bekannte Methode, die auch in § 4 zum Beweise der Sätze 9 und 10 angewendet wurde, liefert nun

$$\sum_{s\in\mathfrak{P}}\chi(s)\,u_s=\frac{1}{2}\,G(\chi)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\left(1-\frac{z_n}{\pi^2 m}\right).$$

Das über die $\chi\neq 1$ zu erstreckende Produkt der GAUSSschen Summen $G(\chi)$ hat für ungerades l offenbar den Wert $q^{\frac{1}{2}(l-1)}$, weil dann alle Charaktere $\chi\neq 1$ paarweise konjugiert-komplex sind. Für gerades l existiert neben den $\frac{1}{2}(l-2)$ Paaren konjugiert-komplexer Charaktere noch genau ein quadratischer Charakter $\chi(m)=\left(\frac{m}{q}\right)$. Daher gilt in beiden Fällen

$$\prod_{\chi\neq 1}\frac{1}{2}\,G(\chi)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{q}\right)^{l-1}=2^{1-l}\sqrt{d},$$

wo d die Diskriminante von K bezeichnet (vgl. HASSE [3] I. 3. nach HECKE [4]).

So entsteht

$$|u_{st^{-1}}-u_{t^{-1}}|_*=2^{1-l}\sqrt{d}\prod_{\chi\neq 1}\left(L(1,\chi)-\frac{z_n}{\pi^2}L(2,\chi)\right)$$

und mithin nach (5.6) und HASSE [3] I. 2. (4) der folgende

Satz 12. *Der (in bezug auf den reellen absolut-abelschen Zahlkörper* K *vom Grade* l*) gebildete Regulator* (5.8) $R(Q_n[s])$ *der Anzahlquotienten* (5.7) $Q_n[s]$ *gestattet die asymptotische Darstellung*

$$R(Q_n[s])=\frac{D}{k}\,hR\left(1+C_1 n^{-\frac{1}{2}}\right)+O(n^{-1})\qquad(n\to\infty).$$

Hier bezeichnet h *die Klassenzahl,* R *den Regulator von* K *und* C_1 *den Wert*

$$C_1=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{6l}\,q(q-1)}\sum_{\chi\neq 1}\frac{L(2,\chi)}{L(1,\chi)};\tag{5.9}$$

in der Summe durchläuft χ *alle vom Hauptcharakter verschiedenen Restcharaktere* mod q*, die auf der Gruppe* $\mathfrak{P}$ *der* l*-ten Potenzreste* mod q *zu* 1 *werden.*

Das *zweite* Verfahren geht von der Darstellung (5.5) aus. Wir setzen

$$\Omega_*=(\log\omega_{t^{-1}}-\log\omega_{st^{-1}})_*,\quad \mathsf{B}_*=(\beta_{t^{-1}}-\beta_{st^{-1}})_*\qquad(s,t\in\mathfrak{P},\ s\neq 1\neq t)\tag{5.10}$$

und erhalten mit $I_*=(\delta_{s,t})_*$ zunächst

$$|u_{st^{-1}}-u_{t^{-1}}|_*=|\Omega_*+z_n\mathsf{B}_*|=|\Omega_*|\,|I_*+z_n\Omega_*^{-1}\mathsf{B}_*|.$$

Nach HASSE [3] II. 11. (4) ist wieder $|\Omega_*|=hR$. Man findet also

$$R(Q_n[s])=\frac{D}{k}\,hR\,(1+z_n\,\mathrm{Sp}\,\Omega_*^{-1}\mathsf{B}_*)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

mithin für den Wert C_1 aus Satz 12 den neuen Ausdruck

$$C_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k}{6l}\,q(q-1)}\,\mathrm{Sp}(\Omega_*^{-1}\mathfrak{B}_*) \tag{5.11}$$

in dem Sp die Spurbildung andeutet. Der Vergleich von (5.9) mit (5.11) ergibt

$$\sum_{\chi\neq 1}\frac{L(2,\chi)}{L(1,\chi)} = -\pi^2\,\mathrm{Sp}(\Omega_*^{-1}\mathfrak{B}_*). \tag{5.12}$$

Die weiteren Überlegungen zielen, wie eingangs erwähnt, darauf ab, die Elemente der Matrizen (5.10) Ω_*, $\mathfrak{B}_*$, aus denen sich C_1 zusammensetzt, mit gewissen *Invarianten* des Körpers K in Beziehung zu bringen. Das über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzible Kreisteilungspolynom $f(u)$ der Ordnung q zerfällt in K in l irreduzible Faktoren $f_s(u)$ $(s\in\mathfrak{S})$ gemäß der Aufspaltung

$$f(u) = \prod_{\substack{k \bmod q\\ k\not\equiv 0(q)}}(u-\xi_q^{2k}) = \prod_{s\in\mathfrak{S}} f_s(u),\quad f_s(u) = \prod_{j \bmod q}^{(s)}(u-\xi_q^{2j}), \tag{5.13}$$

und man findet zunächst

$$f_s(1) = \prod_k^{(s)}(1-\xi_q^{2k})(1-\xi_q^{-2k}) = \prod_k^{(s)}(-1)(\xi_q^k-\xi_q^{-k})^2 = \omega_s^2, \tag{5.14}$$

also nach (5.13)

$$f(1) = q = \prod_{s\in\mathfrak{S}}\omega_s^2. \tag{5.15}$$

Auf Grund bekannter Schlüsse gewinnt man hieraus

Satz 13. *Die durch* (3.5) *erklärten l Zahlen ω_s^2 $(s\in\mathfrak{S})$ sind konjugierte positive ganze Zahlen des Zahlkörpers* K. *Die l Hauptideale (ω_s^2) stimmen miteinander und mit dem einzigen Primideal* $\mathfrak{q}$ *von* K *überein, das in q aufgeht; es gilt $(q)=\mathfrak{q}^l$.*

Aus diesem Satze folgt sofort, daß keines der ω_s eine algebraische Einheit, geschweige denn $=1$ ist. Man bestätigt elementar, daß die Quotienten zweier ω_s^2 sämtlich Einheiten in K sind. Darüber hinaus sind nach HASSE [3] II. 10. bereits die Quotienten zweier ω_s Einheiten in K.

Wir betrachten nun die $f_s(u)$ als Polynome in $u-1$ und schreiben (vgl. [5])

$$\begin{cases} f_s(u) = \sum\limits_{0\le m\le(q-1)/l}\lambda_m(s)\,(u-1)^m & (\lambda_0(s)=\omega_s^2),\\ \varrho_m(s) = \lambda_m(s)\,\omega_s^{-2} & (1\le m\le(q-1)/l); \end{cases} \tag{5.16}$$

wir gehen darauf aus, die Elemente der Matrix $\mathfrak{B}_*$ durch die $\varrho_\varkappa(s)$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzen wir $u=e^{2\pi i\tau}$,

$$\varphi_s(\tau) = f_s(e^{2\pi i\tau}) = \prod_k^{(s)}(e^{2\pi i\tau}-\xi_q^{2k})(e^{2\pi i\tau}-\xi_q^{-2k})$$

und wenden hierauf die in (5.14) angedeutete Umformung an. Dann ergibt sich

$$\varphi_s(\tau) = 2^{(q-1)/l} \exp 2\pi i \frac{q-1}{2l} \tau \prod_h^{(s)} \sin \pi \left(\frac{h}{q} - \tau\right) \sin \pi \left(\frac{h}{q} + \tau\right).$$

Wird diese Gleichung einmal logarithmisch und sodann nochmals differenziert, so kommt

$$\psi_s'(\tau) = \frac{\varphi_s'(\tau)}{\varphi_s(\tau)} = 2\pi i \frac{q-1}{2l} + \sum_h^{(s)} \left\{ -\pi \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{h}{q} - \tau\right) + \pi \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{h}{q} + \tau\right) \right\},$$

$$\psi_s''(\tau) = \frac{\varphi_s''(\tau)}{\varphi_s(\tau)} - \frac{\varphi_s'^2(\tau)}{\varphi_s^2(\tau)} = -\sum_h^{(s)} \left\{ \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \left(\frac{h}{q} - \tau\right)} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \left(\frac{h}{q} + \tau\right)} \right\}$$

$$= -q^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}^{(s)} \frac{1}{(q\tau + m)^2},$$

$$L(2, \chi) = \frac{-1}{2q^2} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) \psi_s''(0).$$

Andrerseits erhält man aus (5.16) und $\varphi_s(\tau) = f_s(u)$ durch eine geringe Rechnung

$$\varrho_1(s) = \frac{q-1}{2l}, \quad \varrho_2(s) = \frac{(q-1)(q-2l-1)}{8l^2} - \frac{1}{8\pi^2} \psi_s''(0)$$

und daraus unmittelbar

$$\frac{1}{4\pi^2} L(2, \chi) = q^{-2} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) \varrho_2(s) \qquad (\chi \neq 1). \tag{5.17}$$

Trägt man (5.17) in den Formalismus ein, der in § 4 nach Satz 8 kurz entwickelt wurde, so findet man

$$\beta_s = -\frac{q-1}{12lq} + \frac{1}{l} \sum_{\chi \neq 1} \chi(s) G(\bar{\chi}) \frac{1}{2\pi^2} L(2, \chi)$$

$$= -\frac{q-1}{12lq} + \frac{2}{lq^2} \sum_{v \in \mathfrak{B}} \left(\sum_{\chi \neq 1} \chi(sv) G(\bar{\chi}) \right) \varrho_2(v).$$

Für ganzes, zu q teilerfremdes t werde

$$\alpha(t) = \sum_{v \bmod q} \exp \left\{ 2\pi i \frac{t}{q} v^l \right\} \tag{5.18}$$

gesetzt; ist t für q ganz und nicht durch q teilbar, $t \equiv t_0 \bmod q$, t_0 ganz, so werde $\alpha(t)$ durch $\alpha(t) = \alpha(t_0)$ erklärt. Dann gilt, wie man leicht beweist,

$$\sum_{\chi \neq 1} \chi(t) G(\bar{\chi}) = \alpha(t) \qquad (t \text{ für } q \text{ ganz}, \ t \not\equiv 0 \bmod q),$$

und nun ergibt sich

$$\beta_{s^{-1}} - \beta_{s^{-1}t} = \frac{2}{lq^2} \sum_{v \in \mathfrak{B}} \alpha(s^{-1}v) \left(\varrho_2(v) - \varrho_2(vt^{-1})\right)$$

$$= \frac{2}{lq^2} \sum_{\substack{v \in \mathfrak{B} \\ v \neq 1}} \left(\alpha(s^{-1}v) - \alpha(s^{-1})\right) \left(\varrho_2(v) - \varrho_2(vt^{-1})\right).$$

Dies besagt

Satz 14. *Man definiere: Die Matrizen* Ω_*, B_* *durch* (1.5), (3.5), (5.10); *die algebraischen, in* K *enthaltenen Zahlen* $\varrho_m(s)$ $(m = 1, 2, \ldots; s \in \mathfrak{B})$ *durch* (5.13, 16); *die ganz-algebraischen, in* K *enthaltenen Zahlen* $\alpha(t)$ *durch* (5.18) *mit dem nachfolgenden Zusatz; die Matrizen* A_*, P_{2*} *durch*

$$\mathsf{A}_* = \left(\alpha(t^{-1}) - \alpha(st^{-1})\right)_*, \quad \mathsf{P}_{2*} = \left(\varrho_2(t) - \varrho_2(s^{-1}t)\right)_*,$$

wo $s, t \in \mathfrak{B}$, $s \neq 1 \neq t$ *und* $s =$ *Zeilen-*, $t =$ *Spaltenindex. Dann gilt*

$$\mathsf{B}_* = -\frac{2}{lq^2} \mathsf{P}_{2*} \mathsf{A}_*,$$

und die Konstante C_1 *aus Satz 12 hat den Wert*

$$C_1 = -\frac{\pi}{lq} \sqrt{\frac{h}{6l}\left(1 - \frac{1}{q}\right)}\, \mathrm{Sp}\left(\Omega_*^{-1} \mathsf{P}_{2*} \mathsf{A}_*\right). \tag{5.19}$$

Im Falle $l = 2$ folgt aus [5] (48) die formale Übereinstimmung der Relation (5.19) mit der entsprechenden in (PII) abgeleiteten Relation (PII) (5.8, 11), wenn diese mit den Werten $f^+ = f^- = 0$ gebildet wird; von analytisch bewiesenen Identitäten ist dabei lediglich die Klassenzahlformel $|\Omega_*| = hR$ anzuwenden.

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 27. Mai 1956)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 269—288 (1956)

Noethersche Gruppen

Von

Reinhold Baer

Unter einer Noetherschen Gruppe wollen wir eine Gruppe verstehen, von deren Untergruppen die Maximalbedingung [= Obergruppensatz] erfüllt wird; und diese Eigenschaft ist bekanntlich gleichwertig damit, daß alle Untergruppen endlich erzeugbar sind. Untergruppen und homomorphe Bilder Noetherscher Gruppen sind Noethersch; und Erweiterungen Noetherscher Gruppen durch Noethersche Gruppen sind ebenfalls Noethersch. Es folgt, daß alle endlich erzeugbaren abelschen Gruppen Noethersch sind. Andererseits gibt es bekanntlich einfachste Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen, deren abelsche Kommutatorgruppe nicht endlich erzeugbar ist. Es ist also von Interesse, Gruppenklassen anzugeben, in denen aus endlicher Erzeugbarkeit auf den Noetherschen Charakter geschlossen werden kann. Es ist das Ziel dieser Note, das folgende Kriterion dieser Art zu beweisen: Die Gruppe G ist Noethersch, wenn sie von endlich vielen Elementen erzeugt wird, und wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist. Wir werden diesen Satz durch Spezialisierung aus allgemeineren Betrachtungen gewinnen, die wohl auch unabhängiges Interesse besitzen. Andererseits werden wir in spezielleren Situationen, besonders für nilpotente Gruppen, die so erzielten Resultate wesentlich verschärfen.

Definition 1. *Die Gruppe G ist endlich definierbar, wenn es eine freie Gruppe F endlichen Ranges und einen von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugbaren Normalteiler R von F mit zu G isomorpher Faktorgruppe $F/R \simeq G$ gibt.*

Dieses ist weiter nichts als eine für unsere Zwecke bequeme Formulierung des Sachverhalts, daß G durch endlich viele Erzeugende und Relationen definiert werden kann. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß sie es unnötig macht, ein bestimmtes Erzeugendensystem mit einem zugehörigen Relationensystem zu paaren.

Die Klasse der endlich definierbaren Gruppen enthält so verschiedenartige Individuen wie die freien Gruppen endlichen Ranges und die endlichen Gruppen — die endlichen Gruppen sind endlich definierbar, da ja bekanntlich ein Normalteiler von endlichem Index in einer endlich erzeugbaren Gruppe selbst endlich erzeugbar ist. Da die freien Gruppen endlichen Ranges endlich definierbar sind, so ist es leicht, Beispiele zu konstruieren, die zeigen, daß Untergruppen und homomorphe Bilder endlich definierbarer Gruppen nicht endlich definierbar zu sein brauchen.

Für einige unserer Anwendungen reicht jedoch ein noch allgemeinerer Begriff aus.

Definition 2. *Die Faktorgruppe G/N [der Gruppe G nach ihrem Normalteiler N] ist bezüglich G endlich definierbar, wenn eine Untergruppe U von G mit folgenden Eigenschaften existiert:*

$G=NU$ und $N\cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Man überzeugt sich ohne Mühe, daß G/N sicher dann bezüglich G endlich definierbar ist, wenn G/N schlechthin endlich definierbar ist; vgl. unten Folgerung 1. Man bemerke, daß die Gruppe $H=H/1$ bezüglich H endlich definierbar ist.

Satz 1. *Ist die Faktorgruppe G/N bezüglich der endlich erzeugbaren Gruppe G endlich definierbar, so wird N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.*

Dieses Resultat ist eine leichte Erweiterung einer Bemerkung von PH. HALL [*1*; p. 421, (vi)].

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein endliches Erzeugendensystem E von G und eine Untergruppe U von G mit folgenden Eigenschaften:

$G=NU$ und $N\cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Es gibt also sicherlich endlich viele Klassen $K_1, \ldots, K_k$ in G konjugierter Elemente derart, daß

$$N\cap U\leq\{K_1,\ldots,K_k\}\leq N$$

ist. Weiter existiert zu jedem Element e in E ein Element e' in N derart, daß ee' zu U gehört. Es sei M der von den Klassen K_i und von den Klassen zu e' [für e aus E] in G konjugierter Elemente erzeugte Normalteiler von G. Da E und die Anzahl der Klassen K_i endlich sind, so wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt; und es folgt aus unserer Konstruktion sofort, daß $M\leq N$ ist. Ist e in E, so ist e' in M und ee' in U, so daß also e zu MU gehört. Folglich wird $MU=G$. Weiter ist $N\cap U\leq M$, da ja die Klassen K_i zu M gehören. Aus dem DEDEKINDschen Gesetz folgt schließlich:

$$N=M(N\cap U)=M;$$

und damit haben wir gezeigt, daß N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird.

Folgerung 1. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent.*

(a) *G ist endlich definierbar.*

(b) *Die Faktorgruppe H/N ist bezüglich H endlich definierbar, wenn $H/N\simeq G$ ist.*

(c) *Ist H endlich erzeugbar und $H/N\simeq G$, so wird N von endlich vielen Klassen in H konjugierter Elemente erzeugt.*

Beweis. Ist zunächst G endlich definierbar, so existiert eine freie Gruppe F und ein von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugbarer Normalteiler R von F mit zu G isomorpher Faktorgruppe F/R. Ist weiter N ein Normalteiler der Gruppe H mit zu G isomorpher Faktorgruppe H/N, so folgt aus der Freiheit von F und der Isomorphie $F/R \simeq H/N$ die Existenz eines Homomorphismus σ von F in H, der einen Isomorphismus von F/R auf H/N induziert. Daraus folgt insbesondere, daß

$$H = NF^{\sigma} \quad \text{und} \quad R^{\sigma} = N \cap F^{\sigma}$$

ist. Da aber R von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugt wird, so wird $R^{\sigma} = N \cap F^{\sigma}$ von endlich vielen Klassen in F^{σ} konjugierter Elemente erzeugt, d.h. H/N ist bezüglich H endlich definierbar. Damit ist gezeigt, daß (b) aus (a) folgt; und es ergibt sich aus Satz 1, daß (c) aus (b) folgt.

Schließlich werde (c) von G erfüllt. Da G endlich erzeugbar ist, so existiert eine freie Gruppe F endlichen Ranges mit zu G isomorpher Faktorgruppe F/R. Aus (c) folgt dann, daß R von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugt wird. Also ist G endlich definierbar, d.h. (a) folgt aus (c), q. e. d.

Bemerkung. Ist H/N endlich definierbar und U eine endlich erzeugbare, $H = NU$ erfüllende Untergruppe, so ist $U/(N \cap U) \simeq H/N$; und wir können aus Folgerung 1 erschließen, daß $N \cap U$ sich von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugen läßt. Wir haben nicht entscheiden können, ob es genügt, die schwächere Annahme zu machen, daß H/N bezüglich H endlich definierbar sei.

Lemma 1. *Ist N ein Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G derart, daß NU ein Normalteiler von G ist, dann existiert ein in N enthaltener, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugter Normalteiler M von G derart, daß MU ein Normalteiler von G ist.*

Beweis. Es sei E ein endliches Erzeugendensystem von G und F ein endliches Erzeugendensystem von U. Ist x irgendein Element in G, so ist

$$x^{-1} F x \leq x^{-1} N U x = N U,$$

da ja NU ein Normalteiler von G ist. Also gibt es zu jedem e in E und jedem f in F Elemente $(e,f)'$ und $(e,f)''$ in N derart, daß

$$e^{-1} f e (e,f)' \text{ und } e f e^{-1} (e,f)'' \text{ zu } U \text{ gehören.}$$

Es sei M der kleinste alle $(e,f)'$ und $(e,f)''$ [mit e in E und f in F] enthaltende Normalteiler von G. Da E und F endliche Mengen sind, so wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt; und $M \leq N$, da ja alle $(e,f)'$ und $(e,f)''$ zu N gehören.

Da $(e, f)'$ zu M und $e^{-1}fe(e, f)'$ zu U gehört, so ist $e^{-1}fe$ in MU enthalten und $e^{-1}Fe \leq MU$; ebenso folgt $eFe^{-1} \leq MU$. Also wird

$$e^{-1}MUe = M\{e^{-1}Fe\} \leq MU, \quad eMUe^{-1} = M\{eFe^{-1}\} \leq MU;$$

und hieraus folgt $e^{-1}MUe = MU$ für jedes e in dem Erzeugendensystem E von G. Also ist MU ein Normalteiler von G, q. e. d.

Satz 2. *Wenn G/N endlich definierbar bezüglich der endlich erzeugbaren Gruppe G ist, wenn M ein in N enthaltener Normalteiler von G ist, und wenn N/M endlich erzeugbar und bezüglich N endlich definierbar ist, dann wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.*

Beweis. Da G endlich erzeugbar und G/N bezüglich G endlich definierbar ist, so wird N wegen Satz 1 von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Da N/M bezüglich N endlich definierbar ist, so existiert eine Untergruppe U von N mit folgenden Eigenschaften:

$N = MU$ und $M \cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Es gibt also einen in M enthaltenen und $M \cap U$ enthaltenden Normalteiler K von G, der von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird.

Aus $U/(M \cap U) \simeq MU/M = N/M$ und der endlichen Erzeugbarkeit von N/M folgt die Existenz einer endlich erzeugbaren $U = (M \cap U)V$ erfüllenden Untergruppe V von G. Dann wird insbesondere

$$N = MU = M(M \cap U)V = MV.$$

Da G und V endlich erzeugbar und M und N Normalteiler von G sind, so folgt aus Lemma 1 die Existenz eines in M enthaltenen, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugten Normalteilers L von G derart, daß LV ein Normalteiler von G ist.

Nach Konstruktion ist KL ein in M enthaltener Normalteiler von G, der von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Mit LV ist auch KLV ein Normalteiler von G. Da $KL \leq M$ und $M \cap V \leq M \cap U \leq K$ ist, so wird

$$N = MV = M(KLV) \quad \text{und} \quad M \cap KLV = KL(M \cap V) = KL,$$

so daß also N/KL das direkte Produkt von M/KL und KLV/KL ist. Da aber N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird, so wird auch der direkte Faktor M/KL von endlich vielen Klassen in G/KL konjugierter Elemente erzeugt. Damit ist aber gezeigt, daß M selbst von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird, q. e. d.

Folgerung 2. *Erweiterungen endlich definierbarer Gruppen durch endlich definierbare Gruppen sind endlich definierbar.*

Dies ergibt sich leicht aus Folgerung 1 und Satz 2. Für eine direkte Herleitung siehe etwa PH. HALL [*1*; p. 426, Lemma 1].

Hauptsatz. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(a) *G ist* NOETHERsch.

(b) *G ist endlich erzeugbar; und zu jedem Normalteiler $X \neq G$ von G existiert ein $X < Y$ erfüllender Normalteiler Y von G mit bezüglich Y endlich definierbarer* NOETHERscher *Faktorgruppe Y/X.*

(c) *Es gibt eine den folgenden Bedingungen genügende Gruppe Γ von Automorphismen von G:*

(c') *Jeder Γ-zulässige Normalteiler X von G mit* NOETHERscher *Faktorgruppe G/X wird von endlich vielen Klassen Γ-konjugierter Elemente erzeugt.*

(c'') *Zu jedem Γ-zulässigen Normalteiler $X \neq G$ von G existiert ein $X < Y$ erfüllender, Γ-zulässiger Normalteiler Y von G mit* NOETHERscher *Faktorgruppe Y/X.*

Elemente x und x^σ mit x in G und σ in Γ werden als Γ-konjugiert bezeichnet; und $U = U^\Gamma$ erfüllende Untergruppen heißen Γ-zulässig.

Beweis. Man sieht sofort ein, daß (b) aus (a) folgt. — Gilt (b), so gilt gewiß auch:

(d'') *Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen* NOETHERschen *Normalteiler $N \neq 1$.*

Sei nun X ein Normalteiler von G mit NOETHERscher Faktorgruppe G/X. Wäre X nicht durch endlich viele Klassen in G konjugierter Elemente erzeugbar, so existierte ein maximaler, X enthaltender Normalteiler W von G, der nicht durch endlich viele Klassen in G konjugierter Elemente erzeugbar wäre. Da G wegen (b) endlich erzeugbar ist, so ist sicherlich $W < G$; und aus (b) folgt die Existenz eines $W < V$ erfüllenden Normalteilers V von G mit bezüglich V endlich definierbarer [NOETHERscher] Faktorgruppe V/W. Aus der Maximalität von W folgt, daß V von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt nun wegen Satz 2, daß W doch von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Dieser Widerspruch erweist die Gültigkeit folgender Tatsache:

(d') *Normalteiler X mit* NOETHERscher *Faktorgruppe G/X werden von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.*

Die Eigenschaften (d') und (d'') besagen aber, daß (c) insbesondere von der Gruppe Γ der inneren Automorphismen von G erfüllt wird; und damit haben wir gezeigt, daß (c) aus (b) folgt.

Sei schließlich Γ irgendeine den Bedingungen (c') und (c'') genügende Gruppe von Automorphismen von G. Wäre G nicht NOETHERsch, so wäre die Menge $\mathfrak{M}$ der Γ-zulässigen Normalteiler X mit nicht-NOETHERscher Faktorgruppe G/X nicht leer, da ja gewiß 1 zu $\mathfrak{M}$ gehörte. Sei $\mathfrak{T}$ eine natürlich

geordnete, nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{M}$; dies bedeutet, daß für X und Y in $\mathfrak{T}$ stets $X \leq Y$ oder $Y < X$ ist. Wir bilden die Vereinigungsmenge V aller X in $\mathfrak{T}$. Da jedes X in $\mathfrak{T}$ ein Γ-zulässiger Normalteiler von G ist, so ist auch V ein Γ-zulässiger Normalteiler von G. Wäre V nicht in $\mathfrak{M}$, so wäre G/V NOETHERsch; und es folgte aus (c'), daß V von endlich vielen Klassen $K_1, \ldots, K_n$ von Γ-konjugierten Elementen erzeugt wird. Jedes Element aus V gehört zu einem X in $\mathfrak{T}$; und da X ein Γ-zulässiger Normalteiler von G ist, so enthält X mit irgendeinem Element die ganze Klasse zu ihm Γ-konjugierter Elemente. Also ist jede Klasse K_i in einem X_i aus $\mathfrak{T}$ enthalten; und da $\mathfrak{T}$ natürlich geordnet ist, so gibt es unter den endlich vielen Normalteilern $X_1, \ldots, X_n$ aus $\mathfrak{T}$ einen umfassendsten W. Da W alle K_i enthält und in der von den K_i erzeugten Untergruppe V enthalten ist, so ist $W = V$; und da W zu $\mathfrak{T}$ gehört, so ist $G/V = G/W$ NOETHERsch. Aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von V zu $\mathfrak{M}$; und dies zeigt die Anwendbarkeit des Maximumprinzips der Mengenlehre auf $\mathfrak{M}$. Also enthält $\mathfrak{M}$ einen maximalen Γ-zulässigen Normalteiler D. Da G/D nicht NOETHERsch ist, so können wir aus (c'') die Existenz eines $D < H$ erfüllenden Γ-zulässigen Normalteilers H von G mit NOETHERscher Faktorgruppe H/D erschließen. Da D in $\mathfrak{M}$ maximal ist, so ist G/H NOETHERsch; und da G/H und H/D NOETHERsch sind, so ist auch G/D NOETHERsch. Dies widerspricht der Tatsache, daß D zu $\mathfrak{M}$ gehört; und aus diesem Widerspruch folgt, daß G NOETHERsch ist, q.e.d.

Bemerkung. Wir haben im Laufe des Beweises gezeigt, daß auch die Bedingungen (d') und (d'') zusammen notwendig und hinreichend dafür sind, daß G NOETHERsch ist. Die Bedingung (d') ist gewiß erfüllt, wenn die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird. Das sich so ergebende Kriterion ist aber recht oberflächlich.

Zusatz 1. *Die folgenden Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß der Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G* NOETHERsch *ist:*

(1) *G/N ist bezüglich G endlich definierbar;*

(2) *ist X ein in N enthaltener Normalteiler von G und N/X* NOETHERsch, *so ist die Faktorgruppe N/X bezüglich N endlich definierbar;*

(3) *zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G gibt es einen $X < Y \leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G mit* NOETHERschem *Y/X.*

Beweis. Es genügt offenbar, das Hinreichen dieser drei Bedingungen zu erweisen; und um dies zu tun, werden wir zeigen, daß die Gruppe Γ der von Elementen aus G in N induzierten Automorphismen die Bedingungen (c') und (c'') des Hauptsatzes erfüllt. Es ist klar, daß (c'') mit unserer Bedingung (3) identisch ist. Sei also X ein in N enthaltener Normalteiler von G mit NOETHERschem N/X. Nach (2) ist dann N/X bezüglich N endlich definierbar. Da aber G endlich erzeugbar und G/N nach (1) bezüglich G endlich definierbar ist, so folgt aus Satz 2, daß X von endlich vielen Klassen in G, d.h. Γ-konjugierter Elemente erzeugt wird. Also gilt auch (c'); und es folgt aus dem Hauptsatz, daß N NOETHERsch ist.

Endlich definierbare NOETHERsche Gruppen. Diese Klasse enthält mit einer Gruppe G jedes homomorphe Bild von G, da ja die Normalteiler von G endlich erzeugbar sind; und sie enthält mit A und B auch jede Erweiterung von A durch B [Folgerung 2]. Aus dem Hauptsatz und Zusatz 1 leitet man mühelos die folgenden beiden Kriterien ab.

Zusatz 2. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(a) *G ist eine endlich definierbare* NOETHERsche *Gruppe.*

(b) *Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen endlich definierbaren* NOETHERschen *Normalteiler $N \neq 1$.*

(c) *Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen* NOETHERschen *Normalteiler $N \neq 1$; und jedes* NOETHERsche *homomorphe Bild von G ist endlich definierbar.*

Zusatz 3. *N ist dann und nur dann ein endlich definierbarer* NOETHERscher *Normalteiler der endlich definierbaren Gruppe G, wenn*

(1) *G endlich erzeugbar und G/N endlich definierbar ist,*

(2) *N/X endlich definierbar ist, wenn nur X ein in N enthaltener Normalteiler von G und N/X* NOETHERsch *ist, und*

(3) *zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G ein $X < Y \leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G mit* NOETHERscher *Faktorgruppe Y/X existiert.*

Bei der Herleitung dieser Kriterien muß man noch berücksichtigen, daß der Normalteiler K von H von endlich vielen Klassen in H konjugierter Elemente erzeugt wird, wenn H endlich erzeugbar und H/K endlich definierbar ist [Folgerung 1].

Vollständig endlich definierbare Gruppen. Darunter wollen wir eine Gruppe verstehen, deren sämtliche Untergruppen endlich definierbar sind. Die Untergruppen einer solchen Gruppen sind dann insbesondere auch endlich erzeugbar, so daß derartige Gruppen NOETHERsch sind. Man sieht dann ohne Mühe ein, daß Untergruppen und homomorphe Bilder vollständig endlich definierbarer Gruppen ebenfalls vollständig endlich definierbar sind.

Ist sowohl der Normalteiler N wie auch die Faktorgruppe G/N vollständig endlich definierbar, und ist weiter U eine Untergruppe von G, so ist $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als Untergruppe von G/N endlich definierbar; und $U \cap N$ ist als Untergruppe von N endlich definierbar. Nach Folgerung 2 ist also die Erweiterung U der endlich definierbaren Gruppe $U \cap N$ durch die endlich definierbare Gruppe $U/(U \cap N)$ ebenfalls endlich definierbar; und damit haben wir gezeigt, daß G vollständig endlich definierbar ist.

Die Formulierung, und Herleitung aus Zusatz 2 und 3, von Kriterien für vollständige endliche Definierbarkeit sei dem Leser überlassen.

Definition 3. *Die Gruppe G ist fast-auflösbar, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit endlicher Kommutatorgruppe N' besitzt.*

Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler mit endlicher Kommutatorgruppe N', so ist N' als charakteristische Untergruppe des Normalteilers N selbst ein Normalteiler. Ist $N' \neq 1$, so ist also N' ein endlicher, von 1 verschiedener Normalteiler; ist aber $N' = 1$, so ist N ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler.

Wir definieren die Ableitungen $X^{(i)}$ der Gruppe X wie üblich: $X^{(0)} = X$, $X^{(i+1)} =$ Kommutatorgruppe von $X^{(i)}$.

Satz 3. *Die* NOETHERsche *Gruppe G ist dann und nur dann fast-auflösbar, wenn sie einen Normalteiler C derart besitzt, daß G/C endlich und $C^{(k)} = 1$ für hinreichend großes k ist.*

Weniger präzis, aber prägnanter läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die NOETHERschen fast-auflösbaren Gruppen sind genau die endlichen Erweiterungen NOETHERscher auflösbarer Gruppen.

Einen Beweis von Satz 3 kann man leicht aus BAER [*1*; p. 149, Satz 1] herleiten; und man kann sogar zeigen, daß sich C stets als torsionsfreie charakteristische Untergruppe wählen läßt.

Aus Satz 3 folgt, daß die Klasse der fast-auflösbaren NOETHERschen Gruppen mit einer Gruppe G jede Untergruppe und jedes homomorphe Bild von G enthält; und mit den Gruppen A und B enthält diese Gruppenklasse auch jede Erweiterung von A durch B.

Folgerung 3. *Jede fast-auflösbare* NOETHERsche *Gruppe ist endlich definierbar.*

Beweis. Fast-auflösbare NOETHERsche Gruppen besitzen nämlich endliche Normalketten, deren Faktoren zyklisch oder endlich sind. Da aber sowohl zyklische wie auch endliche Gruppen endlich definierbar sind, so folgt aus Folgerung 2 die endliche Definierbarkeit NOETHERscher fast-auflösbarer Gruppen.

Da jede Untergruppe einer NOETHERschen fast-auflösbaren Gruppe ebenfalls NOETHERsch und fast-auflösbar ist, so sind alle NOETHERschen fast-auflösbaren Gruppen vollständig endlich definierbar. Wir haben also die folgende Begriffshierarchie erhalten:

fast-auflösbar und NOETHERsch	→	vollständig endlich definierbar	→	endlich definierbar und NOETHERsch	→	NOETHERsch

Ob alle diese vier Gruppenklassen verschieden sind, haben wir nicht entscheiden können.

Unter Benutzung der im Anschluß an Definition 3 gemachten Bemerkungen und von Folgerung 3 ergeben sich nun mühelos aus Zusatz 2 und 3 die beiden folgenden Kriterien.

Zusatz 4. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(a) *G ist* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

(b) *Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.*

(c) *Jedes homomorphe Bild* $B \neq 1$ *von* G *besitzt einen* NOETHERschen *Normalteiler* $N \neq 1$; *und jedes* NOETHERsche *homomorphe Bild von* G *ist fast-auflösbar.*

Zusatz 5. N *ist dann und nur dann ein* NOETHERscher *fast-auflösbarer Normalteiler der endlich definierbaren Gruppe* G, *wenn*

(1) G *endlich erzeugbar und* G/N *endlich definierbar ist,*

(2) NOETHERsche *Faktorgruppen* N/X *nach [in* N *enthaltenen] Normalteilern* X *von* G *stets fast-auflösbar sind, und*

(3) *zu jedem* $X < N$ *erfüllenden Normalteiler* X *von* G *ein* $X < Y \leq N$ *erfüllender Normalteiler* Y *von* G *mit* NOETHERscher *Faktorgruppe* Y/X *existiert.*

Ist F die freie Gruppe vom Range 2 und $G = F/F''$, so ist die Kommutatorgruppe G' von G bekanntlich eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges. G ist also endlich erzeugbar und auflösbar, ohne NOETHERsch zu sein; und dies zeigt die Unentbehrlichkeit der ersten Hälfte der Bedingung (c) von Zusatz 4. — Jede abelsche Gruppe genügt der Bedingung (c) von Zusatz 4 und dies zeigt die Unentbehrlichkeit der Annahme, daß G endlich erzeugbar sei.

Überauflösbare Gruppen. Dies sind Gruppen, deren von 1 verschiedene homomorphe Bilder von 1 verschiedene zyklische Normalteiler besitzen. Derartige Gruppen genügen natürlich der Bedingung (b) des Zusatz 4, so daß also endlich erzeugbare überauflösbare Gruppen notwendig NOETHERsch sind. Zusatz 4 stellt folglich eine Verallgemeinerung von BAER [2; p. 26, Theorem 1] dar.

Überauflösbar eingebettete Normalteiler. Der Normalteiler N von G ist überauflösbar in G eingebettet, wenn es zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G einen $X < Y \leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G mit zyklischer Faktorgruppe Y/X gibt. Es ist nicht schwer einzusehen, daß überauflösbar eingebettete Normalteiler stets auch überauflösbare Gruppen sind. Jeder überauflösbar eingebettete Normalteiler N der Gruppe G genügt also den Bedingungen (2) und (3) des Zusatz 5, ist mithin sicher NOETHERsch, wenn G endlich erzeugbar und G/N endlich definierbar ist.

Oberhyperzentrale Normalteiler. Der Normalteiler N von G ist oberhyperzentral, wenn $(N/X) \cap Z(G/X) \neq 1$ für jeden $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G gilt; siehe etwa BAER [3; p. 299, Definition 1]. Hier sei, wie immer, unter $Z(H)$ das Zentrum der Gruppe H verstanden. Oberhyperzentrale Normalteiler sind gewiß überauflösbar eingebettet. Ein oberhyperzentraler Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G mit endlich definierbarer Faktorgruppe G/N ist also sicher NOETHERsch; und dies ist eine Verschärfung eines Resultats von PH. HALL [1; p. 427, Lemma 2].

Endlichkeitskriterion für oberhyperzentrale Normalteiler. *Der oberhyperzentrale Normalteiler* N *der Gruppe* G *ist [dann und nur dann] endlich, wenn* N NOETHERsch *und* $N/[G, N]$ *endlich ist.*

Wie üblich werde hier unter $[G, N]$ die von allen Kommutatoren $g^{-1}n^{-1}gn$ mit g in G und n in N erzeugte Untergruppe von G verstanden. Mit N ist natürlich auch $[G, N]$ ein in N enthaltener Normalteiler von G.

Beweis. Sei N ein unendlicher, NOETHERscher und oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe G. Dann existiert ein maximaler in N enthaltener Normalteiler K von G mit unendlicher Faktorgruppe N/K. Wir setzen $G^* = G/K$ und $N^* = N/K$. Die Elemente endlicher Ordnung in N^* bilden einen endlichen Normalteiler T von G^*, der in N^* liegt; s. etwa BAER [5; p. 193, Theorem 1, (v)]. Wäre $T \neq 1$, so würde aus der Maximalität von K die Endlichkeit von N^*/T folgen, was unmöglich ist, da ja N^* unendlich, T aber endlich ist. Mithin ist N^* torsionsfrei. Ist C der Zentralisator von N^* in G^*, so folgt aus der Torsionsfreiheit des oberhyperzentralen Normalteilers N^* von G^* die Torsionsfreiheit von G^*/C; s. BAER [5; p. 200, Proposition 1]. Also ist auch N^*C/C torsionsfrei und daraus folgt die Torsionsfreiheit der isomorphen Gruppe $N^*/(N^* \cap C)$. Da C das Zentrum von G^* enthält, und da N^* von 1 verschiedene Zentrumselemente von G^* enthält, so ist $N^* \cap C \neq 1$. Aus der Maximalität von K folgt wieder die Endlichkeit der torsionsfreien Gruppe $N^*/(N^* \cap C)$. Also ist $N^*/(N^* \cap C) = 1$. Mithin ist $N^* = N^* \cap C$ und also auch N^* Teil seines Zentralisators. Damit haben wir gezeigt, daß N^* eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist.

Da N^* ein unendlicher oberhyperzentraler Normalteiler von G^* ist, so ist $N^* \cap Z(G^*) \neq 1$. Sei $z \neq 1$ ein Element aus $N^* \cap Z(G^*)$. Dann ist $\{z\}$ ein Normalteiler von G^*; und wir folgern aus der Maximalität von K die Endlichkeit von $N^*/\{z\}$. Da aber N^* eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so muß N^* sogar eine unendliche zyklische Gruppe sein. Durch direktes Nachrechnen oder durch Anwendung von BAER [5; p. 201, Corollary 2] ergibt sich schließlich, daß $N^* \leq Z(G^*)$ ist. Dies ist aber äquivalent mit der Aussage $[N, G] \leq K$, so daß aus der Unendlichkeit von N/K auch die von $N/[N, G]$ folgt, q. e. d.

NOETHERsche Gruppen endlicher Klasse. Wie üblich seien die Glieder ${}^iG$ der absteigenden Zentrenkette der Gruppe G induktiv durch die Gleichungen

$$ {}^0G = G, \qquad {}^{i+1}G = [G, {}^iG] $$

definiert; und die Gruppe G heiße *von endlicher Klasse*, wenn ${}^nG = 1$ für hinreichend großes positives n gilt.

Kriterion für endlich erzeugbare Gruppen. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(a) *G ist eine* NOETHERsche *Gruppe endlicher Klasse.*

(b) *Ist $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G, so ist $Z(H) \neq 1$.*

(c) *Jedes* NOETHERsche *homomorphe Bild von G ist von endlicher Klasse; und jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt einen* NOETHERschen *Normalteiler $N \neq 1$.*

(d) *Endliche homomorphe Bilder von G sind nilpotent; minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G sind endlich; und die absteigende Zentrenkette von G bricht nach endlich vielen Schritten ab.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a), (b) und (c) leitet man mühelos aus Zusatz 4 her; vgl. auch BAER [5; p. 203, Theorem und p. 207, Corollary]. Ebenso ist es klar, daß (d) aus (a) folgt.

Gilt (d), so gibt es sicher eine $^nG = {}^{n+1}G$ erfüllende ganze Zahl n. Dann ist $G/{}^nG$ eine endlich erzeugbare Gruppe endlicher Klasse und eine solche ist gewiß NOETHERsch, wie etwa aus der Äquivalenz von (a) und (b) folgt. Wäre nun $N = {}^nG \neq 1$, so bemerkten wir zunächst, daß G/N als NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse auch endlich definierbar ist [Folgerung 3]. Da aber G endlich erzeugbar ist, so ergibt sich aus Folgerung 1, daß N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Hieraus und aus $N \neq 1$ erschließen wir die Existenz eines maximalen $K < N$ erfüllenden Normalteilers K von G. Dann ist aber N/K ein minimaler Normalteiler von G/K; und daraus folgt wegen (d) die Endlichkeit von N/K. Sei C/K der Zentralisator von N/K in G/K. Dann ist C ein Normalteiler von G und G/C ist im wesentlichen mit der Gruppe der von G in N/K induzierten Automorphismen von N/K identisch. Aus der Endlichkeit von N/K folgt die Endlichkeit von G/C. Weiter ist $(N \cap C)/K \leq Z(C/K)$ und $C/(N \cap C) \simeq NC/N$ ist als Untergruppe von G/N eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse. Also ist auch C/K eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse. Eine solche Gruppe besitzt aber bekanntlich eine torsionsfreie Untergruppe U/K, deren Index $[C:U]$ endlich ist; s. etwa BAER [3; p. 307, Zusatz 3]. Aus der Endlichkeit von $[G:C]$ und der von $[C:U]$ folgt die Endlichkeit von $[G:U]$. Da U insbesondere nur endlich viele konjugierte in G besitzt, so folgt aus dem POINCARÉschen Satz die Endlichkeit von $[G:V]$, wenn wir unter V den Durchschnitt aller zu U in G konjugierten Untergruppen verstehen. Es ist klar, daß V ein K enthaltender Normalteiler von G ist, und daß V/K als Untergruppe von U/K torsionsfrei ist. Aus der Endlichkeit von N/K folgt dann $N \cap V = K$. Aus (d) und der Endlichkeit von G/V folgt die Nilpotenz von G/V. Da N/K ein minimaler Normalteiler von G/K ist, und da $VN/V \simeq N/(N \cap V) = N/K$ ist, so ist VN/V ein minimaler Normalteiler der endlichen nilpotenten Gruppe G/V. Daraus folgt aber $VN/V \leq Z(G/V)$; und dies ist mit der Ungleichung

$$^{n+1}G = [G, N] \leq N \cap V = K < N = {}^nG = {}^{n+1}G$$

äquivalent, die einen offenbaren Widerspruch darstellt. Also ist $^nG = 1$, womit erwiesen ist, daß G eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse ist, q. e. d.

Beispiel. Es sei A eine $A = A^p$ erfüllende abelsche unendliche p-Gruppe; man kann etwa für A irgendeine Gruppe vom PRÜFERschen Typ p^∞ wählen. Abbildung eines jeden Elements in A auf seine $(1+p)$-te Potenz ist ein Automorphismus von A. Sei nun G die aus A durch Adjunktion eines

Elements g entstehende Gruppe, das der Bedingung

$$g^{-1}ag = a^{1+p} \qquad \text{für jedes } a \text{ in } A$$

genüge. Dann ist A ein Normalteiler von G, G/A eine unendliche zyklische Gruppe und $A = [A, G] = [G, G] = {}^1G = {}^2G$. Man überzeugt sich nun ohne Mühe, daß G den Bedingungen (b), (c) und (d) genügt, ohne NOETHERsch oder von endlicher Klasse zu sein. Man sieht damit, daß die Annahme der endlichen Erzeugbarkeit von G für die Gültigkeit unseres Satzes unentbehrlich ist. — Es sei bemerkt, daß man dieses Beispiel leicht modifizieren kann; z.B. kann man erreichen, daß die Gruppe G entweder torsionsfrei oder eine Torsionsgruppe ist.

Bemerkung. Es ist bekannt, daß eine NOETHERsche Gruppe dann und nur dann von endlicher Klasse ist, wenn alle ihre echten Untergruppen von ihren Normalisatoren verschieden sind; s. HIRSCH [*1*]. Aus dem obigen Kriterion folgt also, daß die Gruppe G dann und nur dann NOETHERsch und von endlicher Klasse ist, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

G ist endlich erzeugbar; jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERschen Normalteiler $N \neq 1$; jede echte Untergruppe von G ist von ihrem Normalisator in G verschieden.

Die Eigenschaft (b) des obigen Kriterions haben wir anderwärts als Obernilpotenz bezeichnet. Wir wollen noch die folgende Abschwächung dieser Eigenschaft untersuchen:

(E) *Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler des homomorphen Bildes H einer Untergruppe von G, so gibt es zu jedem Element x aus H ein $xy = yx$ erfüllendes Element $y \neq 1$ in N.*

Obernilpotente wie auch ENGELsche Gruppen haben diese Eigenschaft (E); und eine endliche Gruppe ist dann und nur dann nilpotent, wenn sie der Bedingung (E) genügt; s. BAER [*4*; p. 407, Satz 4]. Weiter ist es klar, daß jede Untergruppe und jedes homomorphe Bild einer Gruppe mit der Eigenschaft (E) ebenfalls diese Eigenschaft (E) hat. Mangels eines besseren Namens seien diese Gruppen als E-Gruppen bezeichnet. Man bemerke, daß G dann und nur dann eine E-Gruppe ist, wenn jedes Elementepaar aus G eine E-Untergruppe erzeugt.

Endlichkeitskriterion für E-Normalteiler. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist endlich, wenn N eine* NOETHERsche *Torsionsgruppe mit der Eigenschaft* (E) *ist, und wenn für jeden Homomorphismus σ von G jeder minimale, in N^σ enthaltene Normalteiler von G^σ endlich ist.*

Beweis. Wäre die NOETHERsche Gruppe N unendlich, so existierte ein maximaler, in N enthaltener Normalteiler K von G mit unendlicher Faktorgruppe N/K. Dann ist $N^* = N/K$ ein Normalteiler von $G^* = G/K$ mit folgenden Eigenschaften:

N^* ist eine unendliche NOETHERsche Torsionsgruppe mit der Eigenschaft (E); und jeder von 1 verschiedene, in N^* enthaltene Normalteiler X von G^* hat endlichen Index in N^*. Da aber endliche E-Gruppen nilpotent

sind, so ist eine solche Faktorgruppe N^*/X sogar eine endliche nilpotente Gruppe.

Da endlich erzeugbare Torsionsgruppen endlicher Klasse bekanntlich endlich sind — s. etwa BAER [5; p. 207, Corollary] — so ist insbesondere $N^*/{}^iN^*$ für jedes i endlich. Aus der Unendlichkeit der NOETHERschen Gruppe N^* folgern wir die Unendlichkeit eines jeden ${}^iN^*$ und die Existenz eines maximalen, $K < {}^iN^*$ erfüllenden Normalteilers K von G^*. Bedenken wir, daß ${}^iN^*$ als charakteristische Untergruppe von N^* ein Normalteiler von G^* ist, so sehen wir, daß ${}^iN^*/K$ ein minimaler, in N^*/K enthaltener Normalteiler von G^*/K ist. Ein solcher ist aber nach Voraussetzung endlich. Aus der Endlichkeit von $N^*/{}^iN^*$ und der von ${}^iN^*/K$ folgt die Endlichkeit von N^*/K. Endliche E-Gruppen sind, wie schon bemerkt, nilpotent. Also gibt es eine ganze Zahl j derart, daß ${}^jN^* \leq K < {}^iN^*$ gilt. Damit ist insbesondere gezeigt, daß ${}^{i+1}N^* < {}^iN^*$ für jedes i gilt, und daß also die absteigende Zentrenkette von N^* nicht nach endlich vielen Schritten abbricht. Insbesondere ist also $N^*/\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iN^*$ unendlich, woraus sich sofort $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iN^* = 1$ ergibt.

Wir werden jetzt [durch vollständige Induktion] eine Elementenfolge b_i mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(1) b_i ist von 1 verschieden und liegt in ${}^iN^*$;

(2) $b_ib_j = b_jb_i$;

(3) ist C_i der Zentralisator von $B_i = \{b_0, \ldots, b_i\}$ in N^*, so ist $C_i \cap {}^jN^* \neq 1$ für jedes j.

Da N^* der Bedingung (E) genügt, und da alle ${}^jN^*$ unendlich sind, können wir als b_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in der unendlichen Gruppe N^* wählen; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß für ein gewisses i bereits den Bedingungen (1) bis (3) genügende Elemente $b_0, \ldots, b_i$ konstruiert sind. Da B_i wegen (2) abelsch ist, so ist B_i in seinem Zentralisator C_i enthalten. Aus (3) folgt insbesondere, daß $C_i \cap {}^{i+1}N^* \neq 1$ ist; und es gibt also ein Element $b_{i+1} \neq 1$ in $C_i \cap {}^{i+1}N^*$. Es ist klar, daß die Elemente $b_0, \ldots, b_{i+1}$ den Bedingungen (1) und (2) genügen. Weiter ist der Zentralisator C_{i+1} von $B_{i+1} = \{B_i, b_{i+1}\}$ in N^* genau gleich dem Zentralisator von b_{i+1} in C_i. Da aber $C_i \cap {}^jN^*$ wegen (3) ein von 1 verschiedener Normalteiler der E-Gruppe C_i ist [die ja eine Untergruppe der E-Gruppe N^* ist], so enthält $C_i \cap {}^jN^*$ von 1 verschiedene, mit dem Element b_{i+1} in C_i vertauschbare Elemente. Also ist $C_{i+1} \cap {}^jN^* \neq 1$, womit auch die Gültigkeit von (3) dargetan ist. Damit ist die induktive Konstruktion der Elementenfolge $b_0, \ldots, b_i, b_{i+1}, \ldots$ beendet.

Die von allen Elementen b_i erzeugte Untergruppe B von N^* ist wegen (2) abelsch. Da N^* eine NOETHERsche Torsionsgruppe ist, so ist B sogar endlich. Die absteigende Folge von Untergruppen $B \cap {}^iN^*$ von B bricht also nach endlich vielen Schritten ab, so daß es eine

$$B \cap {}^kN^* = \cdots = B \cap {}^{k+j}N^* = \cdots$$

erfüllende ganze Zahl k gibt. Dann wird $B \cap {}^{k}N^{*} \leq \bigcap_{i=0}^{\infty} {}^{i}N^{*} = 1$. Nach (1) ist aber $b_k \neq 1$ in $B \cap {}^{k}N^{*} = 1$ enthalten. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem die Endlichkeit von N folgt, q. e. d.

Bemerkung. Ist G eine NOETHERsche Gruppe, deren Elementepaare endliche p-Untergruppen erzeugen, so ist G gewiß eine Torsionsgruppe mit der Eigenschaft (E). Die Frage, ob eine solche Gruppe G endlich ist, ist eine Variante des berühmten BURNSIDEschen Problems. Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen der BURNSIDEschen Vermutung und der Frage, ob die letzte der Bedingungen unseres Endlichkeitskriterions für E-Normalteiler entbehrlich ist oder nicht.

Kriterion für NOETHERsche Gruppen. *Die folgenden Eigenschaften der* NOETHER*schen Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(A) *G ist von endlicher Klasse.*

(B) *G ist eine* E*-Gruppe; und der Normalteiler N des homomorphen Bildes H von G ist endlich, wenn nur $N/[N, H]$ endlich ist.*

(C) *G ist eine* E*-Gruppe; der Normalteiler N des homomorphen Bildes H von G ist eine Torsionsgruppe, wenn nur $N/[N, H]$ endlich ist; und minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G sind endlich.*

Beweis. Wir haben mehrfach darauf hingewiesen, daß Gruppen endlicher Klasse die Eigenschaft (E) haben; und es ergibt sich nun aus dem Endlichkeitskriterium für oberhyperzentrale Normalteiler, daß (B) aus (A) folgt.

Hat weiter G die Eigenschaft (B) und ist M ein minimaler Normalteiler des homomorphen Bildes H von G, so ist $[H, M]$ als in M enthaltener Normalteiler von H entweder gleich 1 oder gleich M. Im ersten Falle liegt M im Zentrum von H; und aus der Minimalität von M folgt, daß M zyklisch von Primzahlordnung ist. Im zweiten Falle ist $M/[H, M] = 1$; und die Endlichkeit von M folgt aus (B). Wir sehen also, daß (C) aus (B) folgt.

Sei weiter die Bedingung (C) von G erfüllt und N ein Normalteiler des homomorphen Bildes H von G derart, daß $N/[N, H]$ endlich ist. Da G eine NOETHERsche E-Gruppe ist, so ist auch N eine NOETHERsche E-Gruppe; und aus (C) und der Endlichkeit von $N/[N, H]$ folgern wir, daß N eine Torsionsgruppe ist. Da schließlich minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G wegen (C) endlich sind, so sind alle Voraussetzungen des Endlichkeitskriterions für E-Normalteiler erfüllt. Also ist N endlich; und wir haben gezeigt, daß (B) eine Folge von (C) ist; und damit ist sogar die Äquivalenz von (B) und (C) erwiesen.

Erfülle schließlich G die äquivalenten Bedingungen (B) und (C). Da endliche E-Gruppen, wie schon früher bemerkt, nilpotent sind, so sind alle endlichen homomorphen Bilder von G nilpotent; und die Endlichkeit minimaler Normalteiler homomorpher Bilder von G ist in (C) enthalten. Um zu zeigen, daß die absteigende Zentrenreihe von G nach endlich vielen Schritten abbricht, definieren wir die folgende absteigende Kette charakteristischer Untergruppen $G(i)$ von G:

$G(0)=G$;

$G(i+1)/[G, G(i)]$ ist die von den Elementen endlicher Ordnung in $G/[G, G(i)]$ erzeugte Untergruppe von $G/[G, G(i)]$.

Durch eine naheliegende Induktion folgt zunächst, daß

$$'G \leq G(i) \quad \text{für jedes } i$$

gilt. Da also $G/G(i)$ von endlicher Klasse ist und $G(i)/[G, G(i)]$ im Zentrum von $G/[G, G(i)]$ liegt, so ist jede Faktorgruppe $G/[G, G(i)]$ NOETHERsch und von endlicher Klasse. Die Elemente endlicher Ordnung in einer NOETHERschen Gruppe endlicher Klasse bilden aber bekanntlich eine endliche Untergruppe; s. etwa BAER [5; p. 207, Corollary]. Folglich ist $G(i+1)/[G, G(i)]$ stets eine endliche Gruppe, woraus insbesondere die Torsionsfreiheit der Faktorgruppen $G/G(i)$ folgt. Da $G/G(i)$ torsionsfrei und $G(i+1)/[G, G(i)]$ endlich ist, so ergibt sich schließlich noch $G(i+1) \leq G(i)$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die absteigende Kette der $G(i)$ nach endlich vielen Schritten abbricht. Wir nehmen an, daß dies nicht der Fall ist; und setzen $G(i)^* = G(i)/\bigcap_{j=0}^{\infty} G(j)$, insbesondere $G^* = G(0)^*$. Es ist dann klar, daß

$G^*/G(i)^*$ eine torsionsfreie Gruppe endlicher Klasse und

$[G^*, G(i)^*] \leq G(i+1)^* < G(i)^*$

für $i = 0, 1, \ldots$ ist. Weiter werden wir [durch vollständige Induktion] eine Elementenfolge b_i mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(1) b_i ist von 1 verschieden und liegt in $G(i)^*$;

(2) $b_i b_j = b_j b_i$;

(3) ist C_i der Zentralisator von $B_i = \{b_0, \ldots, b_i\}$ in G^*, so ist $C_i \cap G(j)^* \neq 1$.

Da G^* der Bedingung (E) genügt, und da jedes $G(i)^* \neq 1$ ist, können wir als b_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in $G^* \neq 1$ wählen; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß für ein gewisses k bereits den Bedingungen (1) bis (3) genügende Elemente $b_0, \ldots, b_k$ konstruiert sind. Da B_k wegen (2) abelsch ist, so ist B_k in seinem Zentralisator C_k enthalten. Aus (3) folgt insbesondere $C_k \cap G(k+1)^* \neq 1$, so daß es also sicher ein Element $b_{k+1} \neq 1$ in $C_k \cap G(k+1)^*$ gibt. Es ist klar, daß die Elemente $b_0, \ldots, b_{k+1}$ den Bedingungen (1) und (2) genügen. Weiter ist der Zentralisator C_{k+1} von $B_{k+1} = \{B_k, b_{k+1}\}$ in G^* genau gleich dem Zentralisator von b_{k+1} in C_k. Da aber $C_k \cap G(j)^*$ wegen (3) ein von 1 verschiedener Normalteiler von C_k ist, da b_{k+1} in C_k liegt, und da C_k als Untergruppe eines homomorphen Bildes von G eine E-Gruppe ist, so enthält $C_k \cap G(j)^*$ von 1 verschiedene, mit b_{k+1} vertauschbare Elemente. Also ist $C_{k+1} \cap G(j)^* \neq 1$, womit auch die Gültigkeit von (3) dargetan ist. Damit ist die induktive Konstruktion der Elementenfolge $b_0, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots$ vollständig ausgeführt.

Die von allen Elementen b_i erzeugte Untergruppe B ist wegen (2) abelsch; und aus (1) folgern wir

$$B \cap G(i)^* \neq 1 \quad \text{für jedes } i.$$

Da G NOETHERsch ist, so ist B endlich erzeugbar. Da $G^*/G(i)^*$ torsionsfrei ist, so ist auch $G(i)^*B/G(i)^* \simeq B/[B \cap G(i)^*]$ torsionsfrei. Da endlich erzeugbare torsionsfreie abelsche Gruppen freie abelsche Gruppen endlichen Ranges sind, und da eine Untergruppe einer abelschen Gruppe sicher dann ein direkter Faktor ist, wenn ihre Faktorgruppe eine freie abelsche Gruppe ist, so bilden die Untergruppen $B \cap G(i)^*$ eine absteigende Folge direkter Faktoren der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe B. Eine solche bricht aber nach endlich vielen Schritten ab, so daß es eine

$$B \cap G(h)^* = \cdots = B \cap G(h+j)^* = \cdots$$

erfüllende ganze Zahl h gibt. Dann ist aber

$$1 < B \cap G(h)^* \leq \bigcap_{i=0}^{\infty} G(i)^* = 1,$$

wie aus der Konstruktion von G^* folgt; und damit sind wir auf einen Widerspruch geführt worden, aus dem folgt, daß die absteigende Kette der $G(i)$ nach endlich vielen Schritten abbricht.

Es gibt also eine $G(n) = G(n+1)$ erfüllende ganze Zahl n. Daraus folgt, daß $G(n)/[G, G(n)] = G(n+1)/[G, G(n)]$ endlich ist; und aus (B) ergibt sich die Endlichkeit von $G(n)$. Da aber $^nG \leq G(n)$ ist, so ergibt sich aus der Endlichkeit von $G(n)$, daß die absteigende Zentrenkette von G nach endlich vielen Schritten abbricht. Damit haben wir gezeigt, daß die NOETHERsche Gruppe G der Bedingung (d) des Kriterions für endlich erzeugbare Gruppen genügt. Also ist G von endlicher Klasse, womit die Äquivalenz unserer Bedingungen (A), (B), (C) dargetan ist.

Endliche Gruppen. Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe, deren unendliche homomorphe Bilder stets von 1 verschiedene, endliche Normalteiler besitzen, so ist G wegen Zusatz 4 NOETHERsch; und hieraus leitet man ohne weiteres die Endlichkeit von G her. Siehe auch BAER [5; p. 435, Lemma 1].

Produkte NOETHERscher Normalteiler. Dieser Begriff führt zu einer leichten Verallgemeinerung der schon gewonnenen Resultate und eröffnet auch einen neuen Zugang zu Zusatz 2 und 3.

Lemma 2. *N ist dann und nur dann ein Produkt* NOETHERscher *Normalteiler von G, wenn jede endliche Teilmenge von N in einem* NOETHERschen *Normalteiler von G enthalten ist.*

Beweis. Da Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen wieder NOETHERsche Gruppen sind, so ist insbesondere das Produkt zweier NOETHERscher Normalteiler von G wieder ein NOETHERscher Normalteiler von G. Es folgt, daß jedes Produkt endlich vieler NOETHERscher Normalteiler von G ebenfalls ein NOETHERscher Normalteiler von G ist. Aus dieser Tatsache folgt ohne weiteres unser Lemma.

Satz 4. *Ist M ein Produkt* NOETHERscher *Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G und N/M ein Produkt endlich definierbarer* NOETHERscher *Normalteiler von G/M, so ist N ein Produkt* NOETHERscher *Normalteiler von G.*

Beweis. Es sei K ein M enthaltender Normalteiler von G und K/M eine endlich definierbare NOETHERsche Gruppe. Dann existiert gewiß eine $K = MU$ erfüllende endlich erzeugbare Untergruppe U von G. Da $U/(M \cap U) \simeq MU/M = K/M$ und also endlich definierbar ist, so ergibt sich aus Folgerung 1, daß $M \cap U$ von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt wird. Da nach Lemma 2 jede endliche Teilmenge von M in einem NOETHERschen Normalteiler von G enthalten ist, und da Normalteiler von G volle Klassen in U konjugierter Elemente enthalten, so existiert ein NOETHERscher, $M \cap U$ enthaltender Normalteiler von G. Also ist insbesondere $M \cap U$ NOETHERsch. Da weiter $U/(M \cap U) \simeq K/M$ und also nach Voraussetzung NOETHERsch ist, so ist U selbst NOETHERsch.

Da G und U endlich erzeugbar sind, und da M und $K = MU$ Normalteiler von G sind, so existiert nach Lemma 1 ein in M enthaltener, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugter Normalteiler V von G derart, daß VU ein Normalteiler von G ist. Da aber nach Lemma 2 jede endliche Teilmenge von M in einem NOETHERschen Normalteiler von G enthalten ist, der natürlich mit jedem Element alle zu ihm in G konjugierten Elemente enthält, so ist auch V in einem NOETHERschen Normalteiler von G enthalten. Folglich ist V selbst ein NOETHERscher Normalteiler von G.

Da V ein NOETHERscher Normalteiler von G und U eine NOETHERsche Untergruppe ist, so ist VU ein NOETHERscher Normalteiler von G. Aus $K = MU = M(VU)$ folgt nun, daß K ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G ist, da ja dasselbe von M gilt.

Nach Voraussetzung ist aber N ein Produkt von M enthaltenden Normalteilern X von G mit endlich definierbarer NOETHERscher Faktorgruppe X/M. Nach dem eben Gezeigten ist jedes derartige X ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G, so daß also N ebenfalls ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G ist, q. e. d.

Bemerkung 1. Das Zentrum einer Gruppe ist ein Produkt zyklischer Normalteiler dieser Gruppe; und zyklische Gruppen sind endlich definierbare NOETHERsche Gruppen. Ist also M im Zentrum von G und N/M im Zentrum von G/M enthalten, so sind die Voraussetzungen von Satz 4 mit eventueller Ausnahme der endlichen Erzeugbarkeit von G erfüllt. Es ist aber leicht, Beispiele [nicht endlich erzeugbarer] Gruppen anzugeben, deren zweites Zentrum nicht ein Produkt NOETHERscher Normalteiler ist. Die Annahme der endlichen Erzeugbarkeit von G ist also unentbehrlich für die Gültigkeit von Satz 4.

Bemerkung 2. Man kann leicht Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen angeben, deren Zentrum nicht endlich erzeugbar ist. Ist etwa F die freie Gruppe vom Range zwei und $[F, F'']$ die von allen Kommutatoren $a^{-1}b^{-1}ab$ mit a in F und b in F'' erzeugte charakteristische Untergruppe von F, so ist $G = F/[F, F'']$ eine von zwei Elementen erzeugte Gruppe, deren Zentrum sicherlich $F''/[F, F'']$ enthält; und diese letzte Gruppe ist nicht endlich erzeugbar. Es folgt, daß das Produkt endlich definierbarer NOETHERscher

Normalteiler einer endlich erzeugbaren Gruppe nicht NOETHERsch zu sein braucht.

Zusatz 6. *Ist N ein Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G, und existiert zu jedem $X<N$ erfüllenden Normalteiler X von G ein $X<Y\leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G mit endlich definierbarer* NOETHERscher *Faktorgruppe Y/X, so ist N ein Produkt endlich definierbarer* NOETHERscher *Normalteiler von G.*

Beweis. Wir bilden zunächst das Produkt M aller in N enthaltenen endlich definierbaren NOETHERschen Normalteiler von G. Wäre $M\neq N$, so wäre $M<N$; und aus unserer zweiten Voraussetzung folgte die Existenz eines $M<W\leq N$ erfüllenden Normalteilers W von G mit endlich definierbarer NOETHERscher Faktorgruppe W/M. Da G nach Voraussetzung endlich erzeugbar ist, so folgt aus Satz 4, daß W ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G ist. Da W/M endlich erzeugbar ist, so gibt es einen $W=MV$ erfüllenden NOETHERschen Normalteiler V von G. Dann ist $V\cap M$ eine endlich erzeugbare Untergruppe von M; und da M ein Produkt endlich definierbarer NOETHERscher Normalteiler von G ist, so gibt es ein $V\cap M$ enthaltendes und in M enthaltenes Produkt P endlich vieler endlich definierbarer NOETHERscher Normalteiler von G. Weiter ist

$$PV/P\simeq V/(V\cap P)=V/(V\cap M\cap P)=V/(V\cap M)\simeq MV/M=W/M;$$

und W/M ist eine endlich definierbare NOETHERsche Gruppe. Nach Folgerung 2 sind aber Erweiterungen endlich definierbarer NOETHERscher Gruppen durch endlich definierbare NOETHERsche Gruppen ebenfalls endlich definierbare NOETHERsche Gruppen; und nun ergibt sich leicht, daß PV ein endlich definierbarer NOETHERscher Normalteiler von G ist, der in N und also in M enthalten ist. Folglich wird $M<W=MV\leq M$, ein Widerspruch, aus dem $M=N$ folgt, q. e. d.

Zusatz 7. *Der Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G ist dann und nur dann ein Produkt* NOETHERscher *fast-auflösbarer Normalteiler von G, wenn es zu jedem $X<N$ erfüllenden Normalteiler X von G einen $X<Y\leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G derart gibt, daß Y/X endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.*

Dies erschließt man leicht aus Zusatz 6, wenn man nur Lemma 2 und Folgerung 3 berücksichtigt.

Lokal-NOETHERsche Gruppen. Dies sind Gruppen, deren sämtliche endlich erzeugbare Untergruppen NOETHERsch sind. Lemma 2 zeigt, daß jedes Produkt NOETHERscher Normalteiler lokal-NOETHERsch ist. Wir wollen jetzt von einer etwas allgemeineren Gruppenklasse zeigen, daß sie lokal-NOETHERsch ist.

Satz 5. *Die Gruppe G ist lokal-*NOETHERsch, *wenn jedes homomorphe Bild $B\neq 1$ von G einen endlich definierbaren* NOETHERschen *Normalteiler $N\neq 1$ besitzt.*

Beweis. Es sei Σ die Menge aller Normalteiler X von G mit der Eigenschaft

(Σ) Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit endlich definierbarer NOETHERscher Faktorgruppe U/X ist lokal-NOETHERsch.

Es ist klar, daß die Menge Σ nicht leer ist, da ja der Normalteiler 1 von G zu Σ gehört. Ist weiter Θ eine natürlich geordnete, nicht leere Teilmenge von Σ — so daß also für jedes X und Y in Θ entweder $X < Y$ oder $Y \leq X$ gilt — dann ist die Vereinigungsmenge V aller Normalteiler in Θ gewiß ein Normalteiler von G. Sei U eine V enthaltende Untergruppe von G mit endlich definierbarer NOETHERscher Faktorgruppe U/V und A eine endlich erzeugbare Untergruppe von U. Da U/V insbesondere endlich erzeugbar ist, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe B derart, daß $A \leq B$ und $U = VB$ ist. Aus

$$U/V = VB/V \simeq B/(B \cap V)$$

folgt dann, daß $B/(B \cap V)$ eine endlich definierbare NOETHERsche Gruppe ist. Da B endlich erzeugbar ist, so schließen wir aus Folgerung 1, daß $B \cap V$ sich von endlich vielen Klassen $K_1, \ldots, K_n$ in B konjugierter Elemente erzeugen läßt. Ist x ein Element in K_i, so liegt x in V und also in einem geeigneten Normalteiler X_i aus Θ, der natürlich mit x auch alle zu x konjugierten Elemente enthält. Insbesondere ist also $K_i \leq X_i$. Da Θ natürlich geordnet ist, so gibt es unter den endlich vielen Normalteilern $X_1, \ldots, X_n$ aus Θ einen umfassendsten Y. Da Y offenbar $K_1, \ldots, K_n$ enthält, so ist auch $B \cap V \leq Y$. Aus $Y \leq V$ ergibt sich dann $B \cap V = B \cap Y$, so daß

$$U/V \simeq B/(B \cap V) = B/(B \cap Y) \simeq YB/Y$$

wird. Da mithin YB/Y endlich definierbar und NOETHERsch ist, und da Y zu Σ gehört, so ist YB lokal-NOETHERsch. Da A endlich erzeugbar und in YB enthalten ist, so ist A NOETHERsch. Folglich ist U lokal-NOETHERsch, womit dargetan ist, daß V zu Σ gehört. Auf die Menge Σ von Normalteilern von G läßt sich also das Maximumprinzip der Mengenlehre anwenden; und hieraus erschließen wir die Existenz eines maximalen Normalteilers M in Σ.

Da M/M endlich definierbar und NOETHERsch ist, so ist M lokal-NOETHERsch. Wäre $M \neq G$, so besäße das homomorphe Bild $G/M \neq 1$ von G nach Voraussetzung einen endlich definierbaren und NOETHERschen Normalteiler $N/M \neq 1$. Ist U eine N enthaltende Untergruppe von G mit endlich definierbarer NOETHERscher Faktorgruppe U/N, so ist U/M als Erweiterung der endlich definierbaren NOETHERschen Gruppe N/M durch die endlich definierbare NOETHERsche Gruppe U/N nach Folgerung 2 eine endlich definierbare NOETHERsche Gruppe. Da M die Eigenschaft (Σ) hat, so ist U lokal-NOETHERsch; und damit ist gezeigt, daß auch N die Eigenschaft (Σ) hat. Dies widerspricht aber der Maximalität von M, da ja $M < N$ ist. Also ist $G = M$ eine lokal-NOETHERsche Gruppe, q. e. d.

Beispiel *einer Gruppe, die den Voraussetzungen von Satz 5 genügt, ohne ein Produkt* NOETHERscher *Normalteiler zu sein:* Es sei A eine abelsche Gruppe,

die weder endlich erzeugbar ist, noch Elemente der Ordnung 2 enthält. Die Gruppe G entstehe aus A durch Adjunktion eines Elements b, das den Bedingungen $(bx)^2=1$ für jedes x aus A genügt. Dann ist jede Untergruppe von A ein Normalteiler von G, so daß also A ein Produkt zyklischer Normalteiler von G ist. Weiter ist G/A eine zyklische Gruppe der Ordnung 2. Der kleinste b enthaltende Normalteiler von G enthält aber A^2 und ist also nicht NOETHERsch. Lemma 2 zeigt nun, daß G kein Produkt NOETHERscher Normalteiler ist.

Zusatz bei der Korrektur (1. November 1956): Die Gruppe G ist sicher dann fast-auflösbar und erfüllt Bedingung (b) des Zusatz 4, wenn jedes homomorphe Bild $H\neq 1$ von G ein Element $h\neq 1$ enthält, zu dem es nur endlich viele in H konjugierte Elemente gibt. Endlich erzeugbare Gruppen dieser Art sind also NOETHERsch, so daß also dieser Satz von DUGUID-MACLAIN als Spezialfall in unseren Kriterien enthalten ist.

Literatur

BAER, REINHOLD: [1] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955). — [2] Supersoluble groups. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 16—32 (1955). — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [4] Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—437 (1955). — [5] The hypercenter of a group. Acta mathematica **89**, 165—208 (1953). — HALL, PH.: [1] Finiteness conditions for soluble groups. Proc. London Math. Soc. **4**, 419—436 (1954). — HIRSCH, K.: [1] Eine kennzeichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen. Math. Nachr. **4**, 47—49 (1951).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois (USA)

(Eingegangen am 30. Juni 1956)

LEPTIN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 289—327 (1957)

Linear kompakte Moduln und Ringe. II

Von
HORST LEPTIN

Einleitung

Dies ist die Fortsetzung und Ergänzung meiner Arbeit gleichen Titels im 62. Band dieser Zeitschrift. Ich werde hier allerdings, wie auch gelegentlich schon in [8], allgemeinere lineare topologische Moduln und Ringe untersuchen, so insbesondere in den §§ 3 und 6.

Wir übernehmen in dieser Arbeit durchweg die Bezeichnungen, Begriffe und Abkürzungen aus [8], ein l.k. Ring ist also z.B. ein linear kompakter Ring und ein i.e.S.l.k. Modul ein im engeren Sinne linear kompakter, d.h. ein vollständiger l.t. (linear topologischer) Modul, in dessen diskreten Restklassenmoduln die Minimalbedingung gilt. Die Sätze und Hilfssätze aus [8] zitieren wir als Satz L1, Satz L2, ..., (L1), (L2) usw. Wir führen „(+)" als neues Zeichen für die algebraische direkte Summe ein: $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}(+)\mathfrak{B}$ bedeutet, daß der Modul $\mathfrak{M}$ die algebraische direkte Summe seiner Untermoduln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Hier brauchen insbesondere $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht abgeschlossen zu sein. $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ bedeutet dagegen nach wie vor, daß $\mathfrak{M}$ algebraisch und topologisch die direkte Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Ist M irgendeine Menge, so bezeichnen wir mit $\{x|E(x),\ x\in M\}$ oder kürzer $\{x|E(x)\}$ die Teilmenge aller x aus M, welche die Eigenschaft E haben; ist also beispielsweise $\mathfrak{M}$ ein Modul über einem Ring R, so ist $\{\xi|\xi\mathfrak{M}=0,\ \xi\in R\}$ das zweiseitige Unterideal aller $\mathfrak{M}$ anullierenden Elemente aus R. Ist $\{\xi|\xi\mathfrak{M}=0,\ \xi\in R\}=0$, so nennen wir $\mathfrak{M}$ einen *treuen* R-Modul und sagen, R wirkt *treu* auf $\mathfrak{M}$.

§ 1 enthält genauere Untersuchungen über das Radikal eines l.k. Ringes. Wir beweisen zunächst, daß ein treuer l.k. Modul über einem l.k. Ring R genau dann direkte Summe minimaler Untermoduln ist, wenn R halbeinfach ist (Satz 2). Nach Satz L9 ist das Radikal eines i.e.S.l.k. Ringes r-nilpotent. Wir zeigen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt, genauer: Ist der Ring R l.k. und N sein Radikal, so ist N_* das kleinste Ideal, für das der Restklassenring R/N_* in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k. ist (Satz 3). Ferner gilt für das Radikal allgemein die Formel ${}_*N+N_*=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{N^i}=N_\omega$.

Die Ergebnisse von § 1 beantworten nicht die Frage nach der Existenz l.k. Ringe, deren Radikal nicht nilpotent ist ($N_*\neq 0$). In **§ 2** definieren wir nun eine weite Klasse l.k. Ringe, unter ihnen solche, deren Radikal idempotent ist. Wir können allgemeiner die sämtlichen abgeschlossenen idempotenten quasiregulären zweiseitigen Ideale dieser Ringe angeben (Satz 8).

§ 3 dient hauptsächlich zur Vorbereitung auf § 4 und enthält die Definition und Untersuchungen von Matrixringen beliebigen Grades über voll-

ständigen linear topologischen Ringen S. Ist $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so ist der Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ über S definiert als Ring aller hyperstetigen Endomorphismen eines Moduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$, der eine gewisse topologische (jedoch für unendliches $\mathfrak{a}$ nicht tychonoffsche) direkte Summe von $\mathfrak{a}$ zu S isomorphen Summanden ist. Enthält S ein Einselement, so läßt sich $S^{(\mathfrak{a})}$ durch Matrizen $(s_{\mu\nu})$ vom Grade $\mathfrak{a}$ mit Elementen $s_{\mu\nu} \in S$ und summierbaren Spalten $\{s_{\mu\nu}\}_\mu$ beschreiben. Die Definition von $S^{(\mathfrak{a})}$ als Endomorphismenring hat unter anderem den Vorteil, daß man $S^{(\mathfrak{a})}$ damit von vornherein als vollständigen l.t. Ring erhält. Im übrigen kann man $S^{(\mathfrak{a})}$ stets durch Matrizen $(s_{\mu\nu})$ mit Elementen $s_{\mu\nu} \in S^{(1)}$ beschreiben, wobei $S^{(1)}$ der Ring aller hyperstetigen mit den Rechtsmultiplikationen von S vertauschbaren Modulendomorphismen von S ist. Allgemein gilt $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}$. Enthält S eine Eins, so entsprechen die zweiseitigen abgeschlossenen Ideale von $S^{(\mathfrak{a})}$ umkehrbar eindeutig den zweiseitigen abgeschlossenen Idealen von S (Satz 11). Für l.k. S und endliches $\mathfrak{a}$ ist $S^{(\mathfrak{a})}$ stets l.k., für unendliches $\mathfrak{a}$ dagegen nur, falls S i.e.S.l.k. ist, und zwar ist dann auch $S^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k. (Satz 12)! Ein l.k. Matrixring unendlichen Grades ist also stets i.e.S.l.k.. Schließlich bestimmen wir noch das Radikal eines l.k. Ringes $S^{(\mathfrak{a})}$.

In **§ 4** beweisen wir die allgemeine Fassung des Satzes von ARTIN über primäre Ringe mit Minimalbedingung ([2], II, § 9, Satz 2): Ein i.e.S.l.k. primärer Ring mit Eins ist Matrixring über einem i.e.S.l.k. vollständig primären Ring (Satz 16). Dabei heißt ein Ring *primär*, bzw. *vollständig primär*, wenn der Restklassenring nach seinem Radikal einfach, bzw. ein Schiefkörper ist. Bei einem l.k. primären Ring ist dieser Restklassenring dann also nach Satz L12 voller Endomorphismenring über einem Vektormodul. Den Rang dieses Vektormoduls bezeichnen wir als den *Grad* des primären Ringes. Aus § 3 geht hervor, daß die Beschränkung auf i.e.S.l.k. in Satz 16 bei primären Ringen unendlichen Grades notwendig ist. Die Frage nach der Existenz primärer l.k., aber nicht i.e.S.l.k. Ringe unendlichen Grades (die dann natürlich keine Matrixringe sein können) bleibt unbeantwortet.

Die Hauptschwierigkeit beim Beweis des genannten Satzes bildet der Nachweis der Summierbarkeit eines Systems orthogonaler Idempotente des Ringes. Da bei Ringen endlichen Grades diese Summierbarkeit trivial ist, kann man für primäre l.k. Ringe mit Eins das Analogon des Artinschen Satzes schon beweisen, wenn lediglich das Radikal nilpotent ist. Das Problem der Fortsetzbarkeit orthogonaler Idempotente des einfachen Restklassenringes zu orthogonalen Idempotenten des Ringes selbst ist dann sehr einfach lösbar. Dieses Fortsetzbarkeitsproblem ist in anderem Zusammenhang in letzter Zeit übrigens von ZELINSKY behandelt worden [9].

Ein weiteres wichtiges Resultat des vierten Paragraphen ist Satz 15: Ein i.e.S.l.k. Ring mit Eins ist vollständige direkte Summe von unzerlegbaren Linksidealen, welche von minimalen orthogonalen Idempotenten erzeugt werden. Mit dem § 4 beenden wir unsere Untersuchungen l.k. Ringe.

In **§ 5** entwickeln wir in allgemeiner Form die Theorie der reinen Homomorphismen, die wir in [6] für Prüfersche Gruppen aufgestellt hatten. Der Hauptsatz dieser Theorie, Satz 18, gilt für l.k. Moduln mit kommutativem Multiplikatorenring: Das System $\Phi(\mathfrak{M}, A)$ der reinen Homomorphismen des l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ auf direkte Summen aus Moduln eines Systems A ist induktiv geordnet. Wir haben hier die reinen Homomorphismen etwas anders definiert als in [6]; für den Fall, daß A aus einrangigen Prüferschen Gruppen besteht, stimmen jedoch beide Definitionen überein. Der Beweis von Satz 18 verläuft wesentlich anders als der des Satzes (4, 5) aus [6]. Dieser letzte Satz läßt sich mit Hilfe des Dualitätsatzes natürlich auch aus den Kulikoffschen Sätzen über die Basisuntergruppen gewinnen (vgl. etwa [3]), beschränkt man sich auf kompakte Prüfersche Gruppen, so ergibt die Übertragung des Beweises von Theorem 1 aus [3] sogar einen etwas einfacheren Beweis der Sätze aus [6], der sich auch leicht auf den Fall beliebiger Prüferscher Gruppen übertragen läßt. Diese Möglichkeit der Dualisierung ist nun bei den hier behandelten Moduln nicht mehr gegeben, deshalb scheint mir die Aussage von Satz 18 tiefer zu liegen, als die von Satz (4, 5) aus [6]. Ich möchte noch bemerken, daß mir während der Entstehung von [6] die Ergebnisse von KULIKOFF und FUCHS [3] nicht bekannt waren. Satz 18 erlaubt, sämtliche Sätze aus [6], § 5 fast wörtlich auf l.k. Moduln über beliebigen vollständigen diskreten Bewertungsringen zu übertragen. Wir formulieren in § 5 dieser Arbeit deshalb nur die wichtigsten dieser Sätze, ohne näher auf Beweise einzugehen.

Als neues wesentliches Ergebnis erhalten wir den Satz, daß der Kern eines reinen Homomorphismus stets algebraisch direkter Summand ist (Satz 17). Hieraus folgt ein Satz, der neues Licht auf die Bedeutung des von PRÜFER eingeführten Begriffs der Servanzuntergruppe oder, wie man jetzt sagt, der reinen Untergruppe wirft. Bekanntlich ist jede Untergruppe einer (diskreten) abelschen Gruppe rein, falls sie als direkter Summand der Gruppe auftritt; die Umkehrung hiervon ist jedoch nicht richtig, die Torsionsuntergruppe einer gemischten abelschen Gruppe ist z.B. stets rein, ohne im allgemeinen direkt abspaltbar zu sein. Ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{R}$ eines l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring ist rein, falls er direkter Summand ist, und zwar ist er auch dann rein, wenn er lediglich *algebraischer* direkter Summand ist. *Hiervon gilt nun auch die Umkehrung*, d.h.: Jeder abgeschlossene reine Untermodul eines l.k. Moduls über einem vollständigen diskreten Bewertungsring ist algebraischer direkter Summand (Satz 21). An anderer Stelle zeigen wir, daß dieser Satz auch für beliebige abelsche Gruppen gilt. Dieser Satz gestattet, die algebraische Struktur der kompakten abelschen Gruppen explizit anzugeben.

§ 6 schließlich enthält die Dualitätstheorie linear topologischer Moduln über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B. Da wir den Modellfall $B =$ Ring der ganzen p-adischen Zahlen bereits in [6] und [7] ausführlich behandelt haben, konnten wir uns bei den Beweisen dieses letzten Paragraphen meist recht kurz fassen. Der Dualitätsatz (Satz 23) gilt in derselben Fassung wie in [7], S. 261.

§ 1

R sei ein Ring. Einen l.k. R-Modul mit gröbster linearer Topologie bezeichnen wir als *grob linear kompakt (g.l.k.)*. Wir beginnen mit einer Anzahl einfacher Sätze und Hilfssätze.

(1.1) *Sei $\mathfrak{M}$ ein g.l.k. R-Modul und $\mathfrak{N}$ ein Untermodul. $\mathfrak{M}$ ist genau dann i.e.S.l.k., wenn $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}$ in der durch $\mathfrak{M}$ induzierten Topologie i.e.S.l.k. sind.*

Wegen Satz L5 ist nur zu beweisen, daß die Bedingung hinreicht. Sei $\mathfrak{U}$ ein echter offener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Nach Satz L4 ist zu zeigen, daß $\mathfrak{U}$ minimale Obermoduln hat. Das stimmt nach Voraussetzung, falls $\mathfrak{N} < \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{N} \not\subset \mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ offen, hat also nach Voraussetzung in $\mathfrak{N}$ einen minimalen Obermodul $\mathfrak{Q}$. Offenbar ist dann $\mathfrak{Q} + \mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ ein von $\mathfrak{U}$ verschiedener minimaler Obermodul von $\mathfrak{U}$.

Satz 1. *R sei ein grob linear kompakter Ring und $\mathfrak{M}$ ein grob linear kompakter treuer R-Modul. R ist dann und nur dann im engeren Sinne linear kompakt, wenn $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne linear kompakt ist.*

Wegen Satz L7 ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k. ist, falls dieses auch für R zutrifft. Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Ist $R(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) = 0$, so ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ eine diskrete Prüfersche Gruppe und hat also minimale Untermoduln, d.h. $\mathfrak{U}$ hat minimale Obermoduln. Ist $R(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) \neq 0$, so gibt es ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $Rx \not\subset \mathfrak{U}$. Ist L der Annullator von x modulo $\mathfrak{U}$, so ist Rx modulo $\mathfrak{U}$ zum i.e.S.l.k. und diskreten Faktormodul R/L isomorph und hat also minimale Untermoduln. Somit hat $\mathfrak{U}$ in jedem Falle minimale Obermoduln. Hieraus folgt nach Satz L4 die Behauptung.

Ist R ein Ring mit Einselement 1, so heißt ein R-Modul $\mathfrak{M}$ bekanntlich *unitär*, wenn $1x = x$ gilt für alle x aus $\mathfrak{M}$.

Satz 2. *Sei R ein linear kompakter Ring mit Eins und $\mathfrak{M}$ ein unitärer treuer linear kompakter R-Modul. $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann direkte Summe minimaler Untermoduln, wenn R halbeinfach ist. Die im engeren Sinne linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$ läßt sich in diesem Falle nicht verfeinern.*

Die letzte Behauptung folgt fast unmittelbar aus (L5). Ist nämlich $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so wird mit $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ von minimalen Untermoduln erzeugt. Nach (L5) ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ also direkte Summe endlich vieler minimaler Untermoduln, d.h. in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ gilt die Minimal- (und natürlich auch die Maximal-) Bedingung. Folglich ist $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k..

a) $\mathfrak{M}$ werde von minimalen Untermoduln erzeugt. Da das Radikal N von R minimale Untermoduln annulliert, folgt $N\mathfrak{M} = 0$, also $N = 0$, d.h. R ist halbeinfach.

b) Sei R halbeinfach. Nach Satz L13 ist R direkte Summe einfacher l.k. Ringe R_i und in der gröbsten l.k. Topologie i.e.S.l.k.. Nach Satz 1 ist dann auch $\mathfrak{M}$ in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k.. Der Zerlegung $R = \sum_i R_i$ entspricht eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \sum_i \mathfrak{M}_i$ wobei die $\mathfrak{M}_i$ unitäre treue R_i-Moduln sind. Wir können uns also auf den Fall eines einfachen Ringes R beschränken.

R ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper. Ist e ein unzerlegbares Idempotent aus R, so ist Re ein abgeschlossenes und minimales Linksideal aus R. Ist M ein minimales Linksideal aus R und a ein von 0 verschiedenes Element aus M, so gilt $0 \neq Ra \subset M$, folglich $Ra = M$, M ist also abgeschlossen. Das von den minimalen Linksidealen erzeugte Ideal, der Sockel von R, ist zweiseitig und liegt folglich dicht in R, d.h. R wird von seinen minimalen Linksidealen erzeugt. Nun sei $x \in \mathfrak{M}$ und A der Annullator von x. Mit R wird auch der Faktormodul R/A und wegen $Rx \cong R/A$ folglich auch $\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $\mathfrak{M}$ direkte Summe minimaler Untermoduln ist. Hierzu betrachten wir Systeme $Q = \{\mathfrak{Q}\}$ unabhängiger maximaler offener Untermoduln aus $\mathfrak{M}$. Dabei nennen wir die $\mathfrak{Q} \in Q$ unabhängig, wenn für je endlich viele Untermoduln $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$ aus Q der Faktormodul $\mathfrak{M}/\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{Q}_i$ k-gliedrige direkte Summe minimaler Untermoduln ist. Diese „unabhängigen" Systeme Q sind durch „$\subset$" induktiv geordnet. Sei Q unabhängig und $\mathfrak{D} = \bigcap_{\mathfrak{Q} \in Q} \mathfrak{Q}$. Ist $\mathfrak{D} \neq 0$, so wählen wir ein maximales offenes $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{Q}$. Ein solches $\mathfrak{Q}$ existiert, da wir schon wissen, daß $\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt wird und da wegen der vor a) gemachten Bemerkung ein offener Untermodul (und damit auch 0) Durchschnitt maximaler offener Untermoduln ist. Sind $\mathfrak{Q}_1$ bis $\mathfrak{Q}_k$ aus Q, so folgt aus $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{Q}$ erst recht $\bigcap_1^k \mathfrak{Q}_i \not\subset \mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q} + \bigcap_1^k \mathfrak{Q}_i$ und somit $\bigcap_1^k \mathfrak{Q}_i / \mathfrak{Q} \cap \left(\bigcap_1^k \mathfrak{Q}_i\right) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{Q} \neq 0$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_k$ $k+1$-gliedrige direkte Summe sein muß. Folglich ist $Q \cup \{\mathfrak{Q}\}$ unabhängig. Sei nun Q_0 ein maximales unabhängiges System. Nach unserer Überlegung ist dann $\bigcap_{\mathfrak{Q} \in Q_0} \mathfrak{Q} = 0$.

Wir indizieren die $\mathfrak{Q} \in Q_0$ mit den Elementen μ einer Menge I und setzen $\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M}/\mathfrak{Q}_\mu$ für $\mathfrak{Q}_\mu \in Q_0$. Mit x_μ bezeichnen wir die Restklasse von x aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}_\mu$. Durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_\mu x_\mu \in \sum_\mu \mathfrak{M}_\mu = \widetilde{\mathfrak{M}}$$

ist dann ein Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definiert, dessen Kern verschwindet: $\varphi(x) = 0$ bedeutet $x \in \mathfrak{Q}_\mu$ für alle $\mu \in I$, also $x = 0$. Um zu beweisen, daß φ ein Isomorphismus *auf* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist, müssen wir zeigen, daß zu endlich vielen vorgeschriebenen $x_{\mu_i} \subset \mathfrak{M}_{\mu_i}$ ein $x \in \mathfrak{M}$ existiert, so daß die μ_i-te Komponente von $\varphi(x)$ gleich x_{μ_i} ist. Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_{\mu_i} + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{Q}_{\mu_j}$ gibt es ein $x_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{Q}_{\mu_j}$ mit $x_i + \mathfrak{Q}_{\mu_i} = x_{\mu_i}$. Die Summe dieser x_i genügt offenbar der an x gestellten Bedingung. φ ist stetig und da alle auftretenden Moduln i.e.S.l.k. sind, sogar topologisch. Damit ist alles bewiesen.

Einige Folgerungen aus Satz 2:

(1.2) *Ein unitärer l.k. Modul über einem halbeinfachen l.k. Ring R ist direkte Summe minimaler Untermoduln. Ist ^{D} einfach, so sind alle minimalen Untermoduln isomorph zu den minimalen Linksidealen aus R.*

Die letzte Behauptung folgt leicht aus der unter b) im Beweis von Satz 2 vorkommenden Isomorphie $Rx \cong R/A$. (1.2) verallgemeinert den Hauptsatz über l.k. Vektorräume aus [5], S. 83.

(1.3) *Ein von seinen minimalen Untermoduln erzeugter l.k. Modul ist sogar direkte Summe minimaler Untermoduln.*

Der Ring der hyperstetigen Endomorphismen des Moduls ist nämlich halbeinfach.

(1.4) *Ein halbeinfacher l.k. Ring R ist stets i.e.S.l.k..*

R enthält eine Eins und ist deshalb unitärer R-Modul.

(1.5) *Ein g.l.k. Ring R ist genau dann i.e.S.l.k., wenn sein Radikal N i.e.S.l.k. ist.*

Nach (1.4) ist nämlich R/N stets i.e.S.l.k.. Anwendung von (1.1) ergibt dann (1.5).

Wir definieren die absteigende Kette von zweiseitigen im Radikal N des l.k. Ringes R liegenden Idealen $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_\lambda \supset \cdots$ wie in [8], S. 253.

(1.6) *Ist $N_{\lambda+1} = 0$ und R/N_λ in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k., so ist auch R in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k..*

Sei R g.l.k.; $N_{\lambda+1} = 0$ bedeutet $N_\lambda \cdot N = 0$, N ist also ein l.k. R/N_λ-Modul. Aus Satz L3 und Satz 1 folgt, daß N i.e.S.l.k. ist. Nach (1.5) ist also auch R i.e.S.l.k.

Wir werden nun die in [8] definierten Ideale N_* und ${}_*N$ eines l.k. Ringes R untersuchen.

Satz 3. *Sei R ein linear kompakter Ring und N sein Radikal. N_* ist das kleinste zweiseitige Ideal, für das der Restklassenring in der gröbsten linearen Topologie im engeren Sinne linear kompakt ist. N_* ist überdies der Durchschnitt aller abgeschlossenen Linksideale, deren grob linear kompakte Faktormoduln im engeren Sinne linear kompakt sind.*

Beweis. R/N ist i.e.S.l.k.. Ist R/N_μ in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k., so ist $R/N_{\mu+1}$ nach (1.6) ebenfalls in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k.. Ist λ Limeszahl und sind alle R/N_μ für $\mu < \lambda$ i.e.S.l.k., so R/N_λ als projektiver Limes der R/N_μ ebenfalls. Folglich ist R/N_* in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k.. Sei A ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal und $R' = R/A$ i.e.S.l.k.. $N' = (N + A)/A$ ist nach Satz L14 das Radikal von R' und nach Satz L9 ist $N'_* = 0$. Wir setzen $M' = (N_* + A)/A$. Aus

$$\overline{(N_* + A)(N + A)} + A = \overline{N_* \cdot N} + A = N_* + A$$

folgt $M'N' = M'$ und folglich $M' \subset N'_* = 0$, d.h. $N_* \subset A$. Sei nun L ein abgeschlossenes Linksideal und R/L i.e.S.l.k.. Ist A der Annullator von R/L, so ist R/A in der g.l.k. Topologie sogar i.e.S.l.k. und folglich gilt

$$N_* = \overline{N_* \cdot N} \subset \overline{N_* R} \subset \overline{AR} \subset L.$$

Folgerungen:

(1.7) *Ein g.l.k. Ring R ist dann und nur dann i.e.S.l.k., wenn sein Radikal r-nilpotent ist.*

(1.8) *Ist $\mathfrak{M}$ ein g.l.k. R-Modul, so ist die Vereinigung aller i.e.S.l.k. Untermoduln ein maximaler i.e.S.l.k. Untermodul $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}_*$ aller Untermoduln, deren Faktormoduln in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k. sind, ist der kleinste Untermodul, für den $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_*$ in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k. ist. Ist N das Radikal von R, so ist*

$$\mathfrak{M}^* = \{x \mid N_* x = 0,\ x \in \mathfrak{M}\} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{M}_* = \overline{N_* \mathfrak{M}}.$$

Beweis. $\mathfrak{M}^* = \{x \mid N_* x = 0\}$ ist ein R/N_*-Modul, nach Satz 2, Satz 3 und Satz L3 also i.e.S.l.k.. Ist $\mathfrak{A}$ ein i.e.S.l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $A \subset R$ der Annullator von $\mathfrak{A}$, so ist R/A nach Satz L7 i.e.S.l.k., nach Satz 3 liegt N_* also in A, d.h. $N_* \mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}^*$. Damit ist der erste Teil von (1.8) bewiesen.

Ist $\mathfrak{M}_* = \overline{N_* \mathfrak{M}}$, so ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_*$ ein R/N_*-Modul, also in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k.. Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ i.e.S.l.k., so muß wieder wegen Satz 3 und Satz L7 N_* im Annullator von $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ liegen, d.h. es ist $N_* \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{M}_* \subset \mathfrak{A}$. Damit ist (1.8) in allen Teilen bewiesen.

Satz 4. *Ist R ein linear kompakter Ring mit dem Radikal N, so ist entweder*

$$_*N = N_* = N_k \quad \textit{für ein } k < \omega = \textit{erste transfinite Ordinalzahl}$$

oder es gilt die Formel

$$_*N + N_* = N_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{N^i}.$$

Beweis. Ist $N_* = N_k$, $k < \omega$, so ist $\overline{N \cdot {}_kN} = \overline{N^{k+1}} = N_k = {}_kN$, also ${}_*N = {}_kN = N_k$. Genauso folgt $N_* = N_k$ aus ${}_*N = {}_kN$. Die zweite Formel des Satzes ist natürlich auch in diesem Falle richtig. Um sie allgemein zu beweisen, sei R zunächst i.e.S.l.k., d.h. $N_* = 0$. Wir müssen dann ${}_*N = N_\omega$ beweisen. Ist L ein offenes Linksideal, so gilt in R/L die Minimalbedingung und aus (L3) folgt also

$${}_\omega N + L = \bigcap_{i<\omega} (N^i + L) = N^k + L$$

für alle $k \geq n_0(L)$. Daraus folgt dann weiter

$${}_{\omega+1}N + L = N \cdot N^k + L = N^{k+1} + L = {}_\omega N + L,$$

also, da L beliebig war: ${}_{\omega+1}N = {}_\omega N = {}_*N$ wie behauptet.

Wir erhalten die Gültigkeit der Formel aus Satz 4 im allgemeinen Fall aus dem eben behandelten Spezialfall, indem wir modulo N_* rechnen. Da nach Satz 3 der Restklassenring R/N_* in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k. ist, gilt wegen $N_* \subset N_\omega$ die Formel

$$\overline{N \cdot {}_\omega N} + N_* = N_\omega, \quad \text{d.h.} \quad {}_{\omega+1}N + N_* = N_\omega.$$

Die gewohnten Induktionsschlüsse führen nun wie üblich zur Behauptung von Satz 4, der damit bewiesen ist.

Wegen (1.7) haben wir als Folgerung:

(1.9) *Ist R i.e.S.l.k., so ist ${}_*N = N_\omega$.*

Etwas allgemeiner folgt aus Satz 4:

(1.10) *Liegt* N_* *in* ${}_{\omega+1}N$, *so ist* ${}_*N = N_\omega$.

Aus ${}_*N \subset {}_{\omega+1}N$ und $N_* \subset {}_{\omega+1}N$ folgt dann nämlich ${}_{\omega+1}N = {}_\omega N = {}_*N$. Umgekehrt folgt aus ${}_*N \subset N_{\omega+1}$ natürlich genauso $N_* = N_\omega$.

(1.11) *In kommutativen l.k. Ringen ist* $N_* = N_\omega$.

Denn in ihnen ist ${}_*N = N_*$, also $N_* = {}_*N + N_* = N_\omega$.

Der Ring R sei von nun an i.e.S.l.k. und N sei sein Radikal. Wir bezeichnen die kleinste Ordnungszahl τ mit $N_\tau = 0$ als den *Index* von N, bzw. von R (vgl. [4], p. 306). Diesen Index wollen wir nun bestimmen.

Ist $\mathfrak{M}$ ein diskreter i.e.S.l.k. Modul, so sei ${}^0\mathfrak{M} = 0$. Ist ${}^\mu\mathfrak{M}$ schon als Untermodul von $\mathfrak{M}$ definiert, so sei ${}^{\mu+1}\mathfrak{M}$ das Erzeugnis aller minimalen Obermoduln von ${}^\mu\mathfrak{M}$. Ist ${}^\mu\mathfrak{M}$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl definiert, so sei ${}^\lambda\mathfrak{M} = \bigcup_{\mu<\lambda} {}^\mu\mathfrak{M}$. Die kleinste Ordnungszahl σ mit ${}^\sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ nennen wir die *Schichtzahl* von $\mathfrak{M}$. Als Schichtzahl eines beliebigen i.e.S.l.k. Moduls bezeichnen wir die obere Grenze der Schichtzahlen seiner diskreten Faktormoduln.

(1.12) *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein diskreter Modul,* S *ein topologischer Operatorenring von* $\mathfrak{A}$ *und die Abbildung* $(s, a) \to sa$ *von* $S \times \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}$ *stetig. Ist* L *ein Linksideal aus* S, $\bar{L}$ *die abgeschlossene Hülle von* L *und* $\mathfrak{U}$ *ein Untermodul von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $L\mathfrak{U} = \bar{L}\mathfrak{U}$.

Sei $\sum \bar{a}_i u_i \in \bar{L}\mathfrak{U}$. Der Annullator H_i von u_i ist in S offen, es existiert also ein $a_i \in L$ mit $a_i \equiv \bar{a}_i \pmod{H_i}$ und folglich $a_i u_i = \bar{a}_i u_i$, d.h. $\sum \bar{a}_i u_i = \sum a_i u_i \in L\mathfrak{U}$.

(1.13) *Sei* R *ein i.e.S.l.k. Ring mit Eins und Radikal* N. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein i.e.S.l.k. diskreter unitärer treuer* R*-Modul, so gilt für alle* μ:

$$ {}^\mu\mathfrak{M} = \{x \mid N_\mu x = 0\}. \quad (N_0 = R!). $$

Wir setzen für den Beweis $\mathfrak{M}_\mu = \{x \mid N_\mu x = 0\}$. Die Behauptung stimmt für $\mu = 0$, wir nehmen an, sie sei richtig für $\varkappa$. Aus $N\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset {}^\varkappa\mathfrak{M}$ folgt dann wegen (1.12):

$$ N_{\varkappa+1}\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} = N_\varkappa \cdot N\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset N_\varkappa\,{}^\varkappa\mathfrak{M} = 0, $$

also ${}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{\varkappa+1}$. Umgekehrt liegt $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ auch in ${}^{\varkappa+1}\mathfrak{M}$, denn aus $N(\mathfrak{M}_{\varkappa+1}/{}^\varkappa\mathfrak{M}) = 0$ folgt nach Satz 2, daß $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ modulo ${}^\varkappa\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt wird. Ist nun ${}^\mu\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl, so folgt $N_\lambda\,{}^\lambda\mathfrak{M} = N_\lambda\left(\bigcup_{\mu<\lambda} {}^\mu\mathfrak{M}\right) = 0$, also ${}^\lambda\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_\lambda$. Ist $x \in \mathfrak{M}_\lambda$, so ist $N_\lambda x = \bigcap_{\mu<\lambda} N_\mu x = 0$; da $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k. ist, muß also $N_\mu x = 0$ für ein $\mu < \lambda$ sein, d.h. $x \in \mathfrak{M}_\mu = {}^\mu\mathfrak{M} \subset {}^\lambda\mathfrak{M}$. Folglich ist auch hier ${}^\lambda\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\lambda$, (1.13) gilt deshalb für alle μ.

Satz 5. *Ist* R *ein im engeren Sinne linear kompakter Ring mit Eins, und* $\mathfrak{M}$ *ein unitärer treuer im engeren Sinne linear kompakter* R*-Modul, so ist der Index von* R *gleich der Schichtzahl von* $\mathfrak{M}$.

Der Beweis folgt für diskretes $\mathfrak{M}$ unmittelbar aus (1.13). Sei τ der Index, N das Radikal von R und σ die Schichtzahl von $\mathfrak{M}$. Ist A ein zweiseitiges

abgeschlossenes Ideal aus R, so zeigt man wie üblich $((N+A)/A)_\mu = (N_\mu+A)/A$ für alle μ. Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $C = C_\mathfrak{U}$ der Annullator des diskreten Faktormoduls $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$, so gilt insbesondere $((N+C)/C)_\tau = 0$, wegen (1.13) ist also die Schichtzahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ höchstens gleich τ, d.h. es ist $\sigma \leq \tau$. Umgekehrt folgt aus (1.13) und Satz L 14 aber auch $((N+C)/C)_\sigma = 0$, also $N_\sigma + C = C$, d.h. $N_\sigma < C$ und somit $N_\sigma < \bigcap_\mathfrak{U} C_\mathfrak{U} = 0$, $N_\sigma = 0$, $\tau \leq \sigma$. Damit ist Satz 5 bewiesen. Folgerung:

(1.14) *Für einen i.e.S.l.k. Ring mit Eins stimmen Index und Schichtzahl überein.*

Denn der Ring ist ein unitärer i.e.S.l.k. Modul mit sich selbst als Operatorenring und verschwindendem Annullator. Daß man in (1.14) auf die Existenz der Eins nicht verzichten kann, zeigt jeder endliche Zeroring.

Wir haben in [8] bewiesen, daß das Radikal eines l.k. Ringes stets abgeschlossen ist. In Wirklichkeit zeigt der Beweis zu Satz L 8 aber mehr, nämlich:

(1.15) *Die Menge der links-quasiregulären Elemente eines l.k. Ringes ist abgeschlossen.*

Hieraus folgt bekanntlich die Abgeschlossenheit des Radikals. Wir können (1.15) nun auch unmittelbar aus dem folgenden für beliebige l.t. Ringe gültigen Kriterium erhalten:

Satz 6. *Die Menge Q der links-quasiregulären Elemente eines linear topologischen Ringes S ist abgeschlossen, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes nicht links-quasireguläre Element $a \in S$ ist die abgeschlossene Hülle des Ideals $X(a) = \{x - xa\}_{x \in S}$ von S verschieden.*

Da für l.k. Ringe $X(a) = \overline{X(a)}$ ist, folgt (1.15) aus diesem Kriterium. Sei nun für S die Bedingung von Satz 6 erfüllt, $\bar{a} \in \overline{Q}$ und L ein offenes Linksideal aus S. Es existiert ein $a \in Q$ mit $a \equiv \bar{a} \pmod{L}$, also $x - xa \equiv x - x\bar{a} \pmod{L}$ für alle $x \in S$, d.h. es ist

$$S = X(a) < X(\bar{a}) + L, \qquad S = X(\bar{a}) + L$$

für alle offenen Linksideale L. Hieraus folgt $\overline{X(\bar{a})} = S$, $\bar{a}$ muß also links-quasiregulär sein, d.h. $\overline{Q}$ liegt in Q und somit ist $Q = \overline{Q}$ abgeschlossen.

Zum Schluß dieses Paragraphen noch eine Bemerkung, deren Beweis wir dem Leser überlassen:

(1.16) *Ist R i.e.S.l.k. und N das Radikal, so ist jedes zweiseitige Erzeugendensystem von N modulo N_2 auch ein zweiseitiges Erzeugendensystem von N.*

Hierbei heißt eine Teilmenge $E < R$ zweiseitiges Erzeugendensystem des zweiseitigen Ideals $A < R$, falls A das kleinste abgeschlossene E enthaltende zweiseitige Ideal aus R ist. Aus (1.16) folgt z.B.: Ein i.e.S.l.k. kommutativer Integritätsbereich R mit Radikal N, offenem N_2 und für den $\Gamma = R/N$ ein Körper der Charakteristik 0 ist, ist isomorph zu einem Ring aller formalen Potenzreihen in endlich vielen Unbestimmten über Γ.

§ 2

Wir haben uns in unseren Untersuchungen bisher nicht um Existenzfragen gekümmert, es könnte also durchaus sein, daß ein Teil unserer Ergebnisse aus leeren Aussagen besteht, daß etwa z.B. gar keine i.e.S.l.k. Ringe mit einem Index größer als ω existieren. Wir wissen auch nicht, ob das Radikal eines l.k. Ringes nicht stets nilpotent ist. Um derartige Fragen beantworten zu können, werden wir nun eine umfangreiche Klasse l.k. Ringe konstruieren, die uns zeigen wird, daß manche unserer Ergebnisse in gewissem Sinne optimal sind: Wir werden z.B. sehen, daß jede Ordnungszahl als Index eines i.e.S.l.k. Ringes vorkommt und daß das Radikal eines l.k. Ringes nicht immer nilpotent ist.

Im folgenden sei I stets eine total geordnete Menge und $\tilde{I}$ die vollständige Erweiterung von I, d.h. im wesentlichen die Menge der Schnitte von I. R_0 sei ein l.k. Ring und zu jedem $i \in I$ sei ein diskreter l.k. R_0-Modul P_i gegeben. Für ein Element $x = \sum_{i \in I} x_i$ der vollständigen direkten Summe aller P_i sei stets $\chi(x)$ die geordnete Menge der Indizes i aus I, für die $x_i \neq 0$ ist. Ist α eine geordnete Menge, bzw. ein Ordnungstyp, so bezeichnen wir mit α^* immer die invers geordnete Menge, bzw. den zu einer invers geordneten Menge gehörenden Ordnungstyp. So ist ω^* z.B. der Ordnungstyp der negativen ganzen Zahlen in der natürlichen Ordnung.

Sei ι der Ordnungstyp von I. Die *ι-induktive direkte Summe* der P_i, $i \in I$, ist der R_0-Modul

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_\iota P_i$$

aller Elemente $x = \sum x_i$ der vollständigen direkten Summe der P_i, für welche $\chi(x)^*$ wohlgeordnet ist. Für jedes $x \in \mathfrak{M}$ enthält $\chi(x)$ dann einen maximalen Index, den wir mit $|x|$ bezeichnen. Der *Kopf* des Elementes $x = \sum x_i \in \mathfrak{M}$ ist der Summand $x_{|x|}$, d.h. der Summand mit maximalem Index. Für $k \in \tilde{I}$ seien Untermoduln $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{U}_k$ definiert durch

$$\mathfrak{V}_k = \{x \mid |x| < k\}; \qquad \mathfrak{U}_k = \{x \mid |x| \leq k\}.$$

Für $k \notin I$ ist $\mathfrak{V}_k = \mathfrak{U}_k$, sonst $\mathfrak{V}_k = \mathfrak{U}_k + P_k$. Für $k \notin I$ hat $\mathfrak{V}_k$ keinen minimalen Obermodul. Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir den aus den Untermoduln $\mathfrak{V}_k$, $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{V}_k + Z_k$ mit R_0-invariantem Untermodul $Z_k \subset P_k$ (für $k \in I$) gebildeten Filter und R sei der Ring aller bezüglich $\boldsymbol{B}$ hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_\iota P_i$. R enthält in natürlicher Weise R_0 und die Projektionen π_i von $\mathfrak{M}$ auf die Summanden P_i. Schließlich bezeichnen wir für $i, j \in I$, $i < j$, mit Θ_{ji} den Bereich aller Homomorphismen von P_j in P_i. Nun machen wir die

Voraussetzung Θ. Für alle i und j aus I mit $i < j$ und jedes $x \neq 0$ aus P_j ist $P_i = x\Theta_{ji}$.

Satz 7. *Unter der Voraussetzung Θ ist die induktive direkte Summe $\mathfrak{M}$ der P_i, $i \in I$, in der diskreten Topologie ein linear kompakter R-Modul.*

Sei $i \in I$, $x_i \neq 0$ aus P_i und $z = \sum_{j<i} z_j \in \mathfrak{V}_i$. Wegen Θ existiert zu jedem Summanden $z_j \neq 0$ ein Homomorphismus ϑ_{ij} von P_i in P_j mit $x_i\vartheta_{ij} = z_j$.

Ist $y=\sum y_k\in\mathfrak{M}$, so ist durch $y\to\sum_{j<i} y_i\vartheta_{ij}$ (Summe über j!) mit den eben betrachteten ϑ_{ij} ein Homomorphismus ϑ von $\mathfrak{M}$ definiert, der offensichtlich bezüglich $\boldsymbol{B}$ hyperstetig ist und deshalb zu R gehört. Ferner gilt nach Konstruktion $x_i\vartheta=z\in\mathfrak{V}_i$. Da z beliebig war, folgt $\mathfrak{V}_i\subset(x_i)$, wobei wie üblich (x_i) den von x_i erzeugten R-Untermodul von $\mathfrak{M}$ bezeichne. Sei nun $\mathfrak{W}$ ein beliebiger R-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Sind die $|x|$ für $x\in\mathfrak{W}$ in I nicht beschränkt, so folgt aus unserer Überlegung $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{V}_i=\mathfrak{M}\subset\mathfrak{W}$, d.h. $\mathfrak{W}=\mathfrak{M}$. Wir können also annehmen, daß die $|x|$ in I beschränkt sind. Dann existiert in $\tilde{I}$ die obere Grenze m der $|x|$, $x\in\mathfrak{W}$. Zu $i<m$ gibt es dann ein $k\in I$ mit $i<k\leq m$ und ein $x\in\mathfrak{W}$ mit $|x|=k$. Hiermit gilt folglich

$$\mathfrak{V}_i\subset\mathfrak{V}_k\subset(\pi_k x)\subset(x)\subset\mathfrak{W},\qquad\text{d.h. aber}\qquad\mathfrak{V}_m\subset\mathfrak{W}.$$

Liegt m in I, so gilt nach Definition von m:

$$\mathfrak{V}_m\subset\mathfrak{W}\subset\mathfrak{V}_m+P_m=\mathfrak{U}_m,$$

also (die Projektion π_m liegt in R!) $\mathfrak{W}=\mathfrak{V}_m+Z_m$ mit $Z_m\in P_m$, d.h. $\mathfrak{W}\in\boldsymbol{B}$. Ist $m\notin I$, so ist für $x\in\mathfrak{W}$ stets $|x|<m$ und folglich $x\in\mathfrak{V}_m$, d.h. $\mathfrak{W}\subset\mathfrak{V}_m$, also $\mathfrak{W}=\mathfrak{V}_m\in\boldsymbol{B}$. Damit ist gezeigt:

(2.1) *Die Moduln aus* $\boldsymbol{B}$ *sind die einzigen* R*-invarianten Untermoduln von* $\mathfrak{M}$.

Nun sei $\boldsymbol{A}_1=\{x_\mu+\mathfrak{A}_\mu\}$ ein Filter von Restklassen R-invarianter Untermoduln $\mathfrak{A}_\mu$. Wir sagen, ein Untermodul $\mathfrak{A}$ *gehört zu* $\boldsymbol{A}_1$, falls $\boldsymbol{A}_1$ eine Restklasse von $\mathfrak{A}$ enthält. Wir können annehmen, daß mit jedem zu $\boldsymbol{A}_1$ gehörenden Untermodul auch alle Obermoduln in $\mathfrak{M}$ zu $\boldsymbol{A}_1$ gehören. Wir ersetzen $\boldsymbol{A}_1$ durch einen äquivalenten Filter $\boldsymbol{A}_2$, indem wir alle Restklassen $x_\mu+\mathfrak{A}_\mu$ aus $\boldsymbol{A}_1$ fortlassen, für welche $\mathfrak{A}_\mu$ einen zu $\boldsymbol{A}_1$ gehörenden Untermodul $\mathfrak{U}_i\in\boldsymbol{B}$ enthält. Es gibt nun zwei Fälle:

1. Nicht alle zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln haben die Form $\mathfrak{U}_i$. Dann gibt es einen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermodul $\mathfrak{A}$, der nach (2.1) die Form

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{V}_k+Z_k,\qquad Z_k\in P_k,\qquad k\in I,$$

oder die Form

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{V}_k,\qquad k\notin I,$$

hat. $\mathfrak{V}_k$ kann keinen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden echten Untermodul $\mathfrak{B}$ enthalten; ein solcher hätte nämlich die Form $\mathfrak{V}_i$, bzw. $\mathfrak{V}_i+Z_i$ mit $i<k$. Es gäbe dann ein $j\in I$ mit $i\leq j<k$ und $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{U}_j\subset\mathfrak{V}_k\subset\mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{U}_j$ würde zu $\boldsymbol{A}_2$ gehören und in $\mathfrak{A}$ liegen, was der Voraussetzung über $\mathfrak{A}$ widerspräche. Somit liegt $\mathfrak{V}_k$ in allen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln. Für $k\notin I$ folgt, daß dann $\mathfrak{V}_k=\mathfrak{A}$ der kleinste zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörende Untermodul ist, so daß $\downarrow\boldsymbol{A}_2=\downarrow\boldsymbol{A}_1=x+\mathfrak{A}$ ist. Für $k\in I$ bilden die Restklassen der zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden in $\mathfrak{U}_k$ enthaltenen Untermoduln einen zu $\boldsymbol{A}_2$ äquivalenten Filter $\boldsymbol{A}_3$. Ist $x+\mathfrak{A}\in\boldsymbol{A}_3$, so liegen alle Restklassen des Filters $\boldsymbol{A}_3'=\{x_\mu-x+\mathfrak{A}_\mu\}_{x_\mu+\mathfrak{A}_\mu\in\boldsymbol{A}_3}$ in $\mathfrak{U}_k$ und alle $\mathfrak{A}_\mu$ enthalten $\mathfrak{V}_k$. Da $\mathfrak{U}_k/\mathfrak{V}_k\cong P_k$ und P_k l.k. ist, muß dann $\downarrow\boldsymbol{A}_1=\downarrow\boldsymbol{A}_2=\downarrow\boldsymbol{A}_3=x+\downarrow\boldsymbol{A}_3'\neq\emptyset$ sein.

2. Alle zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln haben die Form $\mathfrak{U}_i$. Sei J eine konfinale invers wohlgeordnete Teilmenge der Menge aller Indizes i, für welche $\mathfrak{U}_i$ zu $\boldsymbol{A}_2$ gehört. Der Filter $\boldsymbol{A}_3$ aller Restklassen $x_i+\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_2$ mit $i \in J$ ist dann zu $\boldsymbol{A}_2$ äquivalent. Sind $x_i+\mathfrak{U}_i$ und $x_j+\mathfrak{U}_j$ aus $\boldsymbol{A}_3$, $k \in I$ und $i, j < k$, so ist $\pi_k x_i = \pi_k x_j = x^k$ durch $\boldsymbol{A}_3$ eindeutig bestimmt. Wir behaupten: Die Menge W aller Indizes k mit $x^k \neq 0$ ist invers wohlgeordnet. Das ist richtig für leeres W. Falls $W \neq \emptyset$, sei T eine nicht leere Teilmenge aus W. Es ist zu zeigen, daß T einen maximalen Index enthält. Wir wählen ein $j \in T$. Es gibt ein $i < j$ mit $x_i+\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_3$ und $\pi_j x_i = x^j \neq 0$. Die $k \in T$ mit $k \geq j$ sind dann Indizes von 0 verschiedener Komponenten des Elementes x_i, also invers wohlgeordnet. Folglich enthält T einen maximalen Index und W ist invers wohlgeordnet. Nach Definition von $\mathfrak{M}$ liegt dann $x = \sum_{i \in W} x^i$ in $\mathfrak{M}$ und aus $\pi_j x = \pi_j x_i$ für $i < j$, $x_i+\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_3$, folgt: $x \in \downarrow \boldsymbol{A}_3$, also $\downarrow \boldsymbol{A}_1 = \downarrow \boldsymbol{A}_3 \neq \emptyset$. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Aus Satz 7 und Satz L 7 folgt:

(2.2) *Der Ring R der $\boldsymbol{B}$-hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt.*

Die Voraussetzungen von Satz 7 sind z.B. erfüllt, wenn die P_i Vektormoduln $\mathfrak{V}_i$ positiver Dimension über einem festen Schiefkörper Δ sind. Für R_0 kann man etwa die direkte Summe $\sum R_i$ der vollen Endomorphismenringe der $\mathfrak{V}_i$ nehmen, mit der Festsetzung: $R_i \mathfrak{V}_j = 0$ für $i \neq j$, R_i wirkt als Endomorphismenring auf $\mathfrak{V}_i$. Sind alle $\mathfrak{V}_i$ isomorph, d.h. haben alle $\mathfrak{V}_i$ dieselbe Dimension über Δ, so hängt die Struktur des Ringes R aller hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_i \mathfrak{V}_i$ nur ab vom Schiefkörper Δ, der Dimension $\mathfrak{d}$ der $\mathfrak{V}_i$ und dem Ordnungstyp ι von I. Wir bezeichnen R in diesem Falle mit dem Symbol $\Delta_{(\mathfrak{d},\iota)}$. Für $\iota = 1$ ist $\Delta_{(\mathfrak{d},1)} = \Delta_{(\mathfrak{d})}$ voller Matrixring vom Grade $\mathfrak{d}$ mit Elementen aus Δ. Nach (2.2) ist $\Delta_{(\mathfrak{d},\iota)}$ stets ein l.k. Ring. Wie stark die Struktur dieses Ringes von ι abhängt, werden wir im folgenden sehen. Wir erinnern dazu an einige Begriffsbildungen aus der Theorie der Ordnungstypen: Ist α ein Ordnungstyp, A eine total geordnete Menge vom Typ α, für jedes $i \in A$, B_i eine total geordnete Menge vom Ordnungstyp β_i und sind die B_i paarweise fremd, so ist $\sigma = \sum_{\alpha} \beta_i$ der Ordnungstyp der in folgender Weise geordneten Vereinigung $B = \bigcup_i B_i$: Sind x und y aus B, so bedeute $x < y$, daß $x \in B_i$, $y \in B_j$ und $i < j$ oder, falls $x, y \in B_i$, daß $x < y$ in B_i ist. Sind alle $\beta_i = \beta$, so ist $\sigma = \alpha\beta$ das Produkt von α und β. Sind α und alle β_i Ordnungszahlen, so ist auch σ eine Ordnungszahl. Ein Ordnungstyp α heißt *Teil* eines Ordnungstyps β, wenn eine β-geordnete Menge eine α-geordnete Teilmenge enthält. So ist z.B. der Ordnungstyp der Menge der rationalen Zahlen Teil des Typs der reellen Zahlen. Der Ordnungstyp δ der Menge D heißt *dicht*, wenn D dicht ist, d.h. wenn zu $x, y \in D$ mit $x < y$ ein $z \in D$ mit $x < z < y$ existiert. Mit δ ist natürlich auch δ^* dicht.

Sämtliche Endomorphismen γ der ι-induktiven direkten Summe $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_i P_i$ mit $|\gamma x| < |x|$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ bilden ein abgeschlossenes zweiseitiges

Ideal C_ι des Endomorphismenringes R, und zwar ist C_ι stets Unterideal des Radikals. Wir nennen C_ι das *charakteristische Ideal* des Ringes der hyperstetigen Endomorphismen der ι-induktiven direkten Summe der P_i. Ist die Indexmenge I Vereinigung paarweise fremder nicht leerer Teilmengen I_t mit der Eigenschaft, daß mit $i, j \in I_t$ auch alle $k \in I$ zwischen i und j zu I_t gehören, so bilden die I_t selbst eine geordnete Menge $J = \{I_t\}$, deren Ordnungstyp $\varkappa$ Teil von ι ist. Setzen wir $S_t = \mathbf{S}_{i \in I_t} P_i$, so ist offenbar auch

$$(v) \qquad \mathfrak{M} = \mathbf{S}_\varkappa S_t.$$

Wir sagen, die Darstellung (v) von $\mathfrak{M}$ als $\varkappa$-induktive Summe der S_t sei eine *Vergröberung* der ι-induktiven Summe der P_i. Die Vergröberung (v) hängt dabei nicht nur vom Ordnungstyp $\varkappa$ ab, sondern von der Zerlegung $J = \{I_t\}$ von I in fremde Teilmengen. Zur Vergröberung (v) gehört wieder ein charakteristisches Ideal $C_\varkappa$, das im allgemeinen echt in C_ι enthalten sein wird. Für $x \in \mathfrak{M}$ sei $|x|$ der maximale Index der zur Vergröberung (v) gehörigen Indexmenge $\chi(x)$. $|x| = |y|$ gilt also genau dann, wenn $|x|$ und $|y|$ in derselben Teilmenge I_t liegen. Definieren wir

$$\mathfrak{U}_t^{(v)} = \{x \mid |x| \leq t\}, \qquad \mathfrak{V}_t^{(v)} = \{x \mid |x| < t\},$$

so gilt für jeden Index t

$$(\varkappa) \qquad \mathfrak{V}_t^{(v)} = C_\varkappa \mathfrak{U}_t^{(v)}.$$

Die Vergröberung (v) heißt *dicht*, falls $\varkappa$ dicht ist.

Jede Teilmenge T von $\tilde{I}$ definiert in folgender Weise eine Vergröberung $v(T)$ von $\mathfrak{M}$: Jedes $i \in I$ bestimmt in T die Unterklasse $U_i = U_t(i)$ aller Elemente $s \in T$ mit $s \leq i$. Alle i, die dasselbe U_t bestimmen, bilden die Teilmenge $I_t \subset I$. Diese I_t sind durch T eindeutig bestimmt und erfüllen offenbar alle zu einer Vergröberung $v(T)$ notwendigen Bedingungen. Man sieht auch leicht, daß $v(T)$ genau dann dicht ist, falls T dicht ist und daß $v(T)$ und T im Falle $T \subset I$ denselben Ordnungstyp haben.

Von nun an setzen wir voraus, daß die Summanden P_i der induktiven Summe $\mathfrak{M} = \mathbf{S} P_i$ sämtlich irreduzibel seien. P_i ist dann Vektormodul über einem Schiefkörper Δ_i und $\pi_i R \pi_i$ ist der Ring aller Δ_i-linearen Transformationen von P_i; π_i ist hierbei wie üblich die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf P_i. Unser nächstes Ziel ist der Beweis von

Satz 8. *Ist $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_\iota P_i$ die ι-induktive direkte Summe der irreduziblen Moduln P_i und R der linear kompakte Ring der hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$, so gilt: Die abgeschlossenen zweiseitigen idempotenten von Null verschiedenen Unterideale des Radikals sind genau die zu dichten Vergröberungen von $\mathfrak{M}$ gehörigen charakteristischen Ideale. Zu verschiedenen Vergröberungen gehören dabei verschiedene Ideale.*

Beweis. 1. Die Vergröberung (v) sei gegeben. Wir wählen endlich viele Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{M}$ mit $\chi(x_i) = \{|x_i|\}$ (d.h. für die nur ein Summand nicht verschwindet), und für welche alle x_i mit gleichem $n = |x_i|$ in P_n bezüglich Δ_n linear unabhängig sind. Ist dann etwa $|x_1| = \cdots = |x_l| = n$, so

gibt es Transformationen $\varepsilon_i \in \pi_n R \pi_n$, $i=1, \ldots, l$, mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_j$, $i,j \leq l$. Somit gibt es also Elemente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ aus R mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_j$ für alle $i,j \leq k$. Sind nun weitere Elemente $y_1, \ldots, y_k$ mit $|y_i| < |x_i|$, $i=1, \ldots, k$, gegeben, so existieren nach $(\varkappa)$ Elemente $\vartheta_i \in C_\varkappa$ mit $y_i = \vartheta_i x_i$. Setzen wir $\vartheta = \sum \vartheta_i \varepsilon_i$, so ist $y_i = \vartheta x_i$ für $i=1, \ldots, k$.

α) Sei (v) nun dicht und $\gamma \in C_\varkappa$. Wir wählen Elemente x_1 bis x_k wie oben und setzen $y_i = \gamma x_i$. Dann gilt $|y_i| < |x_i|$ und da (v) dicht ist, können wir Elemente z_i mit $|y_i| < |z_i| < |x_i|$ bestimmen, wobei wir die z_i noch so wählen können, daß alle $|z_i|$ verschieden sind und $\chi(z_i) = \{|z_i|\}$ ist. Nach unseren obigen Überlegungen existieren nun Elemente ϑ und ϑ' in $C_\varkappa$ mit $\vartheta x_i = z_i$, $\vartheta' z_i = y_i$, also $\vartheta' \vartheta x_i = y_i = \gamma x_i$. Ist also L der Annullator von $x_1, \ldots, x_k$, so gilt $\gamma \equiv \vartheta' \vartheta \pmod{L}$, und da γ beliebig gewählt wurde, folglich: $C_\varkappa + L \subset C_\varkappa^2 + L$, d.h. $C_\varkappa + L = C_\varkappa^2 + L$. Diese Gleichung gilt für jede Wahl des Systems $x_1, \ldots, x_k$, sofern nur die an die x_i gestellten Bedingungen erfüllt sind. Da die zugehörigen Annullatoren ein Filter $\boldsymbol{L}$ mit $\downarrow \boldsymbol{L} = 0$ bilden, folgt aus der letzten Gleichung also $C_\varkappa = \overline{C_\varkappa^2}$, d.h. $C_\varkappa$ ist ein idempotentes Unterideal des Radikals.

β) Ist (v) nicht dicht, so gibt es zwei benachbarte Indizes s und t. Ist $s<t$, so ist $\mathfrak{V}_t^{(v)} = \mathfrak{U}_s^{(v)}$, also $C_\varkappa \mathfrak{U}_t^{(v)} = \mathfrak{U}_s^{(v)}$, $C_\varkappa^2 \mathfrak{U}_t^{(v)} = C_\varkappa \mathfrak{U}_s^{(v)} = \mathfrak{V}_s^{(v)} \neq \mathfrak{U}_s^{(v)}$. Hieraus folgt $C_\varkappa \neq \overline{C_\varkappa^2}$.

2. Nun nehmen wir an, daß C ein abgeschlossenes idempotentes zweiseitiges Unterideal des Radikals ist. Wir wollen zeigen, daß $C = C_\varkappa$ ist mit einem zu einer dichten Vergröberung (v) gehörigen charakteristischen Ideal $C_\varkappa$. Für jedes $i \in I$ setzen wir

$$C\,\mathfrak{U}_i = \mathfrak{V}_{t(i)}.$$

Daß hier unter den $C\,\mathfrak{U}_i$ kein $\mathfrak{U}_j$ mit $j \in I$ auftreten kann, folgt aus $C = \overline{C^2} \subset N$. Die Abbildung $i \to t(i)$ ist isoton von I auf eine Teilmenge T aus $\tilde{I}$. T definiert eine Vergröberung $v = v(T)$ von $\mathfrak{M}$, zu der ein charakteristisches Ideal $C_\varkappa$ gehört. Wir behalten hier die Bezeichnungsweise der Abschnitte vor Satz 8 bei.

Sind $i, j \in I_s$, so ist $t(i) = t(j) = t_s$ und U_s besteht aus allen $h \in T$ mit $h \leq t_s$: Für $i \in I_s$ folgt wegen $t(i) \leq i$ zunächst $t(i) \in U_s$. Ist $r \in T$ und $t(i) \leq r \leq i$, so gilt $\mathfrak{V}_{t(i)} \subset \mathfrak{V}_r \subset \mathfrak{U}_i$, also

$$\mathfrak{V}_{t(i)} = C\,\mathfrak{V}_{t(i)} \subset C\,\mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_r \subset C\,\mathfrak{U}_i = \mathfrak{V}_{t(i)},$$

d.h. $\mathfrak{V}_{t(i)} = \mathfrak{V}_r$, also $r = t(i) \in U_s$; $t(i) = t_s$ ist also der maximale Index aus U_s und I_s besteht aus allen $i \in I$ mit $t(i) = t_s$. Ist $z \in \mathfrak{V}_{t_s}$, so ist $|z| = j < t_s$, also $j \in I_{s'}$ mit $s' < s$, d.h. $z \in \mathfrak{V}_{s'}^{(v)}$. Folglich gilt $C\,\mathfrak{U}_s^{(v)} \subset \mathfrak{V}_{s'}^{(v)}$, also $C \subset C_\varkappa$. Wir wählen nun wieder Elemente $x_1, \ldots, x_k$ aus $\mathfrak{M}$ mit $\chi(x_i) = \{|x_i|\}$, für die alle x_i mit gleichem $|x_i|$ unabhängig sind. Um $C = C_\varkappa$ zu zeigen, genügt es, nach derselben Schlußweise wie in 1. α) zu beweisen, daß zu $\beta \in C_\varkappa$ ein $\gamma \in C$ mit $\gamma x_i = \beta x_i$, $i=1, \ldots, k$, existiert. Wegen $|\beta x_i| < |x_i|$ ist $|\beta x_i| < t(|x_i|)$ und folglich $\beta x_i \in C\,\mathfrak{U}_{|x_i|}$, d.h. es gibt ein $\gamma_i \in C$ mit $\beta x_i = \gamma_i x_i$. Nun wählen wir wieder Elemente $\varepsilon_i \in R$ mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_i$ und setzen $\gamma = \sum \gamma_i \varepsilon_i$. Dann liegt

γ in C und es gilt $\gamma x_i = \gamma_i x_i = \beta x_i$. Damit ist $C = C_\varkappa$ gezeigt. Nach 1. β) ist v dicht.

Sind v und v' verschiedene Vergröberungen, $|x|$ und $\|x\|$ die Bezeichnungen für die Indizes der Köpfe bezüglich v und v', so existieren Elemente y und z aus $\mathfrak{M}$ mit $|y| < |z|$, $\|y\| = \|z\|$. Das zu v gehörige charakteristische Ideal enthält dann ein ϑ mit $y = \vartheta z$. Wegen $\|\vartheta z\| = \|z\|$ kann ϑ nicht auch im charakteristischen Ideal der Vergröberung v' liegen, diese beiden Ideale sind also verschieden. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Folgerungen:

(2.3) *Das Radikal N von R ist genau dann nilpotent, wenn der Typ ι von I keinen dichten Teil enthält. N ist genau dann idempotent, wenn ι dicht ist.*

Ist $\underset{*}{N} \neq 0$, so existiert wegen $\overline{\underset{*}{N}^2} = \underset{*}{N}$ eine dichte Vergröberung v von $\mathfrak{M}$. Ist $\{I_t\}$ das zu v gehörende System der Teilmengen von I, so ist jedes Vertretersystem der I_t ein dichter Teil von I. Umgekehrt definiert ein dichter Teil von I eine dichte Vergröberung von $\mathfrak{M}$ und somit ein idempotentes Unterideal $C \neq 0$ von N. Wegen $C < N$ ist dann auch $\underset{*}{N} \neq 0$. Sei v_0 diejenige Vergröberung von $\mathfrak{M}$, in der alle I_t genau ein i aus I enthalten, d.h. für die im wesentlichen $J(= \{I_t\}) = I$ und $S_i = P_i$ ist. Aus der Irreduzibilität der P_i folgt leicht, daß das zu v_0 gehörige charakteristische Ideal gerade gleich dem Radikal von R ist. Daraus folgt nach Satz 8 sofort die zweite Behauptung von (2.3).

Satz 9. *Das charakteristische Ideal C_ι des Ringes R aller hyperstetigen Endomorphismen der ι-induktiven Summe $\mathfrak{M}$ ist genau dann r-nilpotent (l-nilpotent), wenn $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i \left(\iota^* = \sum_{\omega^*} \iota_i\right)$ mit Ordnungszahlen ι_i, $i = 1, 2, \ldots$ ist.*

Beweis. 1. α) Sei $C = C_\iota$ und $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$ der Typ der Indexmenge I. Für jedes $i \in I$ ist dann die Menge aller $j \geq i$ aus I wohlgeordnet. Sei $\mathfrak{W} = \{x \mid C_* x < \mathfrak{B}_i\}$. Ist $\mathfrak{B}_k < \mathfrak{W}$, so folgt $C_* \mathfrak{U}_k = C_* \cdot C \mathfrak{U}_k < C_* \mathfrak{B}_k < C_* \mathfrak{W} < \mathfrak{B}_i$, also auch $\mathfrak{U}_k < \mathfrak{W}$. Daraus schließt man, daß alle $\mathfrak{U}_k$ in $\mathfrak{W}$ liegen müssen, d.h. es ist $\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$, also $C_* \mathfrak{M} < \mathfrak{B}_i$ für jedes $i \in I$, d.h. $C_* \mathfrak{M} = 0$, $C_* = 0$.

β) Ist ι in keiner Weise als $\sum_{\omega^*} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i darstellbar, so enthält ι den Ordnungstyp $1 + \omega^*$. Hierzu gehört eine Vergröberung, deren charakteristisches Ideal D in C enthalten ist. Ist $D_* \neq 0$, so erst recht $C_* \neq 0$, wir können uns also auf den Fall $\iota = 1 + \omega^*$ beschränken. Für I wählen wir die Menge der negativen ganzen Zahlen und das Symbol $-\infty$ in der natürlichen Ordnung. Ist $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_{1+\omega^*} P_i$, so wählen wir in jedem P_i, $-\infty < i$, ein $u_i \neq 0$. Dann gilt $\mathfrak{U}_{-\infty} = P_{-\infty} < \mathfrak{U}_{i-1} = C u_i$. Ist nun für eine Ordnungszahl λ und alle $i \in I$ mit $-\infty < i$ schon $\mathfrak{U}_{-\infty} < C_\lambda u_i$ bewiesen, so folgt

$$\mathfrak{U}_{-\infty} < C_\lambda u_{i-1} < C_\lambda \cdot C u_i = C_{\lambda+1} u_i.$$

Hieraus folgt wie üblich $\mathfrak{U}_{-\infty} < C_* u_i$, also $C_* \neq 0$.

2. α) Sei $\iota = \sum_{\omega} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i^*. Für jedes $i \in I$ ist die Menge der $j \leq i$ invers wohlgeordnet; daraus folgt $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{U}_{i-1}$. Würde es nun ein $x \in \mathfrak{M}$ mit ${}_*Cx \neq 0$ geben, so hätten wir mit geeignetem $i \in I$: $\mathfrak{U}_{i-1} \subset {}_*Cx \subset \mathfrak{U}_i$. Das ist aber wegen $C \cdot {}_*Cx = {}_*Cx$ unmöglich. Folglich ist ${}_*C\mathfrak{M} = 0$, ${}_*C = 0$.

β) Wie unter 1. β) sieht man, daß wir uns darauf beschränken können, im Fall $\iota = \omega + 1$ zu beweisen, daß ${}_*C$ nicht verschwindet. In diesem Fall sei $I = \{1, 2, \ldots, \infty\}$. Für $u \in P_\infty$, $u \neq 0$, ist $\mathfrak{V}_\infty = Cu$ und $\mathfrak{U}_i = C\mathfrak{U}_{i+1}$, also $\mathfrak{V}_\infty = C\mathfrak{V}_\infty$. Ist $\mathfrak{V}_\infty = {}_\mu Cu$ für eine Ordnungszahl μ schon gezeigt, so folgt

$$\mathfrak{V}_\infty = C\mathfrak{V}_\infty = C \cdot {}_\mu Cu = {}_{\mu+1}Cu,$$

also wie üblich $\mathfrak{V}_\infty = {}_*Cu$, d.h. ${}_*C \neq 0$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Folgerungen:

(2.4) *$\mathfrak{M}$ (und damit auch R) ist in der g.l.k. Topologie genau dann i.e.S.l.k., wenn $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i ist und in allen P_i die Minimalbedingung gilt.*

Für jedes i ist P_i diskret und zu $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{V}_i$ isomorph, ist also $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k., so muß in allen P_i die Minimalbedingung gelten. Ferner ist dann das Radikal N von R und damit auch das charakteristische Ideal r-nilpotent. Folglich ist nach Satz 9 $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$. Um die Umkehrung zu beweisen, braucht man wegen (1.7) nur $N_* = 0$ zu zeigen. Das kann man aber fast genau so wie $C_* = 0$ unter 1. α) beweisen. Man hat dabei lediglich zu berücksichtigen, daß jedes $x \in \mathfrak{U}_i$ durch eine endliche Potenz von N modulo $\mathfrak{V}_i$ annulliert wird.

(2.5) *Sind alle P_i irreduzibel, so ist das Radikal von R genau dann l-nilpotent, wenn $\iota = \sum_{\omega} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i^*.*

In diesem Falle ist nämlich das Radikal gleich dem charakteristischen Ideal. Die Voraussetzung der Irreduzibilität der Moduln P_i läßt sich nicht wesentlich abschwächen, (2.5) wird z.B. schon falsch, wenn man für die P_i statt der Irreduzibilität nur die Gültigkeit der Minimalbedingung fordert. Man wähle etwa einen Schiefkörper Δ, setze $Q_i = \Delta_{(1,\omega)} = \mathbf{S}_\omega \Delta$ und $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_{\omega^*} Q_i$. Dann sind alle Q_i diskret und i.e.S.l.k., genügen also der Minimalbedingung. Da aber mit $P_j = \Delta$ offenbar auch $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_{\omega^* \omega} P_j$ ist, ist die notwendige Bedingung von (2.5) nicht erfüllt, das Radikal des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Ringes kann also nicht l-nilpotent sein.

§ 3

Wir werden in diesem Paragraphen für vollständige l.t. Ringe S Matrixringe $S^{(\mathfrak{a})}$ beliebigen Grades $\mathfrak{a}$ definieren, die wir im nächsten Paragraphen für die Untersuchung primärer l.k. Ringe gebrauchen werden. Ist S ein Körper, so ist $S^{(\mathfrak{a})}$ nichts anderes, als der Endomorphismenring eines Vektormoduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ vom Range $\mathfrak{a}$ über S. Wir werden nun $S^{(\mathfrak{a})}$ auch allgemein als Endomorphismenring eines in bestimmter Weise erklärten S-Rechtsmoduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ definieren, den man als eine Art $\mathfrak{a}$-gliedriger direkter Summe von zu S isomorphen Summanden erhält. Diese Art der Definition von $S^{(\mathfrak{a})}$

ist in mancher Hinsicht vorteilhafter als diejenige, welche $S^{(\mathfrak{a})}$ durch gewisse Matrizen $(s_{\mu\nu})$ mit Elementen $s_{\mu\nu}\in S$ beschreibt. Bei unserer Definition ist $S^{(\mathfrak{a})}$ z. B. automatisch ein vollständiger l.t. Ring. Enthält S eine Eins, so läßt $S^{(\mathfrak{a})}$ sich in einfacher Weise durch Matrizen beschreiben.

Sei S ein vollständiger linear topologischer Ring, $\boldsymbol{B}$ der Filter aller offenen Linksideale und I eine Indexmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$. Ein System $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ von Elementen $x_\mu\in S$ heißt *summierbar* (vgl. [1], § 4), wenn jedes $L\in\boldsymbol{B}$ fast alle x_μ enthält. Die Restklassen $\sum_{x_\mu\notin L} x_\mu + L$ bilden dann ein Cauchyfilter $\boldsymbol{C}$, der wegen der Vollständigkeit von S gegen ein Element x konvergiert. Wir setzen

$$x = \lim \boldsymbol{C} = \sum_{\mu\in I} x_\mu .$$

Die folgenden Aussagen sind so einfach, daß wir auf die Beweise verzichten (vgl. auch [1]).

(3.1) *Sind* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ *und* $\{y_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar, so auch* $\{x_\mu+y_\mu\}_{\mu\in I}$ *und es gilt* $\sum x_\mu+\sum y_\mu=\sum(x_\mu+y_\mu)$.

(3.2) *Ist* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar und* $\{y_\mu\}_{\mu\in I}$ *ein System von beliebigen Elementen* $y_\mu\in S$, *so ist auch* $\{y_\mu x_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar.*

(3.3) *Ist* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$, $x_\mu\in S$, *summierbar und* f *eine stetige additive Abbildung von* S *in einen vollständigen l.t. Ring* S', *so ist* $\{f(x_\mu)\}_{\mu\in I}$ *in* S' *summierbar und es gilt* $f(\sum x_\mu)=\sum f(x_\mu)$.

Folgerungen:

(3.4) *Ist* $\{x_\mu\}$ *in* S *summierbar, so sind für jedes* $z\in S$ *die Systeme* $\{z x_\mu\}$ *und* $\{x_\mu z\}$ *summierbar und es gilt*

$$z\sum x_\mu=\sum z x_\mu, \qquad (\sum x_\mu)\,z=\sum x_\mu z .$$

Wir ordnen jedem μ der Indexmenge I einen zu S isomorphen Ring S_μ und einen festen Isomorphismus i_μ von S auf S_μ zu. Die aus diesen S_μ gebildete vollständige direkte Summe

$$S^{\natural}=\sum_{\mu\in I}^{\natural} S_\mu$$

ist ein Ring, für den S durch folgende Festsetzung zum Rechtsmultiplikatorenbereich wird:

Für $x=\sum_{\mu}^{\natural} i_\mu(x_\mu)\in S^{\natural}$ und $z\in S$ sei $xz=\sum_{\mu}^{\natural} i_\mu(x_\mu z)$.

Wenn wir im folgenden die Elemente aus S als Operatoren von $S^{\natural}$ oder von Untermoduln aus $S^{\natural}$ bezeichnen werden, so werden wir das stets im Sinne dieser Rechtsmultiplikation meinen. Ein S-Untermodul von $S^{\natural}$ ist also ein rechts-S-invarianter Untermodul von $S^{\natural}$. Wir wollen übrigens zur Unterscheidung der Summenbildung in S die Summation über I in $S^{\natural}$ durch das Symbol „$\sum^{\natural}$" bezeichnen. Ist A ein Ideal aus S, so sei $A^{\natural}$ der Untermodul aller Elemente $\sum^{\natural} i_\mu(x_\mu)$ aus $S^{\natural}$ mit $x_\mu\in A$. Durchläuft L einen Basisfilter von S, so durchläuft $L^{\natural}$ einen Filter $\boldsymbol{B}^{\natural}$ von $S^{\natural}$. *Wir machen* $S^{\natural}$ *zum linear topologischen Modul, indem wir* $\boldsymbol{B}^{\natural}$ *zum Basisfilter wählen.* Die Operatoren

aus S sind dann stetig, die Multiplikationen von links mit Elementen aus $S^\natural$ hyperstetig.

Sei ε_μ die Projektion von $S^\natural$ auf den Summanden S_μ. Ist $\boldsymbol{C}$ ein Cauchyfilter von $S^\natural$, so ist $\varepsilon_\mu \boldsymbol{C}$ ein Cauchyfilter in S_μ, ist also $x_\mu = \lim \varepsilon_\mu \boldsymbol{C}$, so liegt $x = \sum_\mu^\natural x_\mu$ in $\downarrow \boldsymbol{C}$, d.h. es ist $x = \lim \boldsymbol{C}$. Folglich ist $S^\natural$ vollständig. Sämtliche Elemente $\sum^\natural i_\mu(x_\mu) \in S^\natural$, für welche die Folgen $\{x_\mu\}$ in S summierbar sind, bilden einen Untermodul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ von $S^\natural$. Wegen (3.2) und (3.4) ist $\mathfrak{M}$ ein Linksideal aus $S^\natural$ und S-Untermodul. Liegt $z = \sum^\natural z_\mu \in S^\natural$ nicht in $\mathfrak{M}$, so ist $\{i_\mu^{-1}(z_\mu)\}$ in S nicht summierbar, es gibt also ein offenes Linksideal L in S, das unendlich viele der $i_\mu^{-1}(z_\mu)$ nicht enthält. Da für $x = \sum^\natural x_\mu \in S^\natural$ die Kongruenz $x \equiv z \pmod{L^\natural}$ mit dem System der Kongruenzen $i_\mu^{-1}(x_\mu) \equiv i_\mu^{-1}(z_\mu) \pmod{L}$ äquivalent ist, kann z nicht in $\mathfrak{M} + L^\natural$ liegen, d.h. es ist $(z + L^\natural) \cap \mathfrak{M} = \emptyset$. Folglich ist $\mathfrak{M}$ in $S^\natural$ abgeschlossen. Wegen der Vollständigkeit von $S^\natural$ ist $\mathfrak{M}$ also ein vollständiger l.t. Modul mit S als Bereich stetiger Rechtsoperatoren. Wir fassen noch einmal zusammen:

(3.5) *Der Untermodul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ ist ein vollständiger l.t. Modul mit $S^\natural$ als Bereich hyperstetiger Linksoperatoren und S als Bereich stetiger Rechtsoperatoren. Für diskretes S ist $\mathfrak{M}$ nichts anderes als die algebraische direkte Summe von $\mathfrak{a}$ zu S isomorphen Summanden.*

Wir werden nun die stetigen und insbesondere die hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ untersuchen.

(3.6) *Für jeden mit S vertauschbaren stetigen Endomorphismus τ von $\mathfrak{M}$ und für jeden abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{M}$ gilt: $\tau(S^\natural \mathfrak{A}) < \mathfrak{A}$.*

Ist $a = \sum^\natural a_\mu \in \mathfrak{A}$ und $z = \sum^\natural z_\mu \in S^\natural$, so ist $za = \sum^\natural z_\mu a_\mu$ Häufungspunkt der aus den $z_\mu a_\mu$ gebildeten endlichen Teilsummen, um $\tau(za) \in \mathfrak{A}$ nachzuweisen, genügt also $\tau(z_\mu a_\mu) \in \mathfrak{A}$ für jedes μ zu zeigen. Sei $\tau(z_\mu) = \sum_\nu^\natural y_\nu \in \mathfrak{M}$. Wegen der Vertauschbarkeit von τ mit den Rechtsoperatoren aus S ist dann $\tau(z_\mu a_\mu) = \tau(z_\mu) a_\mu = \sum_\nu^\natural y_\nu a_\mu$. Das Element $\sum_\nu^\natural y_\nu a_\mu$ ist wieder Häufungspunkt der von den $y_\nu a_\mu \in \mathfrak{A}$ gebildeten endlichen Teilsummen und liegt wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$. Folglich ist auch $\tau(za) \in \mathfrak{A}$, womit (3.6) bewiesen ist. Folgerung:

(3.7) *Enthält S ein Einselement, so sind alle mit den Rechtsoperatoren aus S vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ hyperstetig.*

Denn in diesem Falle ist $\mathfrak{A} = S^\natural \mathfrak{A}$.

Definition. Ist S ein vollständiger linear topologischer Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so verstehen wir unter dem *Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über S* den nach [8], S. 246, linear topologisierten Ring aller hyperstetigen mit den Rechtsoperatoren aus S vertauschbaren Endomorphismen des dem Ring S zugeordneten Moduls $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$.

Nach Satz L6 ist $S^{(\mathfrak{a})}$ also ein vollständiger l.t. Ring.

Wir wollen jetzt die $S^{(a)}$-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ bestimmen und setzen dazu

$$\varepsilon_{\mu\nu} = i_\mu i_\nu^{-1} \varepsilon_\nu .$$

Diese Endomorphismen sind hyperstetig, d.h. liegen in $S^{(a)}$, und genügen den Formeln

$$(\varepsilon) \qquad \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} \varepsilon_{\mu\lambda} & \text{falls } \nu = \varkappa \\ 0 & \text{falls } \nu \neq \varkappa, \end{cases} \qquad \varepsilon_{\mu\mu} = \varepsilon_\mu .$$

Ist nun $\mathfrak{A}$ ein $S^{(a)}$-invarianter Untermodul von $\mathfrak{M}$, so folgt $\varepsilon_\mu(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A}$, also $\sum^{\natural} \mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A} < \sum^{\natural} \mathfrak{A}_\mu$, d.h. $\mathfrak{A} = \sum^{\natural} \mathfrak{A}_\mu$. Weiter: $\varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{A}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\mu}\mathfrak{A}_\mu < \varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu$, also $\varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\mu$ für alle μ und ν aus I. Nach Definition der $\varepsilon_{\mu\nu}$ bedeutet das $i_\nu^{-1}(\mathfrak{A}_\nu) = i_\mu^{-1}(\mathfrak{A}_\mu) = A < S$ mit einem festen abgeschlossenen Linksideal A von S. Wir haben also gezeigt:

(3.8) *Durchläuft A alle abgeschlossenen Linksideale aus S, so durchläuft $\mathfrak{A} = A^{\natural} \cap \mathfrak{M}$ genau alle abgeschlossenen $R^{(a)}$-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Insbesondere ist der Verband der $R^{(a)}$-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ zum Verband der Linksideale von S isomorph.*

$S^{(a)}$ enthält einen Unterring $S_0^{(a)}$, den wir durch Matrizen $(t_{\mu\nu})$, $t_{\mu\nu} \in S$, mit summierbaren Spalten $\{t_{\mu\nu}\}_\mu$ beschreiben können: Der Matrix $T = (t_{\mu\nu})$ werde in folgender Weise ein Endomorphismus $\tau \in S^{(a)}$ zugeordnet: Ist $x = \sum^{\natural} x_\mu \in \mathfrak{M}$, so sei $\tau(x) = y = \sum^{\natural} y_\nu$ definiert durch die Formel

$$y_\nu = i_\nu \Big(\sum_\mu t_{\nu\mu} i_\mu^{-1}(x_\mu) \Big) .$$

Wir lassen der Einfachheit halber im folgenden die Zeichen i_μ für die Isomorphismen fort. Mit $\{x_\mu\}_\mu$ ist wegen (3.2) auch $\{t_{\nu\mu}x_\mu\}_\mu$ summierbar, so daß $y_\nu = \sum_\mu t_{\nu\mu}x_\mu$ für jedes ν existiert. Ist L ein offenes Linksideal aus S, so liegen fast alle x_μ in L, etwa alle mit Ausnahme von $x_1, \ldots, x_k$. Daraus folgt $y_\nu \equiv \sum_{i=1}^{k} t_{\nu i} x_i \pmod{L}$. Nach (3.1) und (3.4) ist das System der $y_\nu' = \sum_1^k t_{\nu i} x_i$ summierbar, so daß fast alle y_ν' und folglich auch fast alle y_ν in L liegen. Daraus folgt, daß auch $\{y_\nu\}_\nu$ summierbar ist, τ ist also eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in sich. Die Vertauschbarkeit mit den Operatoren aus S und die Additivität der Abbildung τ folgt unmittelbar aus den definierenden Formeln. Liegt $x = \sum^{\natural} x_\mu$ in einem abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{A}$, so auch jede endliche Teilsumme $\sum_\mu' t_{\nu\mu}x_\mu$, folglich auch y_ν und y, τ gehört also in der Tat zu $S^{(a)}$.

Für zwei Matrizen $T = (t_{\mu\nu})$ und $U = (u_{\mu\nu})$ kann man das Produkt wie üblich durch $TU = \big(\sum_\sigma t_{\mu\sigma}u_{\sigma\nu}\big)$ definieren. Die Matrizen bilden dann einen Ring $(S)_a$ und $S_0^{(a)}$ ist homomorphes Bild von $(S)_a$; der Kern besteht dabei aus allen Matrizen $(w_{\mu\nu})$ mit Elementen $w_{\mu\nu}$ aus dem Ideal W aller $x \in S$ mit $xS = 0$.

(3.9) *Enthält S ein Einselement, so ist $(S)_a \cong S_0^{(a)} = S^{(a)}$.*

Sei e das Einselement und $e_\mu = i_\mu(e) \in \mathfrak{M}$. Ist $\tau \in S^{(\mathfrak{a})}$, so ist $\tau(e_\mu) = \sum_\nu^\natural t'_{\nu\mu} \in \mathfrak{M}$, das System der $t_{\nu\mu} = i_\nu^{-1}(t'_{\nu\mu})$ bei festem μ also summierbar. Es ist leicht zu sehen, daß die Isomorphie von (3.9) durch $\tau \leftrightarrow (t_{\mu\nu})$ hergestellt wird.

Man kann $(S)_\mathfrak{a}$ auch unmittelbar zum topologischen Ring machen: Ist H ein offenes Linksideal aus S und sind $\nu_1, \ldots, \nu_k$ endlich viele Indizes, so bildet die Menge aller Matrizen $(t_{\mu\nu})$ mit $t_{\mu\nu_i} \in H$ für $i = 1, \ldots, k$ und alle μ ein Linksideal $L_\mathfrak{a}(\nu_1, \ldots, \nu_k; H)$. Das System aller dieser Linksideale aus $(S)_\mathfrak{a}$ ist ein Filter und definiert eine Topologie in $(S)_\mathfrak{a}$. In dieser Topologie ist $(S)_\mathfrak{a}$ ein vollständiger separierter l.t. Ring und die Isomorphie von (3.9) ist mit dieser Topologie in beiden Richtungen stetig.

Wir hatten gesehen, daß für jeden vollständigen l.t. Ring S der Ring $S^{(\mathfrak{a})}$ ein Einselement 1 und ein System von Elementen $e_{\mu\nu}$ enthält, die den Gleichungen (ε) genügen und für die, wie man leicht sieht, $\{e_\mu\}_\mu$ summierbar ist mit $\sum_\mu e_\mu = 1$. Ist nun S^* ein beliebiger vollständiger l.t. Ring mit 1, so bezeichnen wir ein System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Elementen $e_{\mu\nu} \in S^*$, für die

1. die Gleichungen (ε) gelten (mit $e_{\mu\nu}$ statt $\varepsilon_{\mu\nu}$) und
2. das Teilsystem $\{e_\mu\}$, $e_\mu = e_{\mu\mu}$, summierbar ist mit $\sum_\mu e_\mu = 1$

allgemein als System von *Matrixeinheiten*. Die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ des Teilsystems $\{e_\mu\}$ nennen wir den *Grad* des Systems. Wegen $e_{\varkappa\varkappa} = e_{\varkappa\mu} e_{\mu\nu} e_{\nu\varkappa}$ kann kein $e_{\mu\nu} = 0$ sein, insbesondere sind die e_μ von 0 verschiedene Idempotente. Nach (3.2) sind wegen $e_{\mu\nu} e_\nu = e_{\mu\nu}$ auch alle Systeme $\{e_{\mu\nu}\}_\nu$ summierbar. Ist $e \neq 0$ ein idempotentes Element aus S^*, so ist $S^* e$ als Menge aller $x \in S^*$ mit $x(1-e) = 0$ ein abgeschlossenes Linksideal und $e S^* e$ als Menge aller $x \in S^* e$ mit $(1-e)x = 0$ ein abgeschlossener, also vollständiger l.t. Unterring von S^*.

Kann man nun einen Ring S^* mit Einselement 1 und einem System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Matrixeinheiten vom Grade $\mathfrak{a}$ als Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ über einem geeigneten l.t. Ring S darstellen? Wir wollen jetzt zeigen, daß das in der Tat der Fall ist, und zwar behaupten wir: Ist e_1 ein festes idempotentes Element aus $\{e_\mu\}$ und $S = e_1 S^* e_1$, so sind S^* und $S^{(\mathfrak{a})}$ isomorph. Wie wir gesehen haben, ist S jedenfalls ein vollständiger l.t. Ring. Wir werden zunächst zeigen:

(3.10) *$M = S^* e_1$ und der Modul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ sind isomorphe S-Rechts-Moduln.*

Wir setzen $S_\mu = e_\mu S^* e_\mu = e_{\mu 1} S e_{1\mu}$ und wählen für i_μ den Isomorphismus $x \to e_{\mu 1} x e_{1\mu}$ von S auf S_μ. $\mathfrak{M}$ ist der Untermodul aller $\sum_\mu^\natural x_\mu$ aus $\sum_\mu^\natural S_\mu$ mit summierbaren $\{i_\mu^{-1}(x_\mu)\}$ aus S.

Wir definieren eine Abbildung φ von $M = S^* e_1$ auf $\mathfrak{M}$ durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_\mu^\natural e_\mu x e_{1\mu} = \sum_\mu^\natural x_\mu .$$

Zunächst ist $i_\mu^{-1}(x_\mu) = e_{1\mu} x e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_{1\mu} x e_1 = e_{1\mu} x$, also $\{i_\mu^{-1}(x_\mu)\}$ wegen (3.4) summierbar, d.h. $\varphi(x)$ liegt in $\mathfrak{M}$. Es ist klar, daß φ ein algebraischer S-Homomorphismus von M in $\mathfrak{M}$ ist. Aus $\varphi(x) = 0$ folgt $e_\mu x e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_\mu x = 0$ für alle μ, also $\sum_\mu e_\mu x = x = 0$, d.h. φ ist sogar ein Isomorphismus. Ist

$y' = \sum^{\natural} y'_\mu = \sum^{\natural} i_\mu(y_\mu) \in \mathfrak{M}$, so ist $\{y_\mu\}$ ein summierbares System aus S, nach (3.4) also $\{e_{\mu 1} y_\mu\}$ ein summierbares System aus M, da M abgeschlossen ist, liegt dann $y = \sum_\nu e_{\nu 1} y_\nu$ in M und es ist $e_\mu y e_{1\mu} = e_{\mu 1} y_\mu e_{1\mu} = i_\mu(y_\mu) = y'_\mu$, d.h. $\varphi(y) = y'$. Folglich ist φ ein algebraischer Isomorphismus von M auf $\mathfrak{M}$. Durchläuft L die offenen Linksideale eines Basisfilters von S^*, so durchläuft $(L \cap S)^{\natural} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}_L$ einen Basisfilter in $\mathfrak{M}$ und $L \cap M$ einen Basisfilter in M. Ein Element x liegt genau dann in $L \cap M$, wenn alle $e_{1\mu} x$ in $L \cap S$ liegen; das ist genau dann der Fall, wenn $\sum^{\natural} i_\mu(e_{1\mu} x) = \varphi(x)$ in $\mathfrak{L}_L$ liegt. Folglich ist $\varphi(L \cap M) = \mathfrak{L}_L$. Daraus folgt, daß φ auch ein topologischer Isomorphismus ist.

Die Linksmultiplikationen mit den Elementen aus S^* induzieren hyperstetige mit S vertauschbare Endomorphismen von M. Ist $x \in S^*$ und $xM = 0$, so ist insbesondere $x e_{\mu 1} = 0$, also $x e_{\mu 1} e_{1\mu} = x e_\mu = 0$, also $x = \sum_\mu x e_\mu = 0$. Durch die Festsetzung $t\varphi(x) = \varphi(tx)$ für $t \in S^*$ wird S^* also algebraisch zum Unterring von $S^{(a)}$. Sei nun τ ein beliebiges Element aus $S^{(a)}$. Die Elemente $e'_\mu = \varphi(e_{\mu 1})$ erzeugen einen dichten S-Untermodul von $\mathfrak{M}$, um $\tau \in S^*$ zu zeigen, genügt also die Angabe eines Elementes $t \in S^*$ mit $\tau e'_\mu = t e'_\mu = \varphi(t e_{\mu 1})$ für alle μ aus der Indexmenge I der e_μ. Ein solches t ist aber leicht gefunden: Wegen $S^* e_{\mu 1} = S^* e_1 = M$ existiert zu jedem $\mu \in I$ ein $t_\mu \in S^*$ mit $t_\mu e_{\mu 1} = \varphi^{-1}(\tau e'_\mu)$. Wegen (3.4) existiert $t = \sum t_\mu e_\mu$ und für jedes $\mu \in I$ ist $t e_{\mu 1} = t_\mu e_{\mu 1} = \varphi^{-1}(\tau e'_\mu)$, also $\tau e'_\mu = \varphi(t e_{\mu 1}) = t e'_\mu$, d.h. $\tau = t \in S^*$. Damit ist die algebraische Gleichheit von S^* und $S^{(a)}$ bewiesen. Wir müssen nun noch prüfen, ob auch die topologischen Strukturen übereinstimmen.

In $S^{(a)}$ erzeugen die Linksideale

$$L(x, \mathfrak{H}) = \{\xi \mid \xi x \in \mathfrak{H}\},\ x \in \mathfrak{M},\ \mathfrak{H} = (H \cap S)^{\natural} \cap \mathfrak{M},\ H \text{ offenes Linksideal aus } S^*,$$

einen Basisfilter. Wir können $L = L(x, \mathfrak{H})$ als Ideal in S^* aber auch durch

$$L(x, \mathfrak{H}) = \{\xi \mid \xi \varphi^{-1}(x) \in H \cap M\} = \{\xi \mid \xi \varphi^{-1}(x) \in H\}$$

definieren. Wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation ist L dann ein offenes Linksideal aus S^*, die Topologie von $S^{(a)}$ ist also höchstens gröber als die von S^*. Ist umgekehrt L ein offenes Linksideal aus S^*, so liegen fast alle $e_{1\mu}$ in L, etwa alle bis auf $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1k}$. Das Ideal

$$H = \{x \mid x e_{1i} \in L \cap M,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

ist offen in S^*, das Ideal

$$L' = \{\xi \mid \xi \varphi(e_{i1}) \in H^{\natural} \cap \mathfrak{M},\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

also offen in $S^{(a)}$. Für $x \in L'$ gilt $x\varphi(e_{i1}) \in H^{\natural} \cap \mathfrak{M}$, also $x e_{i1} \in H$ für $i = 1, \ldots, k$. Daraus folgt $x e_i = x e_{i1} e_{1i} \in H e_{1i} \subset L$ für $i = 1, \ldots, k$, also $x = \sum_\mu x e_\mu \in L$, d.h. $L' \subset L$. Folglich ist L auch in $S^{(a)}$ offen. Damit ist $S^* = S^{(a)}$ topologisch und algebraisch bewiesen. Im ganzen haben wir gezeigt:

Satz 10. *Ein vollständiger linear topologischer Ring S^* mit Eins ist genau dann Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ über einem vollständigen linear topologischen Ring S mit Eins, wenn S^* ein System von Matrixeinheiten $\{e_{\mu\nu}\}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ enthält. Dabei ist S isomorph zu den Unterringen $e_{\mu\nu} S^* e_{\nu\mu}$ von S^*.*

Ist S_0 ein beliebiger vollständiger l.t. Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so wissen wir, daß $S^* = S_0^{(\mathfrak{a})}$ den Voraussetzungen von Satz 10 genügt, es ist also $S^* = S^{(\mathfrak{a})}$ mit $S = e_1 S^* e_1$. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß der Ring S, der hier dem Ring S_0 eindeutig zugeordnet wird, nichts anderes ist als der Ring $S_0^{(1)}$ der hyperstetigen Endomorphismen von $S_0 = \mathfrak{M}(S_0, 1)$, versehen mit der üblichen Topologie. Es gilt also die Formel (wir lassen den Index 0 wieder weg):

$$S^{(\mathfrak{a})} = S^{(1)(\mathfrak{a})}. \tag{3.11}$$

Es gilt sogar die allgemeinere Formel

$$S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}, \tag{3.12}$$

wobei $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Produkt der Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist und die rechte Seite den Matrixring vom Grade $\mathfrak{b}$ über $S^{(\mathfrak{a})}$ bedeutet. Zum Beweis von (3.12) darf man wegen (3.11) voraussetzen, daß S eine Eins enthält.

Wir können die Matrixeinheiten $e_{(\alpha,\mu)(\beta,\nu)}$ von $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}$ durch Paare (α, μ) indizieren, in denen α eine Indexmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{b}$ und μ eine der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ durchläuft. Die Elemente $e_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} e_{(\alpha,\mu)(\beta,\mu)} = \sum_{\mu} e_{(\alpha,\mu)(1,1)} e_{(1,1)(\beta,\mu)}$ bilden dann ein neues System von Matrixeinheiten vom Grade $\mathfrak{b}$. Dementsprechend ist $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = S'^{(\mathfrak{b})}$ mit $S' = e_1 S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} e_1$, $e_1 = \sum_{\mu} e_{(1,\mu)}$. S' enthält das System von Matrixeinheiten $e^{\mu\nu} = e_{(1,\mu)(1,\nu)}$, dessen Grad gleich $\mathfrak{a}$ ist. Aus Satz 10 folgt wieder $S' = S''^{(\mathfrak{a})}$ mit $S'' = e^1 S' e^1 = e_{(1,1),} S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} e_{(1,1)} = S$, d.h. $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}$ wie behauptet.

Enthält S eine Eins, so sind S und $S^{(1)}$ nach (3.9) isomorph, aus der Definition von $(S)_{\mathfrak{a}}$ folgt nämlich unmittelbar $(S)_1 \cong S$.

Wir wollen nun untersuchen, welche abgeschlossenen zweiseitigen Ideale in $S^{(\mathfrak{a})}$ existieren. Dazu setzen wir voraus, daß S eine Eins enthält, nach (3.9) ist dann $S^{(\mathfrak{a})} = (S)_{\mathfrak{a}}$. Sei $\{e_\mu\}$ das Teilsystem der orthogonalen Idempotente eines Systems von Matrixeinheiten von $S^{(\mathfrak{a})}$. Man sieht leicht:

$$S^{(\mathfrak{a})} = \sum_{\mu} S^{(\mathfrak{a})} e_\mu \qquad (\textit{Tychonoffsche Summe}). \tag{3.13}$$

Für $x \in S^{(\mathfrak{a})}$ gilt $x = \sum_{\mu} x e_\mu \in \sum_{\mu} S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$. Umgekehrt ist jedes System $\{x_\mu e_\mu\}$ mit beliebigen $x_\mu \in S^{(\mathfrak{a})}$ summierbar. Aus $x = \sum x_\mu e_\mu = 0$ folgt $x_\nu e_\nu = x e_\nu = 0$ für alle ν. Ist L ein offenes Linksideal in $S^{(\mathfrak{a})}$, so liegen fast alle $S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ in L und es gilt $\sum_{\mu} (S^{(\mathfrak{a})} e_\mu) \cap L \subset L$, d.h. L ist auch als Teil von $\sum_{\mu} S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ offen. Schließlich ist $L' = \sum_{i=1}^{k} (S^{(\mathfrak{a})} e_{\mu_i}) \cap L \oplus \sum_{\mu \neq \mu_i} S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ das Ideal aller $x \in S^{(\mathfrak{a})}$ mit $x e_{\mu_i} \in L$, $i = 1, \ldots, k$, d.h. L' ist auch in $S^{(\mathfrak{a})}$ offen. Aus allem folgt (3.13).

Nach (3.10) sind die einzelnen Summanden $M_\mu = S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ alle zu $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ isomorph. Ist A' ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal von $S^{(\mathfrak{a})}$, so folgt $A' e_\mu \subset A' \cap M_\mu$, also $\sum_\mu A' e_\mu \subset A'$, umgekehrt natürlich auch $A' \subset \sum_\mu A' e_\mu$, folglich $A' = \sum_\mu A' e_\mu$. Durch $x e_\mu \to x e_\mu e_{\mu\nu}$, $x \in A'$, wird $A' e_\mu$ isomorph auf $A' e_\nu$ abgebildet, die Summanden $A' e_\mu$ sind also alle isomorph und bestimmen deshalb eindeutig einen Untermodul $\mathfrak{A} = A^\natural \cap \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$, welcher wiederum eindeutig durch ein Ideal $A \subset S$ definiert ist. Wegen $e_\mu A' e_\mu \cdot e_\mu S e_\mu \subset e_\mu A' e_\mu$ ist $\mathfrak{A}$ ein S-Untermodul von $\mathfrak{M}$, d.h. A ist ein zweiseitiges Ideal aus S. Zeichnen wir ein Idempotent $e = e_1$ aus und identifizieren S mit $e S^{(\mathfrak{a})} e$, so ist offenbar $A = e A' e \subset S$. Umgekehrt definiert ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal A aus S einen S-Untermodul $\mathfrak{A} = A^\natural \cap \mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{M}$, d.h. ein abgeschlossenes Unterideal $A' e \subset S^{(\mathfrak{a})} e$ mit $A' e S \subset A' e$. Das Ideal $A' = \sum_\mu A' e_1 e_{1\mu} = \sum_\mu A' e_\mu$ ist dann abgeschlossen in $S^{(\mathfrak{a})}$, denn alle $A' e_\mu$ sind in $S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ abgeschlossen. Ist $x e_{1\mu} \in A' e_\mu$, $x \in A' e_1$, so folgt für jedes $y = \sum_\nu y e_\nu \in S^{(\mathfrak{a})}$:

$$x e_{1\mu} y = \sum_\nu x e_{1\mu} y e_{\nu 1} e_{1\nu} = \sum_\nu y_\nu e_{1\nu} \quad \text{mit} \quad y_\nu = x e_{1\mu} y e_{\nu 1} \in A' e_1,$$

d.h. $x e_{1\mu} y \in A'$. Folglich ist A' zweiseitig. Im ganzen haben wir also bewiesen:

Satz 11. *Ist S ein vollständiger linear topologischer Ring mit Eins und $S^{(\mathfrak{a})}$ der Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über S, so entsprechen die abgeschlossenen zweiseitigen Ideale aus $S^{(\mathfrak{a})}$ umkehrbar eindeutig den abgeschlossenen zweiseitigen Idealen aus S. Ist e eine idempotente Matrixeinheit aus $S^{(\mathfrak{a})}$ und identifizieren wir S mit $e S^{(\mathfrak{a})} e$, so wird die Beziehung zwischen den zweiseitigen Idealen hergestellt durch die Zuordnung*

$$\overline{S^{(\mathfrak{a})} A\, S^{(\mathfrak{a})}} = A' \leftrightarrow e A' e = A$$

(A' zweiseitiges Ideal aus $S^{(\mathfrak{a})}$, A zweiseitiges Ideal aus S). Beschreiben wir $S^{(\mathfrak{a})}$ durch Matrizen, so besteht A' aus allen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit $a_{\mu\nu} \in A$.

Wir wenden uns nun wieder den linear kompakten Ringen zu.

(3.14) *Ist R ein (i.e.S.) l.k. Ring und $e \neq 0$ ein Idempotent aus R, so ist auch eRe ein (i.e.S.) l.k. Ring. (Vgl. [9], 5. B.)*

Ist A Linksideal aus eRe, so ist $\overline{RA}$ Linksideal aus R und $A = e\overline{RA}$. Ist nun $\boldsymbol{F} = \{x + A\}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen aus eRe, so ist $\boldsymbol{F}' = \{x + \overline{RA}\}$ ein Filter in R und es existiert ein $z \in \downarrow \boldsymbol{F}'$. Liegt $x + \overline{RA}$ in $\boldsymbol{F}'$, so folgt $e(z - x) = ez - x \in e\overline{RA} = A$, also $ez \in x + A$, d.h. $ez \in \downarrow \boldsymbol{F}$. Folglich ist $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$, also eRe l.k..

Ist A ein Linksideal in eRe, so ist die Vereinigung aller R-Linksideale $X \subset Re$ mit $eX \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal $A' \subset Re$, welches $\overline{RA}$ enthält und für das $eA' = A$ gilt. Ist $A = eRe \cap L$ mit offenem Unterideal $L \subset Re$, so liegt L in A', ist also A in eRe offen, so ist A' in Re offen. Nun sei R i.e.S.l.k. und A ein offenes Linksideal in eRe. Durch $B \to B'$ wird der Verband der Oberideale B von A isomorph in den Verband der offenen

Oberideale des offenen Linksideals $A' \subset Re$ abgebildet. Da modulo A' die Minimalbedingung gilt, muß dann auch modulo A die Minimalbedingung gelten, d.h. auch eRe ist i.e.S.l.k..

Ist $R^{(\mathfrak{a})}$ ein l.k. Matrixring, so ist nach (3.14) der Ring $R^{(1)}$ l.k., ist $R^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k., so auch $R^{(1)}$. Ist umgekehrt R ein l.k. Ring *und* $\mathfrak{a}$ *endlich*, so ist auch $\mathfrak{M}(R, \mathfrak{a})$ und folglich nach Satz L7 auch $R^{(\mathfrak{a})}$ l.k. Ist R i.e.S.l.k., so gilt nach (3.8) *für jedes* $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}(R, \mathfrak{a})$ die Minimalbedingung modulo offenen Untermoduln, $\mathfrak{M}$ ist also i.e.S.l.k.. Wieder nach Satz L7 ist dann auch $R^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k.. Wir haben bisher gesehen: $R^{(\mathfrak{a})}$ ist genau dann i.e.S.l.k., wenn $R^{(1)}$ i.e.S.l.k. ist. Für *endliches* $\mathfrak{a}$ ist $R^{(\mathfrak{a})}$ genau dann l.k., aber nicht i.e.S.l.k., wenn $R^{(1)}$ l.k., aber nicht i.e.S.l.k. ist. Übriggeblieben ist also noch der folgende Fall: $R^{(1)}$ ist nicht i.e.S.l.k. und $\mathfrak{a}$ ist unendlich. Unter dieser Voraussetzung existiert in $R = R^{(1)}$ eine abzählbar unendliche echt absteigende Kette von Linksidealen $H_1 \supset H_2 \supset \cdots$ mit offenem Durchschnitt $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$. Die H_i bestimmen in $\mathfrak{M}$ die Kette der offenen Untermoduln $\mathfrak{H}_i = H_i^{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H} = H^{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{M} = \bigcap_i \mathfrak{H}_i$. Wir wählen nun in der Indexmenge der Summanden von $R^{\mathfrak{a}} = \sum_{\mu}^{\mathfrak{a}} R_\mu$ einen abzählbar unendlichen Teil $J = \{1, 2, \ldots\}$ und für jedes $i \in J$ ein nicht in H_{i+1} liegendes Element $h_i \in H_i$. Hiermit bilden wir den Filter

$$\boldsymbol{F} = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu(h_\nu) + \mathfrak{H}_{n+1} \right\}_{n=1,2,\ldots}.$$

Angenommen, es existierte ein Element $x = \sum_{\mu}^{\mathfrak{a}} i_\mu(x_\mu) \in \downarrow \boldsymbol{F}$. Dann wäre $\sum_{\nu=1}^{\infty} i_\nu(h_\nu) \equiv x \pmod{\mathfrak{H}}$, also $x_i \equiv h_i \pmod{H}$ für alle $i \in J$. Da das der Summierbarkeit von $\{x_\mu\}_\mu$ widerspräche, muß $\downarrow \boldsymbol{F}$ leer sein. Folglich kann $\mathfrak{M}$ nicht l.k. sein. Da $\mathfrak{M}$ und $R^{(\mathfrak{a})}e$ nach (3.10) isomorph sind, ist dann auch $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht l.k. Damit haben wir bewiesen:

Satz 12. *Sei R ein vollständiger linear topologischer Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl. Der Matrixring $R^{(\mathfrak{a})}$ ist dann und nur dann im engeren Sinne linear kompakt, wenn $R^{(1)}$ im engeren Sinne linear kompakt ist. Für endliches $\mathfrak{a}$ ist $R^{(\mathfrak{a})}$ dann und nur dann linear kompakt, wenn $R^{(1)}$ linear kompakt ist. Ist $\mathfrak{a}$ unendlich und $R^{(1)}$ nicht im engeren Sinne linear kompakt, so ist $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht linear kompakt.*

Ein l.k. Ring unendlichen Grades ist also stets i.e.S.l.k.. Satz 12 führt die Frage, für welche l.t. Ringe S die Matrixringe $S^{(\mathfrak{a})}$ l.k., bzw. i.e.S.l.k. sind, auf die Frage zurück, für welche S die Ringe $S^{(1)}$ der hyperstetigen Endomorphismen l.k., bzw. i.e.S.l.k. sind. Enthält S eine Eins, so ist $S^{(1)} = S$ und Satz 12 gibt die vollständige Antwort. Im allgemeinen Fall ist es jedoch möglich, daß $S^{(1)}$ (und dann also auch $S^{(\mathfrak{a})}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$) i.e.S.l.k. ist, ohne daß S auch nur l.k. zu sein braucht. Sei etwa S eine diskrete abelsche p-Gruppe mit Elementen beliebig hoher Ordnung. Durch die Fest-

setzung $S^2=0$ wird S zum vollständigen l.t. Ring. Man sieht leicht, daß $S^{(1)}$ zum Ring der ganzen p-adischen Zahlen isomorph ist.

Schließlich wollen wir noch die Frage nach dem Radikal eines l.k. Matrixringes beantworten:

Satz 13. *Sei $R^{(\mathfrak{a})}$ ein linear kompakter Matrixring über dem linear kompakten Ring mit Einselement R. Ist N' das Radikal von $R^{(\mathfrak{a})}$ und N das Radikal von R, so entsprechen sich N' und N in der in Satz 11 beschriebenen Weise.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 12, da das Radikal eines l.k. Ringes mit Eins verbandstheoretisch als Durchschnitt der maximalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale gekennzeichnet ist.

Satz 13 wird falsch, wenn wir von $R^{(\mathfrak{a})}$ keine lineare Kompaktheit voraussetzen, selbst bei linear kompaktem R: Sei R der Ring der ganzen p-adischen Zahlen in der diskreten Topologie und $\mathfrak{a}=\aleph_0$. $R^{(\mathfrak{a})}=R^{(\aleph_0)}$ ist der Ring aller spaltenfiniten Matrizen mit abzählbar unendlich vielen Zeilen und Spalten. Nach Satz 12 sind die Ideale $p^i R^{(\mathfrak{a})}$, $i=0, 1, 2, \ldots$, und 0 die einzigen abgeschlossenen zweiseitigen in $R^{(\mathfrak{a})}$. Wir zeigen, daß kein $p^i R^{(\mathfrak{a})}$, $i=1, 2, \ldots$, quasiregulär ist. Dabei dürfen wir uns auf $i=1$ beschränken. $pR^{(\mathfrak{a})}$ enthält die Matrix (u_{ik}) mit $u_{i+1,i}=p$, $u_{ik}=0$ sonst. Ist 1 die Einheitsmatrix, so hat $1-u$ die inverse Matrix $1+v$ mit $v=(v_{ik})$, $v_{ik}=p^j$ für $i=k+j$, $v_{ik}=0$ sonst. Da die Matrix v als eindeutig bestimmte Quasiinverse zu u nicht in $R^{(\mathfrak{a})}$ liegt, ist u in $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht quasiregulär, folglich ist auch $pR^{(\mathfrak{a})}$ nicht quasiregulär.

Wir wollen nun noch zeigen, daß $R^{(\mathfrak{a})}$ ein von 0 verschiedenes Radikal $\mathfrak{N}$ hat. Dazu genügt es, ein quasireguläres eigentliches zweiseitiges Ideal in $R^{(\mathfrak{a})}$ anzugeben. Ein solches ist das Ideal pE, wobei E das Ideal aller Matrizen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Zeilen ist. Liegt x in E, so auch alle Potenzen x^i und folglich auch $x'=x+px^2+p^2x^3+\cdots$. Das Element $-px'$ ist offenbar quasiinvers zu px, d.h. pE ist quasiregulär, liegt also in $\mathfrak{N}$. Damit ist gezeigt, daß das Radikal von $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht abgeschlossen ist. Das Ideal E entspricht genau dem Ideal aller endlichwertigen linearen Transformationen — im Sinne von JACOBSON — des Ringes aller linearen Transformationen eines Vektormoduls über einem Schiefkörper.

§ 4

Wir werden in diesem Paragraphen die Verallgemeinerung des Satzes von ARTIN über primäre Ringe mit Minimalbedingung für allgemeine l.k. Ringe beweisen. Ein l.k. Ring R mit Radikal N heißt *primär*[1]), wenn der Restklassenring R/N einfach, nach Satz L12 also voller Matrixring über einem Schiefkörper ist. Den Grad dieses Matrixringes bezeichnen wir auch als Grad von R. Hat R den Grad 1, ist also R/N ein Schiefkörper, so heißt R

[1]) Den Mißstand, den Terminus „primär" in dieser Arbeit in zwei verschiedenen Bedeutungen zu verwenden (vgl. §§ 5, 6), wird man nicht vermeiden können, wenn man die übliche Terminologie beibehalten will. Da wir die Bezeichnung „primär" im Sinne der Ringtheorie nur in diesem Paragraphen, im Sinne der Modultheorie nur in den §§ 5 und 6 verwenden, wird dieser Hinweis genügen, um Mißverständnisse auszuschließen.

vollständig primär. Nach ARTIN ist ein primärer Ring mit Einselement und Minimalbedingung Matrixring über einem vollständig primären Ring. Wir werden zeigen, daß ein i.e.S.l.k. primärer Ring mit Eins Matrixring über einem vollständig primären i.e.S.l.k. Ring ist. Für primäre l.k. Ringe unendlichen Grades ist dieses Ergebnis optimal, denn wir haben im vorigen Paragraphen gezeigt, daß ein l.k. Matrixring unendlichen Grades stets i.e.S.l.k. ist. Für endliche Grade dagegen gibt es l.k., nicht i.e.S.l.k. Matrixringe. In diesem Fall können wir auch etwas mehr zeigen: Ein primärer l.k. Ring mit Eins von endlichem Grade ist Matrixring über einem vollständig primären l.k. Ring, falls sein Radikal nilpotent ist ($\overset{*}{N}=0$). Ob es primäre l.k. Ringe ohne nilpotentes Radikal gibt, ist mir nicht bekannt. Die in § 2 konstruierten Ringe ohne nilpotentes Radikal sind alle nicht primär.

Um die genannten Sätze zu beweisen, genügt es nach Satz 10 zu zeigen, daß die betreffenden l.k. Ringe Systeme von Matrixeinheiten enthalten. Dabei werden wir natürlich so vorgehen, daß wir die Systeme der Matrixeinheiten der einfachen Restklassenringe nach den Radikalen zu Systemen der Ringe selbst „fortsetzen". Dabei besteht die Hauptschwierigkeit darin, die orthogonalen minimalen Idempotente fortzusetzen. Die Fortsetzbarkeit einzelner Idempotente ist allerdings sehr leicht zu zeigen:

(4.1) *Sei M ein nilpotentes zweiseitiges Ideal des l.k. Ringes R. In jeder idempotenten Restklasse $\bar{e}$ von R modulo M liegt ein idempotentes Element $e \in R$.*

Wir nehmen an, daß für alle $\mu < \lambda$ bereits Restklassen $e_\mu + \underset{\mu}{M}$ gefunden seien, so daß $\boldsymbol{M}_\lambda = \{e_\mu + \underset{\mu}{M}\}_{\mu<\lambda}$ ein Filter idempotenter Restklassen mit $e_\mu \in \bar{e}$ ist. Ist λ Limeszahl, so wählen wir ein Element $e_\lambda \in \downarrow \boldsymbol{M}_\lambda$ und erhalten die idempotente Restklasse $e_\lambda + \underset{\lambda}{M} < \downarrow \boldsymbol{M}_\lambda < \bar{e}$. Ist $\lambda = \varkappa + 1$, so ist $e_\varkappa^2 = e_\varkappa + q$ mit $q \in \underset{\varkappa}{M}$, also $q^2 \in \underset{\lambda}{M}$. Mit $e_\lambda = e_\varkappa - 2e_\varkappa q + q$ ist dann $e_\lambda + \underset{\lambda}{M}$ wieder idempotent und liegt in $\bar{e}$. Somit bekommen wir für jedes μ eine in $\bar{e}$ liegende idempotente Restklasse $e_\mu + \underset{\mu}{M}$. Ist $\underset{\zeta}{M} = 0$, so haben wir in $e = e_\zeta + \underset{\zeta}{M}$ das gewünschte idempotente Element aus R gefunden.

Ist R ein primärer l.k. Ring endlichen Grades mit Eins und nilpotentem Radikal N, so folgt aus (4.1) nach bekannten Schlüssen (vgl. [2], II, § 6), daß sich die endlich vielen orthogonalen minimalen Idempotente e_i des Restklassenringes R/N zu orthogonalen minimalen Idempotenten von R fortsetzen lassen. Ist der Grad von R nicht endlich, so interessiert, wie wir sahen, nur der Fall i.e.S.l.k. Ringe. Sei R deshalb im folgenden stets ein primärer i.e.S.l.k. Ring mit Einselement 1. Das Radikal N von R ist dann r-nilpotent und nach (4.1) lassen sich die Idempotente von R/N einzeln zu Idempotenten von R fortsetzen. Wir werden nun zeigen, daß sich minimale orthogonale Idempotente von R/N zu orthogonalen Idempotenten von R fortsetzen lassen. Wir nennen ein System orthogonaler Idempotente $e_\mu \in R$ ($\bar{e}_\mu \in R/N$) *vollständig*, wenn sie summierbar sind und $1 = \sum\limits_\mu e_\mu$ ist ($\bar{1} = \sum\limits_\mu \bar{e}_\mu$, $\bar{1}$ = Restklasse von 1 modulo N).

(4.2) *Sei $\{\bar{e}_\mu\}$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotente aus R/N und $\{e_\mu\}$ ein Vertretersystem von Elementen $e_\mu \in \bar{e}_\mu$. $x=0$ ist das einzige Element aus R mit $xe_\mu = 0$ für alle e_μ.*

Ist $xe_\mu = 0$ für alle e_μ, so folgt $x \in N$. Angenommen, für $x \in N_\alpha$ und alle e_μ gilt $xe_\mu = 0$. Wir setzen $\mathfrak{N} = N_\alpha/N_{\alpha+1}$ und bezeichnen mit ξ die Restklasse von x in $\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N}N = 0$ ist $\mathfrak{N}$ ein R/N-Modul und für ξ gilt: $\xi\bar{e}_\mu = 0$ für alle $\bar{e}_\mu \in R/N$. Dann gilt auch $\xi\bar{s} = 0$ für alle endlichen Teilsummen $\bar{s}$ der $\bar{e}_\mu$. Da die Rechtsmultiplikationen mit den Elementen aus R/N stetig sind, ist dann auch $\xi = \xi \cdot \bar{1} = \xi \sum_\mu \bar{e}_\mu = 0$, d.h. $x \in N_{\alpha+1}$. Aus $x \in N_\alpha$ folgt also $x \in N_{\alpha+1}$, d.h. es ist $x = 0$.

Satz 14. *Ist R ein im engeren Sinne linear kompakter Ring mit Einselement, N sein Radikal, $\{\bar{e}_\mu\}_{\mu \in I}$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotente des Restklassenringes R/N, $\{e_\mu\}_{\mu \in I}$ ein beliebiges System von idempotenten Vertretern $e_\mu \in \bar{e}_\mu$, so ist R direkte Summe der Rechtsideale Re_μ:*

$$R = \sum_\mu Re_\mu.$$

Bemerkung. Hier ist *nicht* vorausgesetzt, daß R primär ist!

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für $x \in R$ durch

$$\varphi\colon \quad x \to \tilde{x} = \sum_\mu xe_\mu$$

ein Isomorphismus φ von R auf $\tilde{R} = \sum Re_\mu$ gegeben ist. Nach (4.2) ist φ ein stetiger Isomorphismus von R in $\tilde{R}$. Um $\varphi(R) = \tilde{R}$ zu zeigen, genügt es, nachzuweisen, daß $\varphi(R)$ in $\tilde{R}$ dicht liegt. Das ist sicher dann der Fall, wenn stets zu endlich vielen der e_μ, etwa $e_1, \ldots, e_k$, ein $z \in R$ existiert mit

$$(*) \qquad \varphi(z) = e_1 + \sum{}' u_\mu e_\mu, \qquad u_\mu \in N,$$

wobei in $\sum'$ über alle $\mu \neq 1, \ldots, k$ summiert wird. Für $k = 1$ können wir $z = e_1$ setzen. Wir nehmen nun an, daß für jede Wahl von $k-1$ der e_μ Elemente $z \in R$ existieren, so daß die (*) entsprechenden Gleichungen gelten und wählen die Idempotente $e_1, \ldots, e_k$. Es gibt dann Elemente z^i, $i = 1, \ldots, k-1$, mit

$$\varphi(z^i) = e_i + v^i e_k + \sum{}' u^i_\mu e_\mu$$

mit $v^i, u^i_\mu \in N$. Weiter gilt

$$\varphi(e_k) = w_1 e_1 + \cdots + w_{k-1} e_{k-1} + e_k + \sum{}' w_\mu e_\mu, \quad w_\nu \in N,$$

also

$$\varphi\left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i z^i\right) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} w_i v^i\right) e_k + \sum{}' w'_\mu e_\mu.$$

Wegen $\sum_1^{k-1} w_i z^i = w \in N$ existiert $r = (1-w)^{-1}$. Für $z^k = r\left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i z^i\right)$ gilt dann

$$\varphi(z^k) = e_k + \sum{}' r w'_\mu e_\mu$$

und mit $z = z^1 - v^1 z^k$ also

$$\varphi(z) = e_1 + \sum' u_\mu e_\mu, \qquad u_\mu \in N.$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet und $\varphi(R) = \tilde{R}$ bewiesen. Da R i.e.S.l.k. ist, hat φ auch die notwendigen topologischen Eigenschaften.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 14 erhalten wir:

(4.3) *Ist $\overline{E} = \{\bar{e}_\mu\}$ ein (nicht notwendig vollständiges) System orthogonaler Idempotente von R/N, so ist jedes System $\{e_\mu\}$ von idempotenten Vertretern $e_\mu \in \bar{e}_\mu$ summierbar.*

Da wir $\{\bar{e}_\mu\}$ gegebenenfalls durch Hinzunahme von $\bar{1} - \sum_{\bar{e}_\mu \in \overline{E}} \bar{e}_\mu$ zu einem vollständigen System ergänzen können und jedes Teilsystem eines summierbaren Systems summierbar ist, dürfen wir annehmen, daß $\{\bar{e}_\mu\}$ vollständig ist. Dann ist $R = \sum_\mu R e_\mu$. Ist L offen, so liegen fast alle Re_μ und folglich fast alle $\{e_\mu\}$ in L.

Sei nun E_0 ein maximales System orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu \in \overline{E}$. Die Existenz solch eines E_0 ist nach dem Satz von ZORN klar. Sei $\overline{E}_0$ die Menge der $\bar{e}_\mu \in \overline{E}$ mit Vertretern in E_0. Ist $\overline{E}_0 \neq \overline{E}$, so sei $\bar{e}$ ein nicht in $\overline{E}_0$ liegendes Element von $\overline{E}$, e ein idempotenter Vertreter aus $\bar{e}$ und $f = \sum_{e_\mu \in E_0} e_\mu$. Dann ist $e' = e - fe - ef + fef$ ein Vertreter von $\bar{e}$ mit $e_\mu e' = e' e_\mu = 0$ für alle $e_\mu \in E_0$. Ist $e'^2 = e' + q$, so ist $e'' = e' - 2e'q + q$ ein idempotenter Vertreter von $\bar{e}$, für den ebenfalls $e_\mu e'' = e'' e_\mu = 0$ für $e_\mu \in E_0$ gilt. Folglich ist $E_0 \cup \{e''\}$ ein E_0 echt enthaltendes System orthogonaler idempotenter Vertreter. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\overline{E}_0 = \overline{E}$ sein muß:

(4.4) *Jedes System orthogonaler Idempotente des Restklassenringes R/N hat ein System orthogonaler idempotenter Vertreter in R.*

Der Restklassenring R/N nach dem Radikal ist halbeinfach, also nach Satz L13 direkte Summe einfacher l.k. Ringe R'_σ und die R'_σ sind nach Satz L12 direkte Summen minimaler Linksideale $H'_{\sigma\mu} = R'_\sigma \bar{e}_{\sigma\mu}$, wobei die $\bar{e}_{\sigma\mu}$ ein vollständiges System minimaler orthogonaler Idempotente von R'_σ bilden. $\{\bar{e}_{\sigma\mu}\}_{\sigma,\mu}$ ist also ein vollständiges System minimaler orthogonaler Idempotente von R/N und hat nach (4.4) ein System $\{e_{\sigma\mu}\}$ orthogonaler idempotenter Vertreter $e_{\sigma\mu} \in R$. Die $e_{\sigma\mu}$ sind natürlich auch unzerlegbar, desgleichen die von den $e_{\sigma\mu}$ erzeugten Linksideale $Re_{\sigma\mu}$. Anwendung von (4.4) und Satz 14 ergibt

Satz 15. *Ein im engeren Sinne linear kompakter Ring R mit Eins ist direkte Summe unzerlegbarer Linksideale $A_\mu = Re_\mu$, welche von minimalen orthogonalen Idempotenten e_μ erzeugt werden:*

$$R = \sum_\mu R e_\mu, \qquad e_\mu e_\nu = e_\mu \delta_{\mu\nu}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß R i.e.S.l.k., primär vom Grade $\mathfrak{a}$ ist und eine Eins enthält. Ist N das Radikal, so ist also $R/N = \Delta^{(\mathfrak{a})}$ ein Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über einem Schiefkörper Δ. R/N enthält ein System von Matrix-

einheiten $\{\bar{e}_{\mu\nu}\}$ und R enthält nach (4.4) ein summierbares System $\{e_\mu\}$ orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu \in \{\bar{e}_{\mu\nu}\}$.

(4.5) *Sei R ein primärer l.t. Ring mit Eins und abgeschlossenem Radikal N und $\{\bar{e}_{\mu\nu}\}$ ein System von Matrixeinheiten des Restklassenringes R/N. Ist $\{e_\mu\}$ ein summierbares System orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu$, so kann man $\{e_\mu\}$ zu einem System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Matrixeinheiten $e_{\mu\nu} \in \bar{e}_{\mu\nu}$ von R ergänzen.*

Wir wählen einen festen Index 1, Vertreter $f_{\mu 1} \in \bar{e}_{\mu 1}$, $f_{1\mu} \in \bar{e}_{1\mu}$ und setzen $e_{1\mu} = e_1 f_{1\mu} e_\mu$. Dann ist $e_{1\mu}$ Vertreter von $\bar{e}_{1\mu}$ und es gilt $f_{\mu 1} e_{1\mu} \equiv e_\mu \pmod N$, also $f_{\mu 1} e_{1\mu} = e_\mu + r_\mu = (1 + r_\mu) e_\mu$ mit $r_\mu \in N$. Setzen wir $e_{\mu 1} = e_\mu (1 + r_\mu)^{-1} f_{\mu 1} e_1$, so haben wir also Vertreter $e_{\mu 1}$, $e_{1\mu}$ gefunden mit $e_{\mu 1} e_{1\mu} = e_\mu$ für alle μ. Aus $(e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1})^2 = e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1} \in N$ folgt schließlich $e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1} = 0$, d.h. $e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_1$. Man rechnet leicht nach, daß $e_{\mu\nu} = e_{\mu 1} e_{1\nu}$ das gewünschte Vertretersystem ergibt.

Aus unseren Ergebnissen folgt nun, daß ein primärer i.e.S.l.k. Ring R mit Einselement, bzw. ein primärer l.k. Ring R endlichen Grades mit nilpotentem Radikal und Einselement Matrixring $R_0^{(\alpha)}$ über einem i.e.S.l.k. Ring R_0, bzw. l.k. Ring R_0 mit Einselement ist. Hierbei können wir noch R_0 mit eRe identifizieren, wobei e ein minimales, d.h. unzerlegbares Idempotent aus R ist. Da das Radikal N von R maximal ist, muß nach Satz 11 auch das Radikal N_0 von R_0 maximal sein, d.h. R_0 ist primär. Da das Einselement e aus R_0 unzerlegbar ist, muß R_0 dann sogar vollständig primär sein.

Wir fassen die letzten Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen:

Satz 16. *Ein primärer im engeren Sinne linear kompakter Ring R mit Eins ist Matrixring über einem vollständig primären im engeren Sinne linear kompakten Ring R_0 mit Eins.*

Ein primärer linear kompakter Ring R endlichen Grades mit Eins und nilpotentem Radikal ist Matrixring über einem vollständig primären linear kompakten Ring R_0 mit Eins.

Ist e ein unzerlegbares Idempotent von R und identifizieren wir R_0 mit eRe, so ist $eNe = N_0$ das Radikal von R_0, falls N das Radikal von R ist. Umgekehrt ist $N = \overline{RN_0R}$. Beschreiben wir R durch Matrizen mit Elementen aus R_0, so besteht N aus allen Matrizen mit Elementen aus N_0.

§ 5

Nach PRÜFER heißt $\mathfrak{R}$ Servanzuntergruppe der (gewöhnlichen) abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn jede in $\mathfrak{G}$ lösbare Gleichung $r = n x$ mit $r \in \mathfrak{R}$ und natürlichem n schon in $\mathfrak{R}$ lösbar ist. Seit einiger Zeit hat sich statt des Ausdrucks Servanzuntergruppe die bequemere Bezeichnung „reine Untergruppe" eingebürgert. Man kann diesen Begriff sofort auf beliebige Operatormoduln verallgemeinern:

Definition. Sei $\mathfrak{M}$ ein Modul mit einem Linksoperatorenbereich Λ. Ein Λ-invarianter Untermodul $\mathfrak{R}$ heißt *rein*, wenn jede in $\mathfrak{M}$ lösbare Gleichung $r = \lambda x$ mit $r \in \mathfrak{R}$ und $\lambda \in \Lambda$ schon in $\mathfrak{R}$ lösbar ist.

Ist $\mathfrak{A}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{A}$ rein in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{U}$ ein Zwischenmodul:

$\mathfrak{A} < \mathfrak{U} < \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch reiner Untermodul in $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{N}$ rein in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ Untermodul von $\mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ rein. Hiervon gilt die Umkehrung natürlich nicht, desgleichen wird im allgemeinen das Erzeugnis von zwei reinen Untermoduln nicht rein sein, selbst dann nicht, wenn es direkt ist. Beispiele für reine Untermoduln sind die direkten Summanden. Ist $\mathfrak{M}$ topologisch, so wird man im allgemeinen nur abgeschlossene Untermoduln betrachten. Es kann dann der Fall eintreten, daß ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{N}$ *algebraisch* direkter Summand ist, d.h. daß ein nicht notwendig abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{N}'$ existiert, derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(+)\mathfrak{N}'$ ist. Eine solche Zerlegung ist natürlich hinreichend für die Reinheit von $\mathfrak{N}$. Ist Λ = Menge der ganzen rationalen Zahlen und $\mathfrak{M}$ kompakt, so ist eine derartige direkte Zerlegbarkeit umgekehrt auch notwendig für die Reinheit der Untergruppe, mit anderen Worten: Eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten abelschen Gruppe ist genau dann rein, wenn sie algebraisch direkter Summand ist.

Der Begriff des reinen Untermoduls scheint nur dann fruchtbar zu sein, wenn Λ kommutativ ist. In diesem Falle sind nämlich die Untermoduln $\mathfrak{U}_\lambda = \{x \mid \lambda x = 0\}$ Λ-invariant. Wir werden uns deshalb in diesem Paragraphen im wesentlichen auf die Untersuchung l.k. Moduln mit kommutativem Operatorenbereich beschränken.

Wir betrachten von nun an wieder l.k. Moduln. Sei R ein Ring, $\mathfrak{M}$ ein l.k. R-Modul und $\mathfrak{A} = \sum_\mu \mathfrak{A}_\mu$ eine vollständige direkte Summe von l.k. R-Moduln $\mathfrak{A}_\mu$.

Definition. Ein stetiger R-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{A}$ heißt *rein*, wenn $\mathfrak{M}$ zu jedem μ einen *nicht notwendig abgeschlossenen* Untermodul $\mathfrak{H}_\mu$ enthält, der durch φ isomorph auf $\mathfrak{A}_\mu$ abgebildet wird, d.h.: Ist $\mathfrak{K}$ der Kern von φ, so existiert zu jedem μ ein Untermodul $\mathfrak{H}_\mu < \mathfrak{M}$ mit

$$\varphi(\mathfrak{H}_\mu) = \mathfrak{A}_\mu, \qquad \mathfrak{H}_\mu \cap \mathfrak{K} = 0.$$

Wir wollen im folgenden stets voraussetzen, daß der Ring R kommutativ und l.k. ist. Wir benötigen für unsere Untersuchungen den Ring Ω *aller*, d.h. auch der unstetigen mit R vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$. Schreiben wir die Endomorphismen $A, B, \ldots \in \Omega$ als Rechtsoperatoren, so gilt also $\varrho x \cdot A = \varrho \cdot xA$ für $\varrho \in R$, $x \in \mathfrak{M}$. Wegen der Kommutativität von R ist durch $x \cdot \varrho A = \varrho xA$ für $\varrho \in R$ und $A \in \Omega$ ein Endomorphismus ϱA aus Ω definiert, Ω ist also ein R-Modul. Seien $x_1, \ldots, x_k$ endlich viele Elemente und $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul aus $\mathfrak{M}$. Die Menge aller $A \in \Omega$ mit $x_i A \in \mathfrak{U}$, $i = 1, \ldots, k$, ist ein R-Untermodul $Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U})$ von Ω. Wir wählen das System $\boldsymbol{B}_\Omega$ aller dieser Untermoduln Y als Basisfilter einer Topologie in Ω. Dadurch wird Ω zu einem l.t. R-Modul.

(5.1) *Ω ist ein l.k. R-Modul.*

Sei $Y = Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{B}_\Omega$ und $A \in \Omega$. Durch

$$A \to \iota(A) = x_1 A \pmod{\mathfrak{U}} + \cdots + x_k A \pmod{\mathfrak{U}}$$

ist ein R-Homomorphismus ι von Ω in die diskrete l.k. k-gliedrige direkte

Summe $\mathfrak{M}/\mathfrak{U} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}/\mathfrak{U} = \mathfrak{M}'$ gegeben, dessen Kern gleich Y ist. Folglich ist Ω/Y zu einem Untermodul von $\mathfrak{M}'$ isomorph, also ebenfalls ein diskreter l.k. R-Modul. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß Ω vollständig ist. Sei $\boldsymbol{C} = \{A + Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U})\}$ ein Cauchyfilter in Ω und $x \in \mathfrak{M}$. Das System $\boldsymbol{C}_x$ aller Restklassen $xA + \mathfrak{U}$, für die $A + Y(x; \mathfrak{U})$ in $\boldsymbol{C}$ liegt, ist ein Cauchyfilter in $\mathfrak{M}$. Durch $xC = \lim \boldsymbol{C}_x$ ist also eine Abbildung C von $\mathfrak{M}$ in sich definiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß C in Ω liegt und $C = \lim \boldsymbol{C}$ ist. Im allgemeinen wird Ω kein topologischer Ring sein, jedoch ist für jedes $A \in \Omega$ die Linksmultiplikation mit A ein stetiger R-Endomorphismus von Ω, wie aus der Formel $A \cdot Y(xA; \mathfrak{U}) < Y(x; \mathfrak{U})$ folgt.

Sei jetzt A ein System l.k. R-Moduln. Für jedes Teilsystem $B < A$ bilden wir die direkte Summe $\mathfrak{S}_B = \sum_{\mathfrak{A} \in B} \mathfrak{A}$ und bezeichnen mit A^A die Menge aller dieser $\mathfrak{S}_B$. Wir betrachten dann die Menge $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{\Phi}^*(\mathfrak{M}, A)$ aller stetigen Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ auf Moduln aus A^A und definieren genau wie in [6] in $\boldsymbol{\Phi}^*$ eine Ordnung: Sind $\varphi, \psi \in \boldsymbol{\Phi}^*$, $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_B$, $\psi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_C$, so bedeute $\varphi < \psi$, daß B echter Teil von C und $\varphi = \pi\psi$ ist, wobei π die Projektion von $\mathfrak{S}_C$ auf $\mathfrak{S}_B$ ist.

Sei $\varkappa = \{\varphi\}$ eine Kette aus $\boldsymbol{\Phi}^*$, $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_{B_\varphi}$ für $\varphi \in \varkappa$, $B = \bigcup_{\varphi \in \varkappa} B_\varphi$ und $\hat{\varkappa}$ die Menge aller $\psi \in \boldsymbol{\Phi}^*$ mit $\varphi \leq \psi$ für alle $\varphi \in \varkappa$. Es ist leicht zu sehen, daß $\hat{\varkappa}$ genau ein kleinstes ψ enthält, d.h. es gibt ein $\psi = \sup \varkappa = \sup_{\varphi \in \varkappa} \varphi$ in $\boldsymbol{\Phi}^*$ mit $\varphi \leq \psi$ für alle $\varphi \in \varkappa$ und $\psi \leq \psi'$ für alle $\psi' \in \hat{\varkappa}$. ψ bildet $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{S}_B$ ab. Die Beweise für diese Behauptungen findet man im wesentlichen in [6].

Mit $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{M}, A)$ bezeichnen wir jetzt das Teilsystem aller *reinen* Homomorphismen aus $\boldsymbol{\Phi}^*$. Ist $\varkappa$ eine Kette aus $\boldsymbol{\Phi}$, so existiert $\sup \varkappa$ in $\boldsymbol{\Phi}^*$, es ist aber von vornherein nicht gesagt, daß $\sup \varkappa$ auch in $\boldsymbol{\Phi}$ liegt, es könnte z.B. Ketten $\varkappa \in \boldsymbol{\Phi}$ mit $\hat{\varkappa} \cap \boldsymbol{\Phi} = \emptyset$ geben.

Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, nennen wir im folgenden $\varphi \in \boldsymbol{\Phi}^*$ *direkt*, wenn der Kern $\mathfrak{K} = \varphi^{-1}(0)$ algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist; es gibt dann also eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{K}$ mit einem unter Umständen nicht abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{H}$. Zu dieser Zerlegung gehört dann die Projektion $P \in \Omega$ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{H}$. Es ist klar, daß ein direkter Homomorphismus stets rein ist. Wir betrachten nun die Menge $\Pi = \Pi(\mathfrak{M}, A)$ der Paare (φ, P), in denen φ ein direkter Homomorphismus aus $\boldsymbol{\Phi}$ mit dem Kern $\mathfrak{K}$ und P eine Projektion aus Ω ist, derart daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}P(+)\mathfrak{K}$ ist. Wir ordnen nun auch Π: $(\varphi, P) < (\varphi', P')$ soll bedeuten: $\varphi < \varphi'$ und $P = PP' = P'P$. Ist K eine Kette aus Π, so bilden die zu K gehörigen φ eine Kette $\varkappa(K)$ in $\boldsymbol{\Phi}$. Wir setzen $\varphi_K = \sup \varkappa(K)$.

(5.2) *Ist K eine Kette aus Π, so ist φ_K direkt und es existiert eine zu φ_K gehörige Projektion $P_K \in \Omega$, so daß $(\varphi, P) \leq (\varphi_K, P_K)$ gilt für alle $(\varphi, P) \in K$.*

Beweis. Sei E die identische Transformation aus Ω. Ist $\mu = (\varphi_\mu, P_\mu) \in K$, so setzen wir $P'_\mu = E - P_\mu$. Die P'_μ sind dann auch Projektionen und $\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{M}P'_\mu$ ist der Kern von φ_μ. Der Untermodul $\Omega P'_\mu$ besteht aus allen $A \in \Omega$ mit $\mathfrak{M}A < \mathfrak{K}_\mu$, ist also abgeschlossen. Da die Linksmultiplikation mit P'_μ stetig,

Ω l.k. und $\Omega P'_\mu$ abgeschlossen ist, ist auch $\Omega_\mu = P'_\mu \Omega P'_\mu$ abgeschlossen. Für $\mu < \nu$ gilt nach Voraussetzung $P_\nu - P_\mu = P'_\mu (P_\nu - P_\mu) P'_\mu$, also $P_\mu \equiv P_\nu (\mathrm{mod}\, \Omega_\mu)$. Ist ferner $\mathfrak{K} = \bigcap_\mu \mathfrak{K}_\mu$ der Kern von φ_K, so gilt $\mathfrak{K} P_\mu = 0$ für alle $\mu \in K$; bezeichnen wir mit Θ den abgeschlossenen Untermodul aller $A \in \Omega$ mit $\mathfrak{K} A = 0$, so ist also

$$\boldsymbol{P} = \{P_\mu + \Omega_\mu \cap \Theta\}$$

ein Filter in Θ. Wir wählen ein $P_K \in \downarrow \boldsymbol{P}$. Wegen $P_\mu - P_K \in \Omega_\mu$ haben wir $P_\mu (P_\mu - P_K) = 0$, $(P_\mu - P_K) P_\mu = 0$, d.h. $P_\mu = P_\mu P_K = P_K P_\mu$.

Sei $\varphi_K(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \in A^A$. Zu $s \in \mathfrak{S}$ wählen wir ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $\varphi_K(x) = s$. Aus $\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu(x P_\mu) = \varphi_\mu(x P_K P_\mu) = \varphi_\mu(x P_K)$ folgt dann $\varphi_K(x P_K) = s$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P_K + \mathfrak{K}$. Ist $z P_K \in \mathfrak{K}$, so folgt wegen $\varphi_K(z) = \varphi_K(z P_K) = 0$ auch $z \in \mathfrak{K}$, also $z P_K = 0$, d.h. $\mathfrak{M} P_K \cap \mathfrak{K} = 0$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P_K (+) \mathfrak{K}$. Wegen $\mathfrak{K} P_K = 0$ ist P_K die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M} P_K$. Damit ist (5.2) bewiesen.

Wegen (5.2) ist $\Pi(\mathfrak{M}, A)$ induktiv geordnet. Sei $(\varphi, P) \in \Pi$ und $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \in A^A$. Ist φ nicht maximal in Φ, so existiert ein $\mathfrak{A} \in A$ und ein $\psi \in \Phi$ mit $\psi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{A}$, $\varphi < \psi$. Ist $\mathfrak{K} = \varphi^{-1}(0)$, so ist $\psi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{A}$. Da ψ rein ist, existiert ein Untermodul $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$, der von ψ isomorph auf $\mathfrak{A}$ abgebildet wird. Daraus folgt $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} (+) \mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{K}' = \psi^{-1}(0) \cap \mathfrak{K}$, also

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P (+) \mathfrak{H} (+) \mathfrak{K}'.$$

Ist nun P' die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M} P (+) \mathfrak{H}$, so ist $P = P P' = P' P$ und folglich $(\varphi, P) < (\psi, P')$, d.h. (φ, P) kann in Π nicht maximal sein oder umgekehrt: Ist (φ, P) maximal in Π, so ist φ maximal in Φ. Hieraus folgt das erste Hauptergebnis dieses Paragraphen:

Satz 17. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter Modul in bezug auf den kommutativen Ring R und φ ein stetiger Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf die direkte Summe $\mathfrak{A} = \sum_\mu \mathfrak{A}_\mu$ der linear kompakten R-Moduln $\mathfrak{A}_\mu$. φ ist dann und nur dann rein, wenn sein Kern algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist.*

Natürlich brauchen wir nur zu beweisen, daß für reines φ der Kern $\mathfrak{K}$ direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist. Sei A das System der Summanden $\mathfrak{A}_\mu$. Offensichtlich ist φ größer als alle anderen Elemente aus $\Phi = \Phi(\mathfrak{M}, A)$, d.h. φ ist das einzige maximale Element aus Φ. Ist nun (ψ, P) maximal in $\Pi(\mathfrak{M}, A)$, so muß also $\varphi = \psi$ und folglich $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P (+) \mathfrak{K}$ sein. Damit ist der Satz schon bewiesen. Fast ebenso einfach folgt der Beweis des zweiten Hauptergebnisses:

Satz 18. *Ist R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter R-Modul und A ein System linear kompakter R-Moduln, so ist die Menge $\Phi(\mathfrak{M}, A)$ der reinen Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ auf Moduln aus A^A induktiv geordnet.*

Sei $\varkappa$ eine maximale Kette aus Φ, d.h. eine Kette aus Φ, die in keiner anderen Kette echt enthalten ist. Das System $\Pi_\varkappa$ der $(\varphi, P) \in \Pi = \Pi(\mathfrak{M}, A)$, für welche φ in $\varkappa$ liegt, ist dann in Π induktiv abgeschlossen, d.h. ist K eine Kette aus $\Pi_\varkappa$, so liegt mit passendem P_K auch (φ_K, P_K) in $\Pi_\varkappa$. Sei nun (ψ, Q) ein Element aus $\Pi_\varkappa$ und $\varphi \in \varkappa$ mit $\psi < \varphi$. Ist $\varphi(\mathfrak{M}) = \psi(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{B}$ und

$\mathfrak{K}$ der Kern von ψ, so ist $\varphi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}$. Da φ ein reiner Homomorphismus von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ ist, muß nach Satz 17 der Kern $\mathfrak{H}$ von φ direkter Summand von $\mathfrak{K}$ sein: $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}(+)\mathfrak{H}$. Daraus folgt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\,Q\,(+)\,\mathfrak{L}\,(+)\,\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\,P\,(+)\,\mathfrak{H},$$

wobei P die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}\,Q\,(+)\,\mathfrak{L}$ ist. Folglich ist $(\psi, Q) < (\varphi, P) \in \Pi_\varkappa$. Wählen wir nun ein maximales $(\varphi, P) \in \Pi_\varkappa$, so ist also $\varphi' \leq \varphi$ für alle $\varphi' \in \varkappa$, d.h. es ist $\varphi = \sup \varkappa$. Da $\varphi^{-1}(0)$ direkter Summand ist, liegt φ in Φ. Eine beliebige Kette $\varkappa$ ist stets in einer maximalen Kette $\varkappa'$ enthalten, wegen $\sup \varkappa \leq \sup \varkappa'$ ist dann auch $\sup \varkappa$ rein. Damit ist Satz 18 bewiesen.

Wir hatten in [6] die reinen Homomorphismen etwas anders definiert, und zwar hatten wir den Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ auf $\sum_\mu \mathfrak{A}_\mu$ rein genannt, wenn zu jedem μ eine *abgeschlossene* Untergruppe von $\mathfrak{M}$ durch φ isomorph auf $\mathfrak{A}_\mu$ abgebildet wird. Die Induktivität eines Systems $\Phi(\mathfrak{M}, A)$ reiner Homomorphismen haben wir dann nur gezeigt für den Fall, daß $\mathfrak{M}$ eine Prüfersche Gruppe ist und $\mathfrak{A}$ nur aus einrangigen Gruppen besteht. Da aber einrangige Prüfersche Gruppen stets abgeschlossen sind, ist Satz (4.5) aus [6] in der Tat ein Spezialfall unseres Satzes 18. Der Beweis von Satz (4.5) benutzte wesentlich die spezielle Struktur des Ringes der ganzen p-adischen Zahlen (eine Prüfersche Gruppe von endlichem Exponenten ist kompakt), er ließ sich also z. B. nicht übertragen auf l.k. Moduln über vollständigen diskreten Bewertungsringen (= kommutativen nullteilerfreien i.e.S.l.k. Ringen, deren Radikal Hauptideal ist). Satz 18 umfaßt diese Fälle selbstverständlich auch. Da fast alle Ergebnisse aus [6], § 5 Folgerungen aus Satz (4.5) waren, können wir diese Sätze nun für beliebige l.k. Moduln $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B aussprechen. Wie man Ordnung, Höhe, Einrangigkeit usw. in diesem Falle zu definieren hat, ist ziemlich selbstverständlich: Ist (p) das Radikal von B, so hat $x \in \mathfrak{M}$ die Höhe l (genauer den Höhenexponenten l), wenn x in $p^l\mathfrak{M}$ und nicht in $p^{l+1}\mathfrak{M}$ liegt, und die Höhe ∞, wenn x in $\bigcap_l p^l\mathfrak{M}$ liegt. Entsprechend definiert man die Ordnung. Ist K_B der Quotientenkörper von B, so sind die B-Untermoduln von K_B und K_B/B genau die einrangigen B-Moduln.

Von den in [6], § 5 bewiesenen Sätzen formulieren wir hier nur

Satz 19. *Sei B ein vollständiger diskreter Bewertungsring. Jeder linear kompakte B-Modul $\mathfrak{M}$ ist zweistufig direkt zerlegbar: $\mathfrak{M}$ ist entweder direkte Summe einrangiger B-Moduln oder $\mathfrak{M}$ enthält einen torsionsfreien reinen Untermodul $\mathfrak{K}$, so daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ einrangig direkt zerlegbar sind. $\mathfrak{K}$ ist dabei Kern eines reinen Homomorphismus.*

Für l.k. Moduln über diskreten Bewertungsringen gilt zum Teil auch die Umkehrung von Satz (4.5) aus [6]:

Satz 20. *Ein Homomorphismus φ eines linear kompakten Moduls $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B auf eine direkte Summe einrangiger B-Moduln ist genau dann rein, wenn sein Kern $\mathfrak{K}$ rein ist.*

Wir können uns im Beweis von Satz 20 darauf beschränken, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$ einrangig ist, und zwar zu $Q = K_B/B$ isomorph, die anderen Fälle sind trivial oder lassen sich leicht auf diesen Fall zurückführen. Ist p ein Primelement von B, d.h. erzeugt p das Radikal von B, so sind die $p^i\mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \ldots$, abgeschlossene B-Untermoduln, desgleichen $\mathfrak{M}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i\mathfrak{M}$. Aus Satz L1 folgt leicht $p\mathfrak{M}^\infty = \mathfrak{M}^\infty$ (man setze in Satz L1 für φ die Abbildung $x \to px$ und $\boldsymbol{R} = \{p^i\mathfrak{M}\}_i$). Da $\mathfrak{R}$ rein ist, gilt:

$$(*) \qquad \mathfrak{R}^\infty = \bigcap_i p^i\mathfrak{R} = \bigcap_i (\mathfrak{R} \cap p^i\mathfrak{M}) = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{M}^\infty.$$

Da $\mathfrak{M}^\infty \not\subset \mathfrak{R}$ ist, folgt aus $\mathfrak{M}/\mathfrak{R} \cong Q$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\infty + \mathfrak{R}$. Wir können also einen einrangigen zu B oder Q isomorphen Untermodul $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{M}^\infty$ so wählen, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{a} + \mathfrak{R}$ ist. Ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R} = 0$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{R}$ und wir sind fertig. Ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R} = (a) \neq 0$, so liegt das Element a wegen $(*)$ in $\mathfrak{R}^\infty$. Wegen $p\mathfrak{R}^\infty = \mathfrak{R}^\infty$ liegt dann a in einem zu $\mathfrak{a}$ isomorphen Untermodul $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{R}^\infty$. Dabei wirkt der Isomorphismus α zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ auf $(a) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$ identisch. Setzen wir $\mathfrak{b} = \{x - \alpha(x)\}_{x \in \mathfrak{a}'}$, so ist also $\mathfrak{M} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{R}$. Damit ist Satz 20 bewiesen. Aus den letzten beiden Sätzen folgt:

Satz 21. *Ist $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter Modul über einem vollständigen diskreten Bewertungsring, so ist jeder abgeschlossene reine Untermodul von $\mathfrak{M}$ algebraisch direkter Summand.*

Beweis. Sei $\mathfrak{R}$ ein reiner abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Nach Satz 19 ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ zweistufig einrangig direkt zerlegbar, d.h.: Es gibt einen reinen Untermodul $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{R}$ einrangig direkt zerlegbar sind. Nach Satz 20 sind die entsprechenden Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ also rein. Nach Satz 17 ist deshalb $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}(+)\mathfrak{R}$. Folglich ist mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{L}$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}(+)\mathfrak{R}$. Damit ist Satz 21 bewiesen. Spezialfall:

(5.3) *Jede reine abgeschlossene Untergruppe einer abelschen kompakten total unzusammenhängenden Gruppe ist algebraisch direkter Summand.*

Dieser Satz gilt übrigens auch, wie ich an anderer Stelle zeige, ohne die Voraussetzung über den Zusammenhang der Gruppe[1]).

§ 6

Wir wollen jetzt die Dualitätstheorie linear topologischer Moduln über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B entwickeln. Dabei werden wir uns durchweg kurz fassen können, da die Abweichungen vom Fall B = ganze p-adische Zahlen im allgemeinen gering sind und dieser Fall ausführlich in [6] und [7] behandelt worden ist.

Von jetzt an sei B ein vollständiger diskreter Bewertungsring. Wir wählen ein festes Primelement p von B, (p) ist dann das Radikal von B. K sei der Quotientenkörper von B und $Q = K/B$ der Restklassenmodul von K modulo B.

[1]) LEPTIN, H.: Eine Kennzeichnung der reinen Untergruppen abelscher Gruppen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 169—171 (1956).

Q ist ein diskreter B-Modul mit der Struktur der Prüferschen Gruppe $Z(p^\infty)$. Unter einem *Charakter* eines topologischen B-Moduls $\mathfrak{M}$ verstehen wir einen stetigen Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q. Da Q diskret ist, gilt:

(6.1) *Ein Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q ist genau dann ein Charakter, wenn sein Kern offen ist.*

Von nun an betrachten wir nur noch l.t. B-Moduln, insbesondere sei $\mathfrak{M}$ ein für allemal ein l.t. B-Modul.

(6.2) *Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so läßt sich jeder Charakter χ_0 von $\mathfrak{A}$ zu einem Charakter χ von $\mathfrak{M}$ fortsetzen.*

Der Kern $\mathfrak{K}$ von χ_0 in $\mathfrak{A}$ ist offen, es gibt also einen maximalen offenen Untermodul $\mathfrak{U} < \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{K}$. Wegen $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \cong (\mathfrak{A} + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ können wir χ_0 als Charakter von $\mathfrak{A} + \mathfrak{U}$ betrachten, der Kern ist dann gleich $\mathfrak{U}$. Nun ist $\chi_0(\mathfrak{A} + \mathfrak{U}) = \chi_0(\mathfrak{A}) < B$, aus der Maximalität von $\mathfrak{U}$ folgt dann leicht, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ zu einem Untermodul von B isomorph ist. Daraus erhält man eine Fortsetzung von χ_0 auf $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ und somit auf $\mathfrak{M}$.

(6.3) *$\mathfrak{M}$ hat genügend viele Charaktere, d.h. zu jedem von 0 verschiedenem $x \in \mathfrak{M}$ existiert ein x nicht annullierender Charakter.*

Beweis wie üblich.

Ist $\mathfrak{L}$ ein l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}$, so sind alle Untermoduln $p^i\mathfrak{L}$, $i = 1, 2, \ldots$, abgeschlossen, folglich auch $\mathfrak{L}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i\mathfrak{L}$. Wir nennen $\mathfrak{L}^\infty$ den *Wurzeluntermodul* von $\mathfrak{L}$ und sagen, $\mathfrak{L}$ sei *wurzelfrei*, falls $\mathfrak{L}^\infty = 0$ ist. Wie bei den Prüferschen Gruppen gilt auch hier $p\mathfrak{L}^\infty = \mathfrak{L}^\infty$. Mit $K = K_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen wir das System aller l.k. wurzelfreien Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegt auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ in K, ferner liegen alle von endlich vielen Elementen erzeugten Untermoduln in K. Mit Hilfe von K erklären wir nun im B-Modul $\hat{\mathfrak{M}}$ aller Charaktere von $\mathfrak{M}$ eine lineare Topologie:

Das System $\hat{\boldsymbol{B}} = \{\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})\}_{\mathfrak{K} < K}$ aller Annullatoren der Moduln $\mathfrak{K} \in K$ sei Basisfilter der Topologie in $\hat{\mathfrak{M}}$.

Wegen $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K} + \mathfrak{H}) = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) \cap \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H})$ ist $\hat{\boldsymbol{B}}$ ein Filter, wegen $(x) \in K$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ ist $\downarrow \hat{\boldsymbol{B}} = 0$, die Topologie also separiert. Trivialerweise besteht $\hat{\boldsymbol{B}}$ aus B-Untermoduln, $\hat{\mathfrak{M}}$ ist also ein l.t. B-Modul. Ist $\mathfrak{A}$ Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist der Annullator $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$. Der Annullator $\hat{\mathfrak{N}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ ist algebraisch zur Charaktergruppe von $\mathfrak{M}'$ isomorph. Da $\mathfrak{M}'$ diskret ist, besteht das System $K' = K_{\mathfrak{M}'}$ der wurzelfreien l.k. Untermoduln von $\mathfrak{M}'$ genau aus den endlichen Untermoduln von $\mathfrak{M}'$. Unter einem *endlichen* B-Modul verstehen wir dabei hier und im folgenden stets einen endlich erzeugbaren periodischen (d.h. jedes Element wird von einer endlichen Potenz von p annuliert) B-Modul. Es folgt, daß K' aus allen Moduln $(\mathfrak{K} + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{K} \in K_{\mathfrak{M}}$ besteht, so daß $\hat{\mathfrak{N}}$ auch topologisch zur Charaktergruppe von $\mathfrak{M}'$ isomorph ist. Aus der Diskretheit von $\mathfrak{M}'$ schließt man wie üblich auf die lineare Kompaktheit von $\hat{\mathfrak{N}}$. Ein Element der Ordnung p^i

aus $\mathfrak{M}'$ wird von $p^i\hat{\mathfrak{N}}$, also erst recht von $\hat{\mathfrak{N}}^\infty$ annulliert. Da $\mathfrak{M}'$ periodisch ist, muß dann $\hat{\mathfrak{N}}^\infty = 0$ sein. Damit ist gezeigt:

(6.4) *Die Annullatoren $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ der offenen Untermoduln $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{M}$ sind l.k. und wurzelfrei. Insbesondere sind die Charaktermoduln diskreter B-Moduln l.k. und wurzelfrei.*

Ist $x \in \mathfrak{M}$, so bezeichnen wir mit $x\hat{y}$ den Wert von x für $\hat{y} \in \hat{\mathfrak{M}}$. $x\hat{y}$ ist eine Bilinearform mit Werten in Q, die bei festem $x \in \mathfrak{M}$ einen Charakter $\omega(x)$ von $\hat{\mathfrak{M}}$ definiert. Wegen (6.3) ist ω ein algebraischer Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$. Ein Cauchyfilter in $\omega(\mathfrak{M})$ ist zu einem Filter

$$\boldsymbol{C}' = \{\omega(x_\mu) + \omega(\mathfrak{M}) \cap \hat{\mathfrak{N}}(\hat{\mathfrak{R}}_\mu)\}$$

äquivalent, wobei $\hat{\mathfrak{R}}_\mu$ die l.k. wurzelfreien Untermoduln von $\hat{\mathfrak{M}}$ durchläuft. Ist $\mathfrak{H}_\mu$ der von $\hat{\mathfrak{R}}_\mu$ in $\mathfrak{M}$ annullierte Untermodul, so ist $\omega(\mathfrak{H}_\mu) = \omega(\mathfrak{M}) \cap \hat{\mathfrak{N}}(\hat{\mathfrak{R}}_\mu)$ und $\boldsymbol{C}' = \{\omega(x_\mu + \mathfrak{H}_\mu)\} = \omega(\boldsymbol{C})$ mit $\boldsymbol{C} = \{x_\mu + \mathfrak{H}_\mu\}$. Offenbar ist $\boldsymbol{C}$ ein Filter. Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ nach (6.4) l.k. und wurzelfrei, wegen (6.3) ist $\mathfrak{U}$ genau der von $\hat{\mathfrak{R}}$ annullierte Untermodul von $\mathfrak{M}$, folglich liegt eine Restklasse von $\mathfrak{U}$ in $\boldsymbol{C}$, d.h. $\boldsymbol{C}$ ist Cauchyfilter. Wenn $\mathfrak{M}$ vollständig ist, existiert also $\lim \boldsymbol{C} = c$ und deshalb auch $\lim \boldsymbol{C}' = \omega(c)$, d.h. $\omega(\mathfrak{M})$ ist dann auch vollständig, insbesondere also abgeschlossen in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$.

Ist $\mathfrak{M}$ l.k. und wurzelfrei, so ist $\hat{\mathfrak{M}}$ ein diskreter Torsionsmodul, nach (6.4) ist also $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ wieder l.k. und wurzelfrei. Ferner sieht man, daß die offenen Untermoduln von $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ genau die Annullatoren endlicher Untermoduln von $\hat{\mathfrak{M}}$ sind. $\mathfrak{M}' = \omega(\mathfrak{M})$ ist in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen. Ist $\hat{\hat{\mathfrak{U}}} = \hat{\hat{\mathfrak{U}}}(\hat{\mathfrak{R}})$ ein offener Obermodul von $\mathfrak{M}'$, so folgt $\hat{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{R}} = 0$, also $\hat{\mathfrak{R}} = 0$, also $\hat{\hat{\mathfrak{U}}} = \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$, also $\mathfrak{M}' = \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$, d.h. ω bildet $\mathfrak{M}$ isomorph auf $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ ab. Sei nun $\mathfrak{M}$ wieder beliebig linear topologisch und $\hat{\hat{y}} \in \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ ein Charakter von $\hat{\mathfrak{M}}$. Der Kern von $\hat{\hat{y}}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ ist offen, enthält also den Annullator $\hat{\mathfrak{N}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$ eines l.k. wurzelfreien Untermoduls $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{M}$. Der diskrete Faktormodul $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{N}}$ ist wegen (6.2) zum Charaktermodul von $\mathfrak{R}$ kanonisch isomorph; da wir eben gesehen haben, daß für l.k. wurzelfreie Moduln ω eine Abbildung *auf* ist, wird also der von $\hat{\hat{y}}$ auf $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{N}}$ induzierte Charakter auch von einem Element y aus $\mathfrak{R}$ induziert. Offenbar ist dann $\hat{\hat{y}} = \omega(y)$. Folglich ist ω auch allgemein eine Abbildung auf. Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so folgt aus (6.3) die Formel

$$(*) \qquad \omega(\mathfrak{A}) = \hat{\mathfrak{N}}(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})).$$

Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ nach (6.4) l.k. und wurzelfrei, $\hat{\mathfrak{N}}(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})) = \omega(\mathfrak{U})$ also wieder offen, d.h. ω ist eine offene Abbildung. Aus $(*)$ folgt ferner, daß mit $\mathfrak{A}$ auch $\omega(\mathfrak{A})$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen ist. Ist umgekehrt $\hat{\hat{\mathfrak{A}}} = \omega(\mathfrak{A})$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen und $\hat{\hat{x}} = \omega(x) \notin \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$, so gibt es ein $\hat{y} \in \hat{\mathfrak{M}}$ mit

$\hat{y}\hat{\hat{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}\hat{y} = 0$, $\hat{y}\hat{\hat{x}} = x\hat{y} \neq 0$, x kann also kein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ sein, d.h. $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen. Ist $\mathfrak{A}$ l.k. und $\boldsymbol{F}'$ ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{A}' = \omega(\mathfrak{A})$, so ist $\boldsymbol{F} = \omega^{-1}(\boldsymbol{F}')$ ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{A}$, also $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$ und folglich auch $\downarrow \boldsymbol{F}' \neq \emptyset$, d.h. mit $\mathfrak{A}$ ist auch $\mathfrak{A}'$ l.k. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 22. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer B-Modul. $\hat{\mathfrak{M}}$ der Charaktermodul von $\mathfrak{M}$ und $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ der Charaktermodul von $\hat{\mathfrak{M}}$. Die kanonische Abbildung ω ist ein offener Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\omega(\mathfrak{A})$ genau dann abgeschlossen, bzw. linear kompakt, wenn $\mathfrak{A}$ abgeschlossen, bzw. linear kompakt ist.*

Satz 22 besagt, daß für einen beliebigen l.t. B-Modul „fast" der Dualitätsatz gilt. Daß der Dualitätsatz jedoch nicht immer gilt, zeigten wir schon in [7]. Genau wie dort, können wir nun auch hier beweisen:

Satz 23 (Dualitätsatz). *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer B-Modul. ω ist dann und nur dann ein topologisch-algebraischer Isomorphismus, wenn jeder abgeschlossene Untermodul $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul und lauter abgeschlossenen Obermoduln in $\mathfrak{M}$ offen ist.*

Die Bedingung ist hinreichend: Ist $\mathfrak{U}'$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ offen und $\omega^{-1}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}$, so sind nach Satz 22 alle Obermoduln von $\mathfrak{U}$ abgeschlossen, da alle Obermoduln von $\mathfrak{U}'$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen sind. Folglich ist $\mathfrak{U}$ offen, ω also stetig.

Die Bedingung ist notwendig: Sei $\mathfrak{U}$ und jeder Obermodul von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ periodisch. Der Annullator $\hat{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{U}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ ist l.k. und wurzelfrei. Das folgt genau wie (6.4), wenn man noch beachtet, daß jeder l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ endlich sein muß. Da nun der Annullator $\hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ von $\hat{\mathfrak{R}}$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ einerseits offen, zum anderen gleich $\omega(\mathfrak{U})$ ist, muß $\mathfrak{U} = \omega^{-1}(\hat{\hat{\mathfrak{U}}})$ offen sein, falls ω topologisch ist.

Wir nennen wie in [7] $\mathfrak{M}$ *linear diskret*, wenn jeder Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul offen ist. $\mathfrak{M}$ heißt *lokal linear kompakt*, wenn es einen l.k. Untermodul mit linear diskretem Faktormodul enthält.

Satz 24. *Ist $\mathfrak{M}$ ein lokal linear kompakter (linear kompakter, linear diskreter) B-Modul, so ist der Charaktermodul $\hat{\mathfrak{M}}$ lokal linear kompakt (linear diskret, linear kompakt) und es gilt der Dualitätsatz. Genauer: Ist $\mathfrak{U}$ ein linear kompakter Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit linear diskretem Faktormodul $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$, so ist der Annullator $\hat{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{U}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ linear kompakt und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{V}}$ ist linear diskret. Außerdem ist $\hat{\mathfrak{V}} \cong \hat{\mathfrak{F}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{V}} \cong \hat{\mathfrak{U}}$.*

Beweis. Bezeichnungen wie im Satz. Ist $\mathfrak{W}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul und lauter abgeschlossenen Obermoduln, so ist $(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})/\mathfrak{W}$ l.k. und hat lauter abgeschlossene Untermoduln, muß also endlich sein. $\mathfrak{M}/(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})$ ist als periodischer linear diskreter Modul diskret, $\mathfrak{U} + \mathfrak{W}$ also offen. Folglich ist auch $\mathfrak{W}$ offen, die Bedingung des Dualitätsatzes also erfüllt.

Jeder Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in Q ist ein Charakter und die l.k. Untermoduln von $\mathfrak{F}$ sind genau die endlich erzeugten. Daraus folgt, ähnlich wie (6.4), daß $\hat{\mathfrak{B}}$ der Charaktermodul von $\mathfrak{F}$ und l.k. ist. Um die Isomorphie von $\hat{\mathfrak{U}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$ zu zeigen, beweisen wir zunächst:

(6.5) *Ist $\mathfrak{A}$ ein l.k. und $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so gilt für die Annullatoren* $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})+\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B})=\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$.

Weil $\mathfrak{A}$ l.k. ist, ist das algebraische Erzeugnis $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ abgeschlossen und es gilt $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})/\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{B}/\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$, ein Charakter $\hat{z}\in\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ läßt sich also in der Form $\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$ mit $\mathfrak{B}\hat{x}=\mathfrak{A}\hat{y}=0$ darstellen. Daraus folgt $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})\subset\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})+\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B})$. Da $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})+\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B})\subset\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ trivial ist, folgt (6.5).

In $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$ bilden die Untermoduln $(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})+\hat{\mathfrak{B}})/\hat{\mathfrak{B}}$ mit $\mathfrak{K}\in K_{\mathfrak{M}}$ ein Basisfilter. Wegen $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})+\hat{\mathfrak{B}}=\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})+\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})=\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}\cap\mathfrak{U})$ entspricht $(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})+\hat{\mathfrak{B}})/\hat{\mathfrak{B}}$ in $\hat{\mathfrak{U}}$ der offene Annullator von $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{U}$. Damit ist $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}\cong\hat{\mathfrak{U}}$ gezeigt.

Wir können uns für den Rest des Beweises von Satz 24 auf die Untersuchung eines l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ beschränken. Sei χ ein beliebiger B-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q. Auf den endlich erzeugten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ induziert χ Charaktere, welche sich zu Charakteren von $\mathfrak{M}$ fortsetzen lassen. Dadurch wird in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}=\mathfrak{M}$ ein Cauchyfilter definiert, dessen Limes offenbar gleich χ ist, d.h.: Jeder Homomorphismus von $\hat{\mathfrak{M}}$ in Q ist ein Charakter, jeder Untermodul von $\hat{\mathfrak{M}}$ also abgeschlossen [7]. Ist $\hat{\mathfrak{U}}$ ein Untermodul mit periodischem Faktormodul, so muß $\hat{\mathfrak{U}}$ Annullator eines wurzelfreien Untermoduls von $\mathfrak{M}$ sein, d.h. $\hat{\mathfrak{U}}$ ist offen. Folglich ist $\hat{\mathfrak{M}}$ linear diskret. Damit ist Satz 24 bewiesen.

Ist $\mathfrak{M}$ wieder ein beliebiger l.t. B-Modul, $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul, $\hat{\mathfrak{B}}=\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})$ der Annullator von $\mathfrak{A}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$, so folgt aus (6.5) genau wie in [6], Beweis zu (6.8), die Isomorphie von $\hat{\mathfrak{A}}$ mit $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$. Gilt für $\mathfrak{M}$ der Dualitätsatz, so kann man die Rollen von $\mathfrak{M}$, bzw. $\mathfrak{A}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$, bzw. $\hat{\mathfrak{B}}$ vertauschen, d.h. es ist dann $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ zu $\hat{\hat{\mathfrak{B}}}$ isomorph. Nun folgt aus dem Kriterium des Dualitätsatzes, daß auch für $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ der Dualitätsatz gilt, folglich ist $\widehat{\mathfrak{M}/\mathfrak{A}}$ zu $\hat{\hat{\mathfrak{B}}}=\mathfrak{B}$ isomorph:

Satz 25. *Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul des linear topologischen B-Moduls $\mathfrak{M}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ der Annullator von $\mathfrak{A}$ im Charaktermodul $\hat{\mathfrak{M}}$, so gilt*

$$\hat{\mathfrak{A}}\cong\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}.$$

Gilt für $\mathfrak{M}$ der Dualitätsatz, so haben wir außerdem die Isomorphie

$$\widehat{\mathfrak{M}/\mathfrak{A}}\cong\mathfrak{B}.$$

Ebenso wie in [7] kann man zeigen, daß der Dualitätsatz genau für die Charaktermoduln l.t. B-Moduln gilt. Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und gilt der Dualitätsatz für $\mathfrak{M}$, so auch für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$. Schließlich

gilt der Dualitätsatz für eine tychonoffsche direkte Summe von B-Moduln genau dann, wenn er für jeden Summanden gilt.

Zusatz bei der Korrektur (1. Nov. 1956): Die Sätze des letzten Paragraphen gelten durchweg auch für l.t. Vektormoduln, d.h. sie gelten auch, falls B ein Schiefkörper ist. In diesem Falle ist $K = Q = B$ und ein Charakter des B-Moduls $\mathfrak{M}$ ist ein stetiger B-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in B. Die Topologisierung des Charaktermoduls (des dualen Moduls) erfolgt mit Hilfe der l.k. Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Die Begriffe „Wurzelmodul" usw. treten hier natürlich nicht auf, dadurch vereinfacht sich manches. Ist B ein kommutativer Körper, so sind die Sätze über B-Vektormoduln unmittelbare Folgerungen aus den vorliegenden Ergebnissen: Wir können B stets als Restklassenkörper eines diskreten Bewertungsringes $\tilde{B}$ auffassen, etwa des Ringes $B\{t\}$ aller formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten t. Ein B-Modul ist dann nichts anderes als ein von t annullierter $\tilde{B}$-Modul. Vgl. G. M. Köthe, Lineare Räume mit linearer Topologie, Abstract from the Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Topologie generale, chap. III, IV. Paris 1942. — [2] Deuring, M.: Algebren. In Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4. Berlin 1935. — [3] Fuchs, L.: On the Structure of Abelian p-Groups. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **4**, 267—288 (1953). — [4] Jacobson, N.: The Radical and Semi-Simplicity for arbitrary Rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [5] Lefschetz, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [6] Leptin, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen II. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 221—243 (1954). — [7] Leptin, H.: Abelsche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear topologischer abelscher Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 244—263 (1954). — [8] Leptin, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe. Math. Z. **62**, 241—267 (1955). — [9] Zelinsky, D.: Raising idempotents. Duke Math. J. **21**, 315—322 (1954).

Hamburg, Math. Seminar der Universität

(Eingegangen am 21. April 1956)

DJERASIMOVIĆ, B.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 328—340 (1957)

Über die binären quadratischen Formen

Von

BOŽIDAR DJERASIMOVIĆ

I. Einleitung

1. Die geordneten Komplexe von natürlichen und von ganzen Zahlen und die Operationen mit diesen (DJ. [2], [3]) ermöglichen bei Anwendung von regelmäßigen Kettenbrüchen auf die Untersuchung der Eigenschaften von binären quadratischen Formen vollständigere Resultate zu bekommen. Diese Arbeit hat dies zum Zweck.

2. In weiteren Darlegungen benötigen wir den Begriff der *Normalform* der quadratischen Irrationalzahlen.

Definition. *Die quadratische Irrationalzahl*

$$\frac{\sqrt{D}+P}{Q}, \qquad \text{wobei} \begin{cases} D>0, & P \text{ und } Q \text{ ganze Zahlen}, \\ D & \text{kein Quadrat}, \end{cases}$$

ist in Normalform, wenn folgende Bedingungen

$$\frac{D-P^2}{Q} = Q_{-1} = \text{ganze Zahl}, \tag{1}$$

$$(Q; P; Q_{-1}) = 1 \tag{2}$$

befriedigt ist.

Durch Erweiterung oder Kürzung kann jede quadratische Irrationalzahl auf die Normalform reduziert werden (PERRON [4], S. 66).

Die Gleichung

$$\frac{\sqrt{D}+P}{Q} = b + \frac{Q_1}{\sqrt{D}+P_1}, \qquad \text{wobei} \quad D-P^2 = Q\,Q_{-1}, \quad b = \left[\frac{\sqrt{D}+P}{Q}\right]$$

ist, zerfällt in die Gleichungen

$$P_1 = b\,Q - P,$$
$$Q_1 = Q_{-1} + 2b\,P - b^2\,Q,$$

wobei $D - P_1^2 = Q_1 Q$ ist, aus welchen dann die Gleichheit

$$(Q_1; P_1; Q) = (Q; P; Q_{-1})$$

folgt, so daß folgender Schluß ausgesprochen werden kann:

Ist eine quadratische Irrationalzahl in Normalform, dann sind — bei ihrer Entwicklung in einen regelmäßigen Kettenbruch — auch alle ihre vollständigen

Quotienten in Normalform. Und umgekehrt, wenn irgendein vollständiger Quotient in Normalform ist, dann ist auch die quadratische Irrationalzahl in solcher Form.

Es seien

$$\xi = \frac{\sqrt{D}+P}{Q}, \quad \omega = \frac{\sqrt{D}+p}{q} \qquad \text{wobei} \begin{cases} \dfrac{D-P^2}{Q} = Q_{-1} = \text{ganze Zahl}, \\ \dfrac{D-p^2}{q} = q_{-1} = \text{ganze Zahl}, \end{cases}$$

irgendwelche zwei zueinander äquivalente quadratische Irrationalzahlen. Aus der vorherigen Folgerung ergibt sich, daß sie immer die Bedingung

$$(Q; P; Q_{-1}) = (q; p; q_{-1}) \tag{3}$$

erfüllen.

3. Im Laufe der weiteren Ausführungen brauchen wir folgende Formeln

$$[A, 0] = [A'], \tag{4}$$

$$[A, \alpha] = -[A^*, -\alpha - 1], \tag{5}$$

wo A irgendeinen geordneten Komplex ganzer Zahlen bezeichnet, während α eine ganze Zahl ist. Aus der Gleichung

$$[A, \alpha] = \alpha[A'] + [A']$$

für $\alpha = 0$ folgt die Formel (4). Da $[A, \alpha] = [A, \alpha - 1, 1]$ und $A, \alpha - 1, 1 \sim A^*$, $-\alpha - 1, 1, 0$ ist (Dj. [3], Formel (7)), so bekommt man aus der Formel (4) die Formel (5).

II. Hauptsätze

4. Es sei die binäre quadratische Form

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \text{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \text{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \text{ kein Quadrat}, \end{cases} \tag{6}$$

gegeben. Es seien ferner ξ und η $(\xi > \eta)$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(\xi, 1) \equiv \alpha\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma = 0, \tag{7}$$

und zwar

$$\xi = \frac{\sqrt{D}-\beta}{\alpha}, \quad \eta = \frac{-\sqrt{D}-\beta}{\alpha}, \tag{8}$$

und es seien ihre Kettenbruchentwicklungen

$$\begin{cases} \xi = (B\overline{A}), \\ \eta = (C\underline{\overline{A}}), \end{cases} \qquad \text{wobei} \begin{cases} A = a_1 a_2 \dots a_m \quad \text{primitive Periode}, \\ B = b_1 b_2 \dots b_n, \ b_n \neq a_m, \\ C = c_1 c_2 \dots c_p \sim B|\underline{A}. \end{cases} \tag{9}$$

Die eingeführten Bezeichnungen werden im Laufe der ganzen weiteren Darlegung ungeändert beibehalten und deshalb weiter ohne besondere Hinweise verwendet.

5. Wenn wir uns auf die Betrachtung der Werte, welche die quadratische Form (6) *nur für ganzzahlige teilerfremde Werte der Veränderlichen x und y erhält*, beschränken, können wir diese Form passend und kondensiert ausdrücken. Nach (9) sind ξ und η die Wurzeln der Gleichung

$$['B\underline{C'}]\xi^2 - \{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}\xi + [B\underline{C}] = 0 \tag{10}$$

(Dj. [3], Gl. (30)), woraus durch Vergleich mit der Gl. (7)

$$['B\underline{C'}] = \lambda\alpha, \quad [B\underline{C'}] + ['B\underline{C}] = -2\lambda\beta, \quad [B\underline{C}] = \lambda\gamma \tag{11}$$

erhalten wird, wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Nach der Bedingung $(\alpha;\beta;\gamma) = 1$ ist 2λ stets eine ganze Zahl.

Da wir uns auf teilerfremde ganzzahlige Werte der Veränderlichen x und y beschränkt haben, können wir die Substitution

$$\frac{x}{y} = (Z)$$

durchführen, wo Z irgendein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen ist. Dabei schreiben wir statt $f([Z], ['Z])$ kurz $f(Z)$.

Nach (11) und (12) erhält die quadratische Form (6) die Gestalt

$$\lambda f(Z) = ['B\underline{C'}][Z]^2 - \{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}[Z]['Z] + [B\underline{C}]['Z]^2,$$

d.h.

$$\lambda f(Z) = [Z]['B\underline{C}|Z] - ['Z][B\underline{C}|Z]$$

(Dj. [3], Formel (9)), und schließlich

$$f(Z) = -\frac{1}{\lambda}[\underline{Z}|B\underline{C}|Z]. \tag{13}$$

6. Ausgehend von der Gestalt (13) der quadratischen Form (6), beweisen wir

Satz 1. *Die ganzen Zahlen δ und $-\delta$ $(\delta > 0)$, oder nur eine von ihnen, können dann und nur dann in der Gestalt der quadratischen Form*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \text{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \text{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha;\beta;\gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \text{ kein Quadrat}, \end{cases}$$

für teilerfremde ganzzahlige Werte der Veränderlichen x und y dargestellt werden, wenn δ der Nenner der Normalform einer quadratischen Irrationalzahl ist, die äquivalent einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ ist.

Beweis. Es sei

$$\omega_{-1} = \frac{\sqrt{D} + p_{-1}}{\delta} \tag{14}$$

die Normalform irgendeiner quadratischen Irrationalzahl, deren Nenner δ ist, und die äquivalent einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ ist. Dann haben, nach (9), die Kettenbrüche, die ω_{-1} und deren konjugierte Zahl ω'_{-1}

darstellen, die Form

$$\omega_{-1} = (a\,\underline{M}\,\bar{A}), \qquad \omega'_{-1} = (a\,\underline{N}\,\underline{\bar{A}}), \tag{15}$$

wo a eine ganze Zahl ist, während M und N geordnete Komplexe sind, deren sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind mit Ausnahme des letzten Gliedes in einem von ihnen, welches auch Null sein kann. Auf Grund der Gl. (30) der schon erwähnten Abhandlung (Dj. [3]) und der Gl. (3) bekommt man

$$\delta = \frac{1}{\lambda}\,(\underline{M}\,N], \tag{16}$$

wo λ den gleichen Wert wie in den Gln. (11) hat. Die Komplexe M und N sind aber nicht voneinander unabhängig, weil sie nach dem Satz 4 (Dj. [3]) die Äquivalenz

$$N\,a\,|\,a\,\underline{M} \sim A$$

befriedigen, d. h.

$$N\,|\,\underline{M} \sim A. \tag{17}$$

Da außerdem

$$\underline{C}\,|\,B \sim A$$

ist, erhalten wir durch Vergleich

$$\underline{C}\,|\,B \sim N\,|\,\underline{M}$$

und daraus

$$B\,|\,M \sim C\,|\,N \sim Z_0, \tag{18}$$

wo wir mit Z_0 den geordneten Komplex von natürlichen Zahlen bezeichnet haben, der den Komplexen $B\,|\,M$ und $C\,|\,N$ äquivalent ist. Aus der Äquivalenz (18) folgt

$$M \sim \underline{B}\,|\,Z_0, \qquad N \sim \underline{C}\,|\,Z_0, \tag{19}$$

so daß die Gl. (16)

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}\,[\underline{Z_0}|\,B\,\underline{C}|\,Z_0], \qquad \varepsilon = +1 \text{ oder } \varepsilon = -1, \tag{20}$$

wird, und daher aus (13)

$$f(Z_0) = -\varepsilon\,\delta, \qquad \varepsilon = +1 \text{ oder } \varepsilon = -1. \tag{21}$$

Wenn es dagegen keine quadratische Irrationalzahl mit dem Nenner δ gibt, deren Kettenbruchentwicklung die Periode A oder $\underline{A}$ besitzt, dann bestehen weder die Komplexe M und N, welche die Äquivalenz (17) befriedigen, noch der Komplex Z_0, welcher beide Äquivalenzen (18) befriedigt. Das heißt die Zahl δ kann nicht in der Gestalt der quadratischen Form (6) dargestellt werden. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

7. Betrachten wir jetzt die Folge der geordneten Komplexe von natürlichen Zahlen, die durch die Äquivalenz

$$Z_\nu \sim B\,A^{\nu-1}\,\underline{C}\,|\,Z_0, \qquad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{22}$$

definiert sind.

Nach der zweiten Äquivalenz (19) für $\nu > 0$ haben wir:

$$Z_\nu = BA^{\nu-1}N, \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{23}$$

Nach der Definition des Ausdrucks $A^{-\nu}$ (DJ. [3], Formel (18)), Satz 4 (DJ. [3]) und auf Grund der ersten der Äquivalenzen (19) bekommen wir aus der Äquivalenz (22):

$$Z_{-\nu} \sim BA^{-\nu-1}\underline{C}|Z_0 \sim B|\underline{A}^{\nu+1}|\underline{C}|Z_0 \sim C\underline{A}^{\nu-1}\underline{B}|Z_0 \sim C\underline{A}^{\nu-1}M$$

und somit

$$Z_{-\nu} = C\underline{A}^{\nu-1}M, \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Auf dieselbe Weise ist

$$BA^{-1}\underline{C}|Z_0 \sim Z_0,$$

was bedeutet, daß auch Z_0 der Folge (22) angehört.

Nach diesen Betrachtungen können wir beweisen

Satz 2. *Wenn die Diophantische Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm\delta, \quad \textit{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \textit{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \qquad \textit{kein Quadrat}, \end{cases} \tag{25}$$

eine Lösung $\frac{x_0}{y_0} = (Z_0)$ *besitzt, dann hat sie unendlich viele Lösungen, und zwar*

$$\frac{x_\nu}{y_\nu} = (Z_\nu), \quad \textit{für } \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{26}$$

wo

$$Z_\nu = BA^{\nu-1}N, \quad Z_{-\nu} = C\underline{A}^{\nu-1}M$$

ist. Dabei ist für jedes ganzzahlige ν:

$$f(Z_\nu) = (-1)^{m\nu} f(Z_0). \tag{27}$$

Beweis. Auf Grund der Gl. (13) und der Äquivalenz (22) bekommt man für jedes ganzzahlige ν:

$$\lambda f(Z_\nu) = [\underline{Z}_0|C\underline{A}^{\nu-1}\underline{B}|B\underline{C}|BA^{\nu-1}\underline{C}|Z_0]$$

und dann

$$\lambda f(Z_\nu) = (-1)^n [\underline{Z}_0|C\underline{A}^{\nu-1}|A^{\nu-1}\underline{C}|B\underline{C}|Z_0],$$

wo die Komplexe B und $\underline{B}$ „gekürzt" sind und die Substitution $\underline{C}|B \sim A$ zweimal durchgeführt. Wenn auch die Komplexe $C\underline{A}^{\nu-1}$ und $A^{\nu-1}\underline{C}$ „gekürzt" werden, wird man

$$\lambda f(Z_\nu) = (-1)^{\nu m}[\underline{Z}_0|V|V|B\underline{C}|Z_0]$$

erhalten. Aus der letzten Gleichung schließlich folgt die Formel (27), weil

$$V|V|B\underline{C} \sim B\underline{C}, \quad [V|V|B\underline{C}] = -[B\underline{C}]$$

ist. Mit dem Beweis der Formel (27) ist auch der ganze Satz 2 bewiesen.

Sämtliche Lösungen Z_ν, wo $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ist, bilden ein Lösungssystem der Gl. (25). Wie bekannt, kann die Diophantische Gleichung (25) mehrere solche Lösungssysteme besitzen.

8. Das Lösungssystem (26) der Gl. (25) kann — wie bekannt — auch aus einer algebraischen Formel erhalten werden, ohne Anwendung der Kettenbrüche, wenn eine Lösung dieses Systems bekannt ist. Hier werden wir einen neuen Beweis dieser algebraischen Formel geben, indem wir uns der Kettenbrüche bedienen. Um das zu erreichen, beweisen wir zuerst die Identität:

$$(28)\quad \begin{cases} [BA^{\nu-1}N] - [{}'BA^{\nu-1}N]\,(BA^k) \\ \qquad = \{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)\}\,\{[N] - [{}'N]\,(A^{k-\nu+1})\}, \end{cases}$$

wo ν eine ganze, während k eine natürliche Zahl ist ($\nu < k$). Wenn wir auf der linken Seite

$$[BA^{\nu-1}N] = [BA^{\nu-1}]\,[N] + [BA^{\nu-2}A']\,[{}'N],$$
$$[{}'BA^{\nu-1}N] = [{}'BA^{\nu-1}]\,[N] + [{}'BA^{\nu-2}A']\,[{}'N],$$

setzen, dann kann sie in der Gestalt

$$\{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)\}\,\{[N] - [{}'N]\,\Theta_{k,\nu}\}$$

ausgedrückt werden, wo

$$\Theta_{k,\nu} = \frac{[{}'BA^{\nu-2}A']\,(BA^k) - [BA^{\nu-2}A']}{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)}$$

ist. Wenn man noch $(BA^k) = \dfrac{[BA^k]}{[{}'BA^k]}$ setzt und die nötigen Reduktionen durchführt, dann wird durch die Anwendung der Formel (9) (Dj. [3]) $\Theta_{k,\nu}$ die Gestalt

$$\Theta_{k,\nu} = -\frac{[{}'\underline{A}\,\underline{A}^{\nu-2}\,\underline{B}\,|\,BA^k]}{[\underline{A}^{\nu-1}\,\underline{B}\,|\,BA^k]} = (A^{k-\nu+1})$$

erhalten, wodurch die Identität (28) bewiesen ist.

Wenn wir $k \to \infty$ gehenlassen und setzen

$$\xi = (B\bar{A}), \quad z_\nu = [BA^{\nu-1}N] - [{}'BA^{\nu-1}N]\,\xi$$
$$u_\nu = [BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,\xi, \quad \varepsilon = [A] - [{}'A]\,(\bar{A}),$$

dann erhält die Identität (28) folgende Gestalt:

$$(29)\qquad z_\nu = u_\nu\{[N] - [{}'N]\,(\bar{A})\}.$$

Für $N = A$ hat man

$$u_{\nu+1} = u_\nu\,\varepsilon,$$

woraus

$$(30)\qquad u_\nu = u_1\,\varepsilon^{\nu-1}$$

folgt. Da noch nach (29)

$$z_1 = u_1\{[N] - [{}'N]\,(\bar{A})\}$$

ist, folgt aus (29) und (30):

$$z_\nu = z_1 \varepsilon^{\nu-1}. \tag{31}$$

Aus dieser Formel haben wir $z_0 = z_1 \varepsilon^{-1}$, so daß sie in folgender Gestalt geschrieben werden kann

$$z_\nu = z_0 \varepsilon^\nu,$$

d.h.

$$x_\nu - y_\nu \xi = (x_0 - y_0 \xi)\{[A] - ['A](\bar{A})\}^\nu, \quad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{32}$$

wo

$$\frac{x_\nu}{y_\nu} = (Z_\nu)$$

ist. Es soll bemerkt werden, daß $\varepsilon = [A] - ['A](\bar{A})$ eine Einheit im Zahlkörper $\sqrt{D}$ ist, aber nicht immer die Grundeinheit. Zum Beispiel, wenn $A = 3$ ist, dann ist

$$\varepsilon = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Wenn aber $A = 1, 1, 1, 6, 1$ ist, dann ist

$$\varepsilon = 18 - 5\sqrt{13} = \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^3.$$

9. Die Anwendung des Satzes 1 muß folgende zwei Fragen beantworten: 1. Feststellen, ob die gegebene ganze Zahl δ durch die quadratische Form (6) darstellbar ist. 2. Im Falle der bejahenden Antwort auf die erste Frage sämtliche Paare teilerfremder ganzer Zahlen x und y bestimmen, für welche die quadratische Form (6) den Wert δ oder $-\delta$ hat.

Nehmen wir jetzt an — wenn die ganze Zahl δ gegeben ist — es bestehe ein Zahlenpaar ω_{-1} und ω'_{-1}, welches durch die Gln. (14) und (15) definiert ist, und es seien ihre ersten vollständigen Quotienten

$$\omega = (\underline{M}\bar{A}) = \frac{\sqrt{D} + p}{q}, \quad \omega' = (\underline{N}\bar{A}) = \frac{-\sqrt{D} + p}{q}. \tag{33}$$

Dann sind — nach (1) — D, p, q und δ durch die Relation

$$D - p^2 = q\delta \tag{34}$$

verbunden. Aus dieser folgt dann die Kongruenz

$$p^2 \equiv D \pmod{\delta}. \tag{35}$$

Die Existenz einer Wurzel der Kongruenz (35) stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dar, damit δ der Nenner der Normalform einer quadratischen Irrationalzahl mit der Diskriminante D wird [mit $(q; p; \delta) = 1$]. Aber diese Zahl braucht nicht einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ äquivalent zu sein. Demnach ist die Existenz einer Wurzel der Kongruenz (35) ***nur eine notwendige Bedingung***, damit δ durch die quadratische Form (6) darstellbar wird.

Setzen wir voraus, daß die Kongruenz (35) eine Wurzel p besitzt, dann folgt, aus der Relation (34), der entsprechende Wert des Nenners q, und danach die quadratischen Irrationalzahlen ω und ω'. Die Kettenbrüche der Zahlen ω und ω' geben endgültige Antwort auf die erste Frage, ob ω und ω' äquivalent mit ξ und η sind, oder nicht.

Zu gleicher Zeit erhält man die Antwort auch auf die zweite Frage, weil die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen ω und ω' die Komplexe M und N liefern, und dann erhält man aus den Äquivalenzen (18) den Komplex Z_0, so daß die Formel (32) sämtliche Lösungen dieses Systems liefert.

10. Wenn p eine Wurzel der Kongruenz (35) ist, dann ist auch $\delta - p$ eine Wurzel, die Kongruenz (35) aber wird durch sämtliche Zahlen $p_k = p + k\delta$ und $\overline{p}_k = -p + k\delta$, wo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ist, befriedigt. Diesen Werten entsprechen, nach (34), die Nenner

$$q_k = \frac{D - p_k^2}{\delta}, \qquad \overline{q}_k = \frac{D - \overline{p}_k^2}{\delta}$$

und dann die quadratischen Irrationalzahlen

$$\omega_k = \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k}, \qquad \overline{\omega}_k = \frac{\sqrt{D} - \overline{p}_k}{\overline{q}_k}.$$

Aber da

$$\frac{1}{\omega_k} = -k + \frac{1}{\omega}, \qquad \frac{1}{\overline{\omega}_k} = -k - \frac{1}{\omega'}$$

ist, wo ω und ω' mit Hilfe von der Wurzel p gebildet und durch die Gln. (33) definiert sind, so ist

$$\omega_k = (-1, 1, k-2, {}^*\underline{M}\,\overline{A}), \qquad \overline{\omega}_k = (-1, 1, k-1, \underline{N}\,\overline{A}).$$

Die entsprechenden Komplexe M_k und N_k sind

$$M_k = M^*, k-2, 1, -1, \qquad N_k = N, k-1, 1, -1.$$

Aber da nach den Formeln (4) und (5)

$$[M_k] = -[M], \qquad [N_k] = -[N]$$

ist, so wird immer aus M_k und N_k die gleiche schon gefundene Lösung Z_0 erhalten.

Das bedeutet, daß es genügt, von jedem Paar der Wurzeln der Kongruenz (35) *die positive Wurzel zu nehmen, mit ihr die quadratische Irrationalzahl ω zu bilden und dann aus ihrer Kettenbruchentwicklung den Komplex M oder N abzulesen, je nachdem, ob ω mit ξ oder mit η äquivalent ist.*

11. Auf Grund von § 9 und § 10 kann der folgende Satz ausgesprochen werden:

Satz 3. *Die Anzahl der Lösungssysteme der Diophantischen Gleichung*

$$(36) \qquad f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm\delta, \quad \textit{wobei} \begin{cases} (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \textit{kein Quadrat}, \end{cases}$$

ist durch die Zahl der Wurzelpaare $p, -p$ der Kongruenz

$$p^2 \equiv D \pmod{\delta}$$

bestimmt, welche die Eigenschaft besitzen, daß die quadratische Irrationalzahl

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + p}{q}, \quad \text{mit} \quad q = \left| \frac{D - p^2}{\delta} \right|, \tag{37}$$

einer der Wurzeln ξ oder η der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ äquivalent ist.

Jedem solchem Paare $p, -p$ entspricht je ein Lösungsystem, wenn ξ und η nicht untereinander äquivalent sind, je zwei Systeme aber, wenn sie äquivalent sind.

Wenn die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen ξ, η und ω

$$\xi = (B\,\bar{A}), \quad \eta = (C\,\underline{\bar{A}}), \quad \omega = (\underline{M}\,\bar{A})$$

lauten, wo B, C und $\underline{M}$ keine kürzesten Vorperioden zu sein brauchen, dann ist eine Lösung des entsprechenden Systems

$$\frac{x_0}{y_0} = (Z_0), \quad \text{wobei} \quad Z_0 \sim B|M. \tag{38}$$

Wenn dabei $A = SS_1$ ist, wo S und S_1 symmetrische geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind, dann folgt aus dem Paar $p, -p$ auch das folgende zweite Lösungssystem

$$\frac{x_0^{(1)}}{y_0^{(1)}} = (Z_0^{(1)}), \quad \text{wobei} \quad Z_0^{(1)} \sim C|SM. \tag{39}$$

Schließlich, wenn keine der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ der Zahl ω äquivalent ist, dann bekommt man aus dem Paar $p, -p$ keine Lösung der Gl. (36).

Beweis. Der Satz 3 ist größtenteils schon früher bewiesen. Es bleibt nur der Fall zu betrachten, wenn einem Wurzelpaar $p, -p$ der Kongruenz (35) zwei Systeme von Lösungen der Gl. (36) entsprechen. Wenn $A = SS_1$ ist, können die Kettenbruchentwicklungen von ω und ω' in folgenden Gestalten

$$\omega = (\underline{M}\,\bar{A}) = (\underline{M}\,S\,\underline{\bar{A}}), \quad \omega' = (\underline{N}\,\underline{\bar{A}}) = (\underline{N}\,S_1\,\bar{A})$$

geschrieben werden, und dann bekommt man aus ihnen je zwei Komplexe M und N:

$$M \text{ und } M^{(1)} = S_1 N; \quad N \text{ und } N^{(1)} = SM.$$

Somit folgen aus den Äquivalenzen (18) die Äquivalenzen (38) und (39).

Im Falle, daß die Periode A die Gestalt $A = SS_1$ hat, kann keinesfalls gefolgert werden, daß den Wurzeln p und $-p$ der Kongruenz (35) einzeln je ein Lösungssystem der Gl. (36) entspricht, z.B. daß der Wurzel p die Lösung Z_0, und der Wurzel $-p$ die Lösung $Z_0^{(1)}$ entspricht. Denn, wenn ξ

und η untereinander nicht äquivalent sind, dann entspricht die Lösung Z_0 der Wurzel p mit gleichem Recht wie der Wurzel $-p$. (Siehe BACHMANN [1], S. 201.)

12. Beispiel 1: Wenn die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 12x^2 - 22xy + 7y^2 = \pm 47$$

gegeben ist, dann sind die Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$:

$$\xi = \frac{\sqrt{37} + 11}{12} = (1, 2, \overline{2, 1, 3}), \quad \eta = \frac{-\sqrt{37} + 11}{12} = (0, 2, 2, \overline{3, 1, 2}),$$

und die Kongruenz

$$p^2 \equiv 37 \pmod{47}$$

hat ein einziges Wurzelpaar $p = \pm 15$, so daß $q = 4$ für $p = 15$ wird, und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{37} + 15}{4} = (5, \overline{3, 1, 2}),$$

woraus $N = 5$, und

$$Z_0 \sim C \,|\, N \sim 0, 2, 2 \,|\, 5,$$

d.h. $Z_0 = 0, 1, 1, 2$, und schließlich

$$\frac{x_0}{y_0} = (0, 1, 1, 2) = \frac{3}{5}.$$

Tatsächlich haben wir $12 \cdot 3^2 - 22 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 = -47$.

Beispiel 2: Wenn die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 19x^2 - 56xy + 40y^2 = \pm 43$$

gegeben ist, dann sind die Wurzlen der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$

$$\xi = \frac{\sqrt{24} + 28}{19} = (1, 1, 2, \overline{1, 2, 1, 1}), \quad \eta = \frac{-\sqrt{24} + 28}{19} = (1, 4, 1, \overline{1, 1, 2, 1})$$

und die Kongruenz

$$p^2 \equiv 24 \pmod{43}$$

hat ein einziges Wurzelpaar $p = \pm 14$. Aus $p = 14$ folgt $q = 4$ und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{24} + 14}{4} = (4, \overline{1, 2, 1, 1}),$$

woraus $M = 4$, und aus den Äquivalenzen (38) und (39) folgen die Lösungen

$$Z_0 = 2, 1, \quad Z_0^{(1)} = 1, 1, 5$$

und schließlich

$$x_0 = 3, \; y_0 = 1; \quad x_0^{(1)} = 11, \; y_0^{(1)} = 6.$$

III. Besondere Fälle

Wir werden einige besondere Fälle betrachten.

13. Satz 4. *Die Diophantische Gleichung*

$$(40)\qquad f(x,y)\equiv \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=\pm 1,\quad \textit{wobei}\quad \begin{cases}(\alpha;2\beta;\gamma)=1,\ \alpha>0,\\ D=\beta^2-\alpha\gamma>0\\ \textit{kein Quadrat},\end{cases}$$

hat höchstens ein Lösungssystem, und zwar dann und nur dann, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi,1)=0$ äquivalent mit $\sqrt{D}$ sind.

Wenn

$$(41)\qquad \sqrt{D}=(b,\overline{S,2b}),\ \xi=(B,\overline{S,2b}),\quad \textit{wobei}\quad \begin{cases}B=b_1b_2\dots b_n,\\ b_n\gtrless 2b,\end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\sqrt{D}$ und ξ sind, dann ist eine Lösung der Gl. (40):

$$\frac{x_0}{y_0}=(B'),$$

und dabei

$$(42)\qquad f(x_0,y_0)=(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(\xi-\eta).$$

Beweis. Für $\delta=1$ wird aus der Gl. (34) $q=D-p^2$ erhalten, wo p eine beliebige ganze Zahl ist, und dann folgt aus (37) und (41):

$$\omega=\frac{\sqrt{D}+p}{D-p^2}=(0,b-p,\overline{S,2b}),$$

woraus, auf Grund des Satzes 3, der erste Teil des Satzes 4 folgt. Aus der Kettenbruchentwicklung der Zahl ω lesen wir den Komplex $M=b-p,0$, und da die Kettenbruchentwicklung der zweiten Wurzel der Gleichung $f(\xi,1)=0$

$$\eta=(B'^*,2b-b_n-1,S,\overline{2b,S})$$

ist, folgen aus den Äquivalenzen (38) und (39) zwei Lösungen:

$$Z_0=B'^*,b-p-b_n-1,0;\qquad Z_0^{(1)}=B',b_n-p-b,0.$$

Jedoch reduzieren sich diese beiden Lösungen auf Grund der Formel (4) auf eine: $Z_0=B'$. Es bleibt noch die Formel (42) zu beweisen. Aus der Gl. (13), da $\lambda=[S]$ ist, folgt

$$f(x_0,y_0)=-\frac{1}{[S]}[{}'\underline{B}\,|\,B\,\underline{C}\,|\,B'],$$

woraus, auf Grund der Sätze 3 und 4 (DJ. [3]):

$$f(x_0,y_0)=\frac{(-1)^n}{[S]}\operatorname{sgn}(\xi-\eta)\cdot[V\,|\,b_nS]$$

erhalten wird. Daraus endlich bekommt man die Formel (42), weil $[V\,|\,b_nS]=-[S]$ ist.

14. Satz 5. *Die Diophantische Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 2, \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \ \alpha > 0 \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \text{kein Quadrat,} \end{cases}$$

deren Diskriminante D eine gerade Zahl ist, hat höchstens ein Lössungsystem, und zwar dann und nur dann, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$, *der Zahl* $\frac{\sqrt{D}}{2}$ *äquivalent sind.*

Wenn

$$\frac{\sqrt{D}}{2} = (b, \overline{S, 2b}), \quad \xi = (B, \overline{S, 2b}), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} B = b_1 b_2 \dots b_n, \\ b_n \gtrless 2b, \end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\frac{\sqrt{D}}{2}$ *und* ξ *sind, dann ist eine Lösung der betrachteten Gleichung*

$$\frac{x_0}{y_0} = (B'),$$

und dabei

$$f(x_0, y_0) = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \cdot 2.$$

Der Beweis wie beim Satz 4.

15. Satz 6. *Die Diophantische Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 2, \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \ \alpha > 0, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \text{kein Quadrat,} \end{cases}$$

deren Diskriminante D eine ungerade Zahl ist, hat höchstens ein Lösungssystem, und zwar dann und nur dann wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ *der Zahl* $\frac{\sqrt{D} + 1}{2}$ *äquivalent sind.*

Wenn

$$\frac{\sqrt{D} + 1}{2} = (b, \overline{S, 2b - 1}), \quad \xi = (B, \overline{S, 2b - 1}), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} B = b_1 b_2 \dots b_n, \\ b_n \gtrless 2b - 1, \end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\frac{\sqrt{D} + 1}{2}$ *und* ξ *sind, dann ist eine Lösung der betrachteten Gleichung*

$$\frac{x_0}{y_0} = (B'),$$

und dabei

$$f(x_0, y_0) = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \cdot 2.$$

Beweis. Die Kongruenz (35) erhält in diesem Fall die Form

$$p^2 \equiv 2g + 1 \pmod 2),$$

wo g eine natürliche Zahl ist. Diese Kongruenz hat eine einzige Wurzel $p = 1$, und so wird aus der Gl. (34) $q = g$ erhalten, und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{2g+1}+1}{g} = \left(0, b-1, \overline{S, 2b-1}\right).$$

Damit ist der erste Teil des Satzes 6 bewiesen, und der Beweis läuft weiter wie für den Satz 4.

Literatur

[1] Bachmann, P.: Die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig: B. G. Teubner 1892. — [2] Djerasimović, B.: Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Math. Z. **62**, 320—329 (1955). — [3] Djerasimović, B.: Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen. Math. Z. **66**, 228—239 (1956). — [4] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954.

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien)

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

BAER, R.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 341—363 (1957)

Lokal NOETHERsche Gruppen

Von

REINHOLD BAER

Wir werden eine Gruppe G NOETHERsch nennen, wenn jede Untergruppe von G endlich erzeugbar ist; und die Gruppe L soll *lokal*-NOETHERsch heißen, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von L NOETHERsch ist. Man überzeugt sich sofort, daß Untergruppen und homomorphe Bilder lokal-NOETHERscher Gruppen wieder lokal-NOETHERsch sind. Weiter ist jede abelsche Gruppe lokal-NOETHERsch. Während aber Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen stets wieder NOETHERsche Gruppen sind, kann man eine entsprechende Aussage über lokal-NOETHERsche Gruppen gewiß nicht machen; denn man kann leicht Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen angeben, die sogar Erweiterungen abelscher Gruppen durch zyklische Gruppen sind, ohne doch NOETHERsch zu sein. Es entsteht also die Frage, was für Bestandteile einer Gruppe lokal-NOETHERsch sein müssen, damit die ganze Gruppe lokal-NOETHERsch sei. In dieser Hinsicht werden wir das folgende recht umfassende Kriterium angeben: Ist die Gruppe G Produkt eines lokal-NOETHERschen Normalteilers N und einer lokal-NOETHERschen Untergruppe U, liegt weiter im Durchschnitt $N \cap U$ ein Normalteiler D mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe G/D, so ist G selbst lokal-NOETHERsch. Hieraus folgt z. B., daß jedes Produkt lokal-NOETHERscher Normalteiler wieder lokal-NOETHERsch ist. Weiter kann man folgendes Erweiterungskriterium herleiten: Ist N ein Normalteiler von G, ist $\{N, g\}$ lokal-NOETHERsch für jedes g in G, und ist schließlich jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N NOETHERsch und auflösbar, dann ist G lokal-NOETHERsch. Die G/N betreffende Voraussetzung läßt sich noch ein wenig abschwächen; aber es erscheint nicht wahrscheinlich, daß sich eine wirklich wesentliche Abschwächung erreichen läßt.

Es erscheint zweckmäßig, eine derartige Untersuchung gleich im Rahmen allgemeiner Betrachtungen über Eigenschaften von Gruppenklassen anzustellen, da viele der Ableitungen in allgemeineren Zusammenhängen gelten. Dies werden wir in § 1 und § 2 tun. § 3 ist dann der eigentlichen Betrachtung lokal-NOETHERscher Gruppen gewidmet und im § 4 werden wir unsere Resultate auf lokale Eigenschaften anwenden.

1. Σ-Gruppen und Σ-Teiler

Unter Σ wollen wir eine gruppentheoretische Eigenschaft verstehen. Gruppen mit der Eigenschaft Σ wollen wir als Σ-Gruppen bezeichnen. Von jeder Gruppe soll feststehen, ob sie eine Σ-Gruppe ist oder nicht; und die Existenz von Σ-Gruppen werde auch stets vorausgesetzt. Darüber hinaus wollen wir verlangen, daß Σ den beiden folgenden Postulaten genügt.

I. *Untergruppen von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

II. *Homomorphe Bilder von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

Die Klasse der abelschen Gruppen etwa genügt den Forderungen I und II; die der freien Gruppen erfüllt I, aber nicht II; und die Klasse der einfachen Gruppen erfüllt II, ohne I zu erfüllen. Obwohl wir die Voraussetzungen I und II nicht immer benutzen werden, wird es doch bequemer sein, diese Voraussetzungen stets zu machen, ohne sie immer wiederholen zu müssen; und dies werden wir tun. Für eine systematische Diskussion der Eigenschaften gruppentheoretischer Eigenschaften sei neuerdings auch auf W. SPECHTs ausgezeichnete Gruppentheorie verwiesen.

Von einer solchen gruppentheoretischen Eigenschaft Σ kann man mancherlei Relationen ableiten, die wir als *gruppentheoretische Teilerbeziehungen* bezeichnen wollen. Wir werden hier drei wesentlich verschiedene derartige Teilerbeziehungen diskutieren. Jede von ihnen hat gewisse wichtige Eigenschaften, die die andern nicht haben; aber in den für uns wichtigen Anwendungen werden sich diese Begriffe decken.

Definition 1. *$N\Sigma^*G$, wenn N ein Normalteiler der Gruppe G ist, und wenn überdies eine jede N enthaltende Untergruppe S von G mit Σ-Faktorgruppe S/N stets eine Σ-Gruppe ist.*

Ist etwa Σ die Klasse der endlichen nilpotenten Gruppen, so ist $Z\Sigma^*G$, wenn Z das Zentrum der endlichen Gruppe G ist. — Weiter sieht man sofort, daß stets $1\Sigma^*G$ gilt; und schließlich folgt aus $N\Sigma^*G$, daß N eine Σ-Gruppe ist, da ja 1 eine Σ-Gruppe ist.

Satz 1. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt, daß die Untergruppe S von G dann und nur dann eine Σ-Gruppe ist, wenn $S/(N\cap S)$ eine Σ-Gruppe ist.*

Beweis. Ist S eine Σ-Gruppe, so ist wegen II auch $S/(S\cap N)$ eine Σ-Gruppe. — Ist umgekehrt $S/(S\cap N)$ eine Σ-Gruppe, so ist wegen II auch die isomorphe Gruppe NS/N eine Σ-Gruppe. Aus $N\Sigma^*G$ folgt dann aber, daß NS eine Σ-Gruppe ist. Wegen I ist also auch S eine Σ-Gruppe.

Zusatz 1. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt $(N\cap S)\Sigma^*S$ für jede Untergruppe S von G.*

Beweis. Ist nämlich T eine $N\cap S$ enthaltende Untergruppe von S, deren Faktorgruppe $T/(N\cap S)=T/(N\cap T)$ eine Σ-Gruppe ist, so folgt aus Satz 1, daß T eine Σ-Gruppe ist. Also ist $(N\cap S)\Sigma^*S$.

Satz 2. *Sind A und B Normalteiler der Gruppe G, $A\leq B$, so ist dann und nur dann $B\Sigma^*G$, wenn $A\Sigma^*G$ und $B/A\,\Sigma^*G/A$ gelten.*

Beweis. Sei zunächst $B\Sigma^*G$. Ist S eine A enthaltende Untergruppe von G und S/A eine Σ-Gruppe, so ist $S/(S\cap B)$ wegen $A\leq S\cap B$ als homomorphes Bild einer Σ-Gruppe selbst eine Σ-Gruppe. Aus Satz 1 folgern wir dann, daß S eine Σ-Gruppe ist; und damit ist $A\Sigma^*G$ gezeigt. — Ist weiter T/A eine B/A enthaltende Untergruppe von G/A, deren Faktorgruppe $(T/A)/(B/A)\simeq T/B$ eine Σ-Gruppe ist, so ist T eine Σ-Gruppe wegen $B\Sigma^*G$. Das homomorphe Bild T/A ist also auch eine Σ-Gruppe, so daß $B/A\,\Sigma^*G/A$ gilt.

Sei umgekehrt $A\Sigma^*G$ und $B/A\Sigma^*G/A$; und sei weiter S eine B enthaltende Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe S/B. Dann ist S/A eine B/A enthaltende Untergruppe von G/A mit Σ-Faktorgruppe $(S/A)/(B/A) \simeq S/B$ und aus $B/A\Sigma^*G/A$ folgt dann, daß S/A eine Σ-Gruppe ist. Dann folgt aber aus $A\Sigma^*G$, daß S selbst eine Σ-Gruppe ist; und damit ist $B\Sigma^*G$ verifiziert.

Bemerkung 1. Ist etwa Σ die Klasse der abelschen Gruppen, so gilt $A\Sigma^*G$ für jeden abelschen direkten Faktor A von G. Sei insbesondere G die von den Elementen a, b, c, d erzeugte Gruppe, die folgenden Bedingungen genügen:

$$a^p = b^p = c^p = d^p = 1, \quad p \text{ eine ungerade Primzahl};$$

$$a^{-1}b^{-1}ab = c;$$

$$ac = ca,\ bc = cb,\ ad = da,\ bd = db.$$

Dann ist G das direkte Produkt seiner Untergruppen $\{a, b\}$ und $\{d\}$; $\{c\}$ ist die Kommutatorgruppe von G und $\{a, b\}$; und $\{c, d\}$ ist das Zentrum von G.

Da $\{d\}$ und $\{cd\}$ direkte Faktoren von G sind, so gilt $\{d\}\Sigma^*G$ und $\{cd\}\Sigma^*G$. Da $G/\{c, d\}$ abelsch ist, während weder G noch $G/\{d\}$ abelsch ist, so gilt weder $\{c, d\}\Sigma^*G$ noch $\{c, d\}/\{d\}\Sigma^*G/\{d\}$, trotzdem bei dem natürlichen Homomorphismus von G auf $G/\{d\}$ die Untergruppe $\{cd\}$ in $\{c, d\}/\{d\}$ übergeht. Dies Beispiel belegt also die folgenden Tatsachen:

Aus $A\Sigma^*G$ und $B\Sigma^*G$ folgt im allgemeinen nicht $AB\Sigma^*G$;

ist σ ein Homomorphismus der Gruppe G auf die Gruppe G^σ, so folgt aus $A\Sigma^*G$ im allgemeinen nicht $A^\sigma\Sigma^*G^\sigma$.

Definition 2. *$N\Sigma G$, wenn N ein Normalteiler der Gruppe G ist, und wenn für jede Σ-Untergruppe S von G auch NS eine Σ-Gruppe ist.*

Wieder gilt stets $1\Sigma G$; und wieder folgt aus $N\Sigma G$, daß N eine Σ-Gruppe ist.

Satz 3. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt $N\Sigma G$; aus $N\Sigma G$ folgt $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G; aus $N\Sigma G$ folgt $M\Sigma G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G; aus $A\Sigma G$ und $B\Sigma G$ folgt $AB\Sigma G$.*

Beweis. Ist $N\Sigma^*G$ und S eine Σ-Untergruppe von G, so ist $NS/N \simeq S/(N\cap S)$ eine Σ-Gruppe als homomorphes Bild der Σ-Gruppe S. Also ist NS eine Σ-Gruppe, so daß aus $N\Sigma^*G$ auch $N\Sigma G$ folgt. Da Untergruppen von Σ-Gruppen ebenfalls Σ-Gruppen sind, so folgt aus $N\Sigma G$ auch $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G und $M\Sigma G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G. — Ist schließlich $A\Sigma G$ und $B\Sigma G$ und S eine Σ-Untergruppe von G, so ist BS eine Σ-Untergruppe von G und also auch $A(BS) = (AB)S$ eine Σ-Untergruppe von G, woraus dann $AB\Sigma G$ folgt.

Bemerkung 2. Es sei Σ die Klasse der endlichen zyklischen Gruppen, die natürlich den Bedingungen I und II genügt. Ist dann G das direkte Produkt der endlichen zyklischen Gruppe $Z \neq 1$ und der unendlichen zyklischen Gruppe V, so gilt $Z\Sigma G$, da Z ja alle endlichen zyklischen Untergruppen von G enthält. Dagegen gilt nicht $V^nZ/V^n\Sigma G/V^n$, wenn die positive Zahl durch genau dieselben Primzahlen teilbar ist wie die Ordnung von Z, da

dann G/V^n ein direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen, aber nicht zyklisch ist. Aus diesem Beispiel folgt, daß aus $N\Sigma G$ nicht notwendig $N^\sigma\Sigma G^\sigma$ [σ ein Homomorphismus von G] folgt.

Bemerkung 3. Es sei Σ die Klasse der abelschen Gruppen. Die Untergruppe U der Gruppe G erfüllt dann und nur dann $U\Sigma G$, wenn U im Zentrum von G enthalten ist, da ja zyklische Gruppen abelsch sind und aus $U\Sigma G$ auch die Kommutativität von $\{U, g\}$ folgen muß.

In Bemerkung 1 haben wir ein Beispiel einer Gruppe G konstruiert, deren Zentrum Z nicht $Z\Sigma^*G$ erfüllt. Also folgt aus $N\Sigma G$ im allgemeinen nicht $N\Sigma^*G$. — Ist weiter Z das Zentrum der Gruppe G und N/Z das Zentrum der Gruppe G/Z, so folgt aus den eben gemachten Bemerkungen, daß $Z\Sigma G$ und $N/Z\,\Sigma G/Z$ gelten, daß aber $N\Sigma G$ nur gelten kann, wenn $N=Z$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß aus $M\Sigma G$ und $N/M\,\Sigma G/M$ im allgemeinen nicht $N\Sigma G$ folgt.

Die dritte gruppentheoretische Teilerbeziehung, die wir von Σ ableiten wollen, hängt auch noch von einer positiven Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ ab.

Definition 3. *$N\Sigma_\mathfrak{n}G$, wenn N ein Normalteiler von G ist, und wenn eine jede Untergruppe S von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist.*

Es ist klar, daß aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ stets folgt, daß N eine Σ-Gruppe ist, und daß dann und nur dann $N\Sigma_1G$ gilt, wenn N ein Σ-Normalteiler von G ist. Man wird im allgemeinen wenig Zusammenhänge zwischen dieser Teilerbeziehung und den vorher eingeführten erwarten können. Sind aber etwa zyklische Gruppen Σ-Gruppen, so folgt aus $N\Sigma G$ sofort $N\Sigma_\mathfrak{n}G$.

Satz 4. *Aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ folgt $N^\sigma\Sigma_\mathfrak{n}G^\sigma$ für jeden Homomorphismus σ von G und $M\Sigma_\mathfrak{n}G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G.*

Beweis. Ist nämlich S eine N^σ enthaltende Untergruppe von G^σ, die durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen aus N^σ entsteht, so existiert eine N enthaltende Untergruppe T von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, und die durch σ auf S abgebildet wird $S=T^\sigma$. Aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ folgt aber, daß T eine Σ-Gruppe ist. Also ist das homomorphe Bild S von T eine Σ-Gruppe, so daß auch $N^\sigma\Sigma_\mathfrak{n}G^\sigma$ gilt. — Die zweite Behauptung folgt sofort daraus, daß Untergruppen von Σ-Gruppen ebenfalls Σ-Gruppen sind.

Hat die Gruppe G die Eigenschaft, daß eine jede von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugte Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist, so folgt aus $N\Sigma G$ natürlich auch $N\Sigma_\mathfrak{n}G$; und ähnliche Situationen werden uns besonders interessieren. Um Schlüsse in der umgekehrten Richtung ausführen zu können, müssen wir ein Erweiterungspostulat einführen.

E.$\mathfrak{n}$. *Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, ist G/N eine Σ-Gruppe und ist weiter jede Untergruppe S von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe, so ist G selbst eine Σ-Gruppe.*

Wegen I und II sind die in E.$\mathfrak{n}$ auftretenden Bedingungen notwendig dafür, daß G eine Σ-Gruppe ist.

Solch ein Erweiterungspostulat E.π wird von mancherlei gruppentheoretischen Eigenschaften Σ erfüllt. Die Klasse der endlichen auflösbaren Gruppen erfüllt E.1, da ja jede Erweiterung einer endlichen auflösbaren Gruppe durch eine endliche auflösbare Gruppe wieder eine endliche auflösbare Gruppe ist; E.2 wird von der Klasse der endlichen nilpotenten Gruppen erfüllt und E.3 von der Klasse der endlichen überauflösbaren Gruppen.

Satz 5. *Genügt Σ dem Erweiterungspostulat* E.π, *ist jede von weniger als π Elementen erzeugte Untergruppe von G eine Σ-Gruppe, so sind die folgenden Eigenschaften des Normalteilers N von G miteinander äquivalent:*

$$N\Sigma^*G,\ N\Sigma G,\ N\Sigma_\pi G.$$

Beweis. Klar.

Bemerkung 4. Sind die drei Beziehungen $X\Sigma^*Y$, $X\Sigma Y$ und $X\Sigma_\pi Y$ für geeignetes positives π äquivalent, so folgt aus den Sätzen 2, 3, 4, daß diese gruppentheoretische Teilerbeziehung Σ folgende Eigenschaften hat:

Aus $N\Sigma G$ folgt $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G;

aus $N\Sigma G$ folgt $N^\sigma\Sigma G^\sigma$ für jeden Homomorphismus σ von G;

ist M ein in N enthaltener Normalteiler von G, so ist dann und nur dann $N\Sigma G$, wenn $M\Sigma G$ und $N/M\Sigma G/M$ gelten;

aus $X\Sigma G$ und $Y\Sigma G$ folgt $XY\Sigma G$.

Die nicht leere Menge Θ von Untergruppen der Gruppe G werde als *Untergruppenturm* bezeichnet, wenn für irgend zwei verschiedene Untergruppen X und Y in Θ stets $X<Y$ oder $Y<X$ gilt. Es ist leicht einzusehen, daß die Vereinigungsmenge der Untergruppen in Θ ebenfalls eine Untergruppe von G ist. Besteht insbesondere Θ nur aus Normalteilern von G, so ist die Vereinigungsmenge von Θ ebenfalls ein Normalteiler von G usw. Wir werden häufig von dem folgenden Turmpostulat T Gebrauch machen:

T. *Vereinigungsmengen von Σ-Gruppentürmen sind Σ-Gruppen.*

Man überzeugt sich leicht, daß die Klasse der zyklischen Gruppen nicht dem Turmpostulat genügt, während T z.B. von der Klasse der abelschen Gruppen erfüllt wird.

Satz 6. *Das Turmpostulat* T *ist mit folgender Eigenschaft von Σ äquivalent.*

E. *Die Gruppe G ist [dann und nur dann] eine Σ-Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist.*

Der einfache Beweis dieses im wesentlichen wohlbekannten Satzes sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen angedeutet.

Beweis. Ist zunächst G die Vereinigungsmenge des Turmes Θ von Σ-Untergruppen von G, so ist jede endliche Teilmenge von G in einer Untergruppe aus Θ enthalten; und es folgt aus I, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist. Also folgt T aus E.

Sei umgekehrt das Turmpostulat T von Σ erfüllt. Ist dann G eine Gruppe, deren sämtliche endlich erzeugbare Untergruppen Σ-Gruppen sind, so bemerken wir zunächst, daß jede abzählbar unendliche Untergruppe U von G sich als Vereinigungsmenge eines Turmes endlich erzeugbarer Untergruppen darstellen

läßt, also Vereinigungsmenge eines Turmes von Σ-Untergruppen ist, woraus folgt, daß U selbst eine Σ-Untergruppe ist. Da weiter jede überabzählbare Untergruppe U von G sich als Vereinigungsmenge eines Untergruppenturms Λ derart darstellen läßt, daß jede Untergruppe in Λ geringere Mächtigkeit als U hat, so folgt nun durch eine naheliegende transfinite Induktion bezüglich der Mächtigkeit der Untergruppen von G, daß jede Untergruppe von G, und also auch G selbst, eine Σ-Gruppe ist, q.e.d.

Satz 7. *Genügt Σ dem Turmpostulat* T, *und ist $H=H(G,\Sigma)$ das Produkt aller $X\Sigma G$ erfüllenden Normalteiler von G, so gilt $H\Sigma G$.*

Beweis. Es sei S eine Σ-Untergruppe von G und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von HS. Dann gibt es endlich erzeugbare Untergruppen V von H und W von S derart, daß $U\leq\{V,W\}$ ist. Erinnern wir uns weiter daran, daß H das Produkt aller $X\Sigma G$ erfüllenden Normalteiler X von G ist, so folgt aus $V\leq H$ und der endlichen Erzeugbarkeit von V die Existenz endlich vieler $X_i\Sigma G$ erfüllender Normalteiler X_i von G derart, daß $V\leq X_1\dots X_n$ gilt. Aus Satz 3 folgt durch eine naheliegende Induktion die Gültigkeit von $X_1\dots X_n\Sigma G$. Da W als Untergruppe der Σ-Gruppe S selbst eine Σ-Gruppe ist, so ist $X_1\dots X_nW$ eine Σ-Gruppe, deren Untergruppen U und $\{V,W\}$ wegen Postulat I ebenfalls Σ-Gruppen sind. Damit ist gezeigt, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von HS eine Σ-Gruppe ist; und es ergibt sich aus Satz 6 und dem Turmpostulat T, daß HS eine Σ-Gruppe ist. Folglich gilt $H\Sigma G$, q.e.d.

Zusatz 2. *Erfüllt Σ das Turmpostulat* T, *sind $X\Sigma Y$ und $X\Sigma^*Y$ äquivalente Beziehungen, so ist die Gruppe G dann und nur dann eine Σ-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild H von G einen von 1 verschiedenen, $N\Sigma H$ erfüllenden Normalteiler N besitzt.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die Notwendigkeit unserer Bedingung daraus folgt, daß homomorphe Bilder von Σ-Gruppen selbst Σ-Gruppen sind, und daß eine Gruppe L dann und nur dann eine Σ-Gruppe ist, wenn $L\Sigma L$ gilt.

Es erfülle umgekehrt die Gruppe G die in unserem Zusatz 2 angegebene Bedingung. Dann bilden wir das Produkt H aller $X\Sigma G$ erfüllenden Normalteiler X von G. Aus Satz 7 folgt wegen T, daß $H\Sigma G$ gilt; und hieraus folgt weiter, daß H eine Σ-Gruppe ist. Wäre nun $H\neq G$, so bilden wir das homomorphe Bild $G/H\neq 1$ von G — man bemerke, daß H eine charakteristische Untergruppe von G ist. Nach Voraussetzung existiert dann ein Normalteiler $N/H\neq 1$ von G/H, der der Bedingung $N/H\Sigma G/H$ genügt. Da die Beziehungen $X\Sigma Y$ und $X\Sigma^*Y$ nach Voraussetzung äquivalent sind, so gelten auch $H\Sigma^*G$ und $N/H\Sigma^*G/H$. Aus Satz 2 folgt dann $N\Sigma^*G$; und hieraus folgt $N\Sigma G$. Aber dann erhalten wir den offenbaren Widerspruch $N\leq H<N$. Folglich ist $G=H$ eine Σ-Gruppe, q.e.d.

Bemerkung 5. Die Beweise von Satz 7 und Zusatz 2 zeigen, daß man das Turmpostulat T auch durch die Forderung ersetzen kann, daß die Maximalbedingung von den Normalteilern der betrachteten Gruppe G erfüllt werde.

2. Produkte von Σ-Gruppen

Wie im § 1 nehmen wir an, daß die gruppentheoretische Eigenschaft Σ den Postulaten I und II genügt. Wir wollen Kriterien dafür herleiten, daß ein Produkt von Normalteilern mit der Eigenschaft Σ selbst eine Σ-Gruppe ist. Zu diesem Zweck führen wir das folgende Postulat P.$\mathfrak{n}$ ein, wo $\mathfrak{n}$, wie immer, eine $1<\mathfrak{n}$ erfüllende Kardinalzahl ist.

P.$\mathfrak{n}$. *Ist $G=AB$ Produkt seiner Normalteiler A und B, sind A und B Gruppen mit der Eigenschaft Σ, und wird sowohl $A/(A\cap B)$ wie auch $B/(A\cap B)$ von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt, so ist G eine Σ-Gruppe.*

Man bemerke, daß P.1 weiter nichts besagt, als daß das Produkt zweier gleicher Σ-Normalteiler selbst eine Σ-Gruppe ist, daß also P.1 trivial ist.

Satz 1. *Wird* E.$\mathfrak{n}$ *von Σ erfüllt, so ist das Produkt irgend zweier Normalteiler mit der Eigenschaft Σ dann und nur dann eine Σ-Gruppe, wenn* P.$\mathfrak{n}$ *von Σ erfüllt wird.*

Beweis. Es ist klar, daß P.$\mathfrak{n}$ eine notwendige Bedingung ist. Wir nehmen also sofort an, daß P.$\mathfrak{n}$ von Σ erfüllt wird, daß $G=AB$ das Produkt seiner Normalteiler A und B ist, und daß sowohl A wie auch B die Eigenschaft Σ hat. Sei weiter S eine Untergruppe von B, die von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Dann ist S auch eine Untergruppe des Normalteilers $T=B\cap AS$ von AS; und es wird

$$AS/T=AS/(B\cap AS)\simeq ABS/B=AB/B\simeq A/(A\cap B),$$

so daß AS/T als homomorphes Bild der Σ-Gruppe A selbst eine Σ-Gruppe ist. Sei weiter R eine T enthaltende Untergruppe von AS derart, daß R/T von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Wir bedenken, daß $S\leq T\leq AS$ und also $AS=AT$ ist. Weiter ist $T\leq R\leq AS=AT$; und es folgt aus DEDEKINDS Gesetz, daß

$$R=T(A\cap R)$$

ist. Es ist klar, daß T und $A\cap R$ Normalteiler von R sind. Da T in der Σ-Gruppe B und $A\cap R$ in der Σ-Gruppe A enthalten ist, so sind B und $A\cap R$ beides Σ-Gruppen. Weiter ist

$$T\cap(A\cap R)=T\cap A=B\cap AS\cap A=A\cap B.$$

Schließlich ist

$$T/[T\cap(A\cap R)]=T/(T\cap A)\simeq AT/A=AS/A\simeq S/(A\cap S)$$

und

$$(A\cap R)/[T\cap(A\cap R)]\simeq T(A\cap R)/T=R/T,$$

so daß also sowohl $T/[T\cap(A\cap R)]$ wie auch $(A\cap R)/[T\cap(A\cap R)]$ von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Wir können also P.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es ergibt sich, daß R eine Σ-Gruppe ist. Damit haben wir gezeigt, daß erstens AS/T eine Σ-Gruppe ist, und daß zweitens jede zwischen T und AS gelegene Gruppe

R, die aus T durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist. Wir können also E.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es folgt, daß AS eine Σ-Gruppe ist.

Damit haben wir aber auch gezeigt, daß jede aus A durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entstehende Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist, da ja eine jede derartige Untergruppe sich als Produkt AS von A mit einer von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugbaren Untergruppe S von G darstellen läßt. Weiter ist $G/A = AB/A \simeq B/(A \cap B)$ als homomorphes Bild der Σ-Gruppe B selbst eine Σ-Gruppe. Wir können also wieder E.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es ergibt sich, daß G eine Σ-Gruppe ist, q.e.d.

Bemerkung 1. Die Unentbehrlichkeit von E.$\mathfrak{n}$ folgt etwa daraus, daß P.1, wie schon bemerkt, stets erfüllt ist, während natürlich Produkte von Normalteilern mit der Eigenschaft Σ im allgemeinen keine Σ-Gruppen sind.

Bemerkung 2. Um die Unentbehrlichkeit von P.$\mathfrak{n}$ einzusehen, betrachten wir die Klasse Σ der zyklischen Gruppen. Diese genügt, wie man leicht einsieht, der Forderung E.2, aber nicht der Forderung P.2, da ja direkte Produkte zyklischer Gruppen im allgemeinen nicht zyklisch sind.

Die folgende Forderung P stellt nichts anderes als die Konjunktion aller Forderungen P.$\mathfrak{n}$ dar.

P. *Produkte zweier Normalteiler mit der Eigenschaft Σ haben ebenfalls die Eigenschaft Σ.*

Satz 1 besagt, daß P eine Folge von E.$\mathfrak{n}$ und P.$\mathfrak{n}$ zusammen ist.

Folgerung. *Genügt Σ der Forderung* P, *sind weiter A und B Normalteiler der Gruppe G mit Σ-Faktorgruppen G/A und G/B, so ist auch $G/(A \cap B)$ eine Σ-Gruppe.*

Beweis. Das direkte Produkt D von G/A und G/B ist wegen P eine Σ-Gruppe. Bilden wir das Element g in G auf das Element (Ag, Bg) in D ab, so erhalten wir einen Isomorphismus von $G/(A \cap B)$ auf eine Untergruppe von D. Als Untergruppe einer Σ-Gruppe ist also $G/(A \cap B)$ ebenfalls eine Σ-Gruppe.

Bemerkung 3. Ist G eine beliebige Gruppe, so können wir den Durchschnitt $D = D(G, \Sigma)$ aller Normalteiler N mit Σ-Faktorgruppe G/N bilden. Es ist klar, daß D eine charakteristische Untergruppe ist; doch läßt sich im allgemeinen nicht zeigen, daß G/D eine Σ-Gruppe ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Klasse der Gruppen endlicher Klasse. Die folgende Betrachtung zeigt, daß G/D nur in Ausnahmefällen eine Σ-Gruppe sein wird. Sei nämlich Σ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, die abgesehen von I und II noch folgenden Forderungen genügt:

(a) Jede Gruppe endlicher Klasse ist eine Σ-Gruppe;

(b) $G/D(G, \Sigma)$ ist für jede Gruppe G eine Σ-Gruppe.

Ist nun F eine [nicht abelsche] freie Gruppe, so ist nach einem bekannten Satz von MAGNUS 1 der Durchschnitt der Glieder der absteigenden Zentren-

kette. Aus (a) folgt also, daß $D(F, \Sigma) = 1$ ist; und es folgt aus (b), daß F eine Σ-Gruppe ist. Da aber jede Gruppe homomorphes Bild einer freien Gruppe ist, so ergibt sich sogar, daß jede Gruppe eine Σ-Gruppe ist, wenn nur (a) und (b) von Σ erfüllt werden.

Um den auf H. WIELANDT zurückgehenden Begriff der Nachinvarianz in einer für unsere Anwendungen bequemen Form zu formulieren, müssen wir zunächst an den Begriff der [verallgemeinerten aufsteigenden] *Normalketten einer Gruppe* G erinnern. Darunter sei eine nicht leere Menge $\mathfrak{N}$ von Untergruppen der Gruppe G verstanden, die folgenden Bedingungen genügt:

(K.1) *Ist* $X \neq G$ *eine Untergruppe in* $\mathfrak{N}$, *so ist* X *echter Normalteiler einer Untergruppe* Y *aus* $\mathfrak{N}$.

(K.2) *Ist der Untergruppenturm* $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{N}$, *so gehört die Vereinigungsmenge von* $\mathfrak{T}$ *zu* $\mathfrak{N}$.

Man beachte, daß die Vereinigungsmengen von Untergruppentürmen stets wieder Untergruppen sind. — Man kann zeigen, daß jede Normalkette von G eine wohlgeordnete [aufsteigende] Normalkette enthält; und wir werden weiter unten beweisen, daß G Glied einer jeden Normalkette von G ist.

Definition. *Die Untergruppe* N *von* G *ist eine nachinvariante Untergruppe von* G, *wenn es eine* N *enthaltende Normalkette von* G *gibt.*

Man überzeugt sich sofort davon, daß G selbst eine nachinvariante Untergruppe von G ist, daß jeder Normalteiler einer nachinvarianten Untergruppe von G eine nachinvariante Untergruppe von G ist, und daß nachinvariante Untergruppen nachinvarianter Untergruppen nachinvariante Untergruppen sind [Transitivität der Nachinvarianz].

WIELANDT hat nur die Glieder endlicher Normalketten als nachinvariante Untergruppen bezeichnet; und es ist klar, daß sich der WIELANDTsche Begriff der Nachinvarianz gewiß dann mit dem unseren deckt, wenn die Maximalbedingung von den nachinvarianten Untergruppen der betrachteten Gruppe erfüllt wird.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß der Normalisator einer nachinvarianten Untergruppe von G nicht einmal dann eine nachinvariante Untergruppe zu sein braucht, wenn G endlich ist.

Satz 2. *Genügt* Σ *den Postulaten* P *und* T, *so ist das Kompositum aller nachinvarianten* Σ*-Untergruppen von* G *eine charakteristische* Σ*-Untergruppe von* G.

Beweis. Ist U eine Untergruppe von G, so werde mit U^* das Produkt aller der Normalteiler von U bezeichnet, die die Eigenschaft Σ haben. Haben die endlich vielen Normalteiler $X_1, \ldots, X_k$ von U je die Eigenschaft Σ, so folgt aus P, daß ihr Produkt $X_1 \ldots X_k$ ebenfalls die Eigenschaft Σ hat. Also ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U^* eine Σ-Gruppe; und es folgt aus dem Turmpostulat T und § 1, Satz 6, daß U^* eine charakteristische Σ-Untergruppe von U ist.

Sei nun N eine nachinvariante Σ-Untergruppe von G. Dann existiert eine N enthaltende Normalkette $\mathfrak{N}$ von G. Wir verstehen unter Θ die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{T}$ ist ein N enthaltender Turm.

(2) Gehören X und Y zu $\mathfrak{T}$, so folgt aus $X \leq Y$ stets $X^* \leq Y^*$.

Es ist klar, daß N allein einen solchen Turm bildet, und daß also die Menge Θ nicht leer ist. Ist weiter Λ eine nicht leere Teilmenge von Θ mit der Turmeigenschaft, so daß also für zwei verschiedene Türme $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ in Λ stets $\mathfrak{T}' < \mathfrak{T}''$ oder $\mathfrak{T}'' < \mathfrak{T}'$ gilt, dann ist die Vereinigungsmenge aller Türme aus Λ offenbar wieder ein Turm in Θ. Damit ist aber gezeigt, daß das Maximumprinzip der Mengenlehre auf die Menge Θ von Türmen angewandt werden kann; und es gibt also einen maximalen Turm $\mathfrak{M}$ in Θ.

Die Vereinigungsmenge V der Untergruppen in dem Turm $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{N}$ gehört wegen (K.2) zu $\mathfrak{N}$. Aus (2) folgt, daß die Untergruppen X^* für X in $\mathfrak{M}$ einen Turm von Σ-Untergruppen bilden, dessen Vereinigungsmenge W wegen des Turmpostulats eine Σ-Untergruppe von G ist. Da N wegen (1) zu $\mathfrak{M}$ gehört, und da N eine Σ-Gruppe ist, so ist $N = N^* \leq W$.

Ist X eine Untergruppe in $\mathfrak{M}$ und v ein Element in V, so existiert eine v enthaltende Untergruppe Y in $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ wegen (1) ein Turm ist, so gilt $X \leq Y$ oder $Y \leq X$; und es gibt also eine $\{X, v\}$ enthaltende Untergruppe R in $\mathfrak{M}$. Wegen (2) ist $X^* \leq R^*$; und da R^* eine charakteristische Untergruppe der v enthaltenden Gruppe R ist, so wird

$$v^{-1} X^* v \leq v^{-1} R^* v = R^*.$$

Da aber W die Vereinigungsmenge aller X^* mit X in $\mathfrak{M}$ ist, so folgt, daß W ein Normalteiler von V ist. Da der Normalteiler W von V die Eigenschaft Σ hat, so gilt $W \leq V^*$; und damit ist $X^* \leq V^*$ für jedes X aus $\mathfrak{M}$ erwiesen. Durch Hinzufügen von V zu $\mathfrak{M}$ entsteht also wieder ein Turm aus Θ; und aus der Maximalität des Turmes $\mathfrak{M}$ in Θ folgt dann, daß V zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Wäre $V \neq G$, so wäre die Untergruppe V aus $\mathfrak{N}$ wegen (K.1) echter Normalteiler einer Untergruppe H aus $\mathfrak{N}$. Da V^* eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers V von H ist, so ist die Σ-Gruppe V^* ein Normalteiler von H. Also wird $V^* \leq H^*$. Da V die Vereinigung aller Untergruppen des Turms $\mathfrak{M}$ ist, so entsteht aus $\mathfrak{M}$ durch Hinzufügen von H wieder ein Turm aus Θ; und aus der Maximalität von $\mathfrak{M}$ folgt, daß H zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dann wird aber $H \leq V < H$, ein Widerspruch. Folglich ist $V = G$ in $\mathfrak{M}$ enthalten; und es folgt aus (1) und (2), daß $N = N^* \leq G^*$ gilt. Damit haben wir aber gezeigt, daß die charakteristische Σ-Untergruppe G^* von G alle nachinvarianten Σ-Untergruppen von G enthält, q.e.d.

3. Produkte lokal-NOETHERscher Gruppen

Wir wollen eine Gruppe NOETHERsch nennen, wenn alle ihre Untergruppen endlich erzeugbar sind. Eine Gruppe G ist also dann und nur dann NOETHERsch wenn die Maximalbedingung von ihren Untergruppen erfüllt wird [Ober-

gruppensatz]. Untergruppen und homomorphe Bilder NOETHERscher Gruppen sind NOETHERsch; und ebenso sind Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen NOETHERsch.

Die Gruppe G heiße *lokal*-NOETHER*sch*, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G NOETHERsch ist. Es ist klar, daß Untergruppen lokal-NOETHERscher Gruppen lokal-NOETHERsch sind, und daß die Klasse der lokal-NOETHERschen Gruppen dem Turmpostulat T des § 1 genügt. Ist E eine endlich erzeugbare Untergruppe des homomorphen Bildes H der lokal-NOETHERschen Gruppe G, so ist E ein homomorphes Bild einer endlich erzeugbaren Untergruppe F von G. Da aber F NOETHERsch ist, so ist auch E NOETHERsch, d.h. homomorphe Bilder lokal-NOETHERscher Gruppen sind lokal NOETHERsch. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß abelsche Gruppen lokal-NOETHERsch sind.

Dagegen sind Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch lokal-NOETHERsche Gruppen im allgemeinen nicht wieder lokal-NOETHERsch. Dies zeigt das folgende wohlbekannte und einfache

Beispiel 1. Es sei F eine [nicht abelsche] freie Gruppe mit zwei Erzeugenden, $G = F/F''$. Dann ist $G' = F'/F''$ eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges, G/G' eine freie abelsche Gruppe des Ranges 2; und G wird von zwei Elementen erzeugt. Da abelsche Gruppen lokal-NOETHERsch sind, so ist G eine endlich erzeugbare Erweiterung einer [abelschen] lokal-NOETHERschen Gruppe durch eine [abelsche] NOETHERsche Gruppe, ist aber selbst weder NOETHERsch noch lokal-NOETHERsch.

Satz 1. *Die Gruppe G ist lokal*-NOETHER*sch, wenn sie Normalteiler N, D und eine Untergruppe U mit folgenden Eigenschaften besitzt:*

N, U und G/D sind lokal-NOETHER*sch;*
$D \leq N \cap U$ und $G = NU$.

Beweis. Es sei P eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Da jedes Element in P Produkt eines Elements in N und eines Elements in U ist, so existieren endlich erzeugbare Untergruppen $N^* \leq N$ und $U^* \leq U$ derart, daß $P \leq \{N^*, U^*\} = Q$ ist. Dann ist DQ/D eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G/D, so daß also DQ/D NOETHERsch ist. Daraus folgt die endliche Erzeugbarkeit des Normalteilers

$$(DQ/D) \cap (N/D) = (DQ \cap N)/D = D(Q \cap N)/D \simeq (Q \cap N)/(Q \cap D)$$

von DQ/D; und es existiert also eine endlich erzeugbare Untergruppe R von $Q \cap N$ derart, daß

$$Q \cap N = (Q \cap D)R, \quad DQ \cap N = DR$$

gilt. Da N^* eine endlich erzeugbare Untergruppe von $Q \cap N \leq DR$ ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe Y von D derart, daß $N^* \leq \{Y, R\}$ ist; und folglich ist

$$P \leq \{N^*, U^*\} \leq \{Y, R, U^*\}.$$

Sei jetzt E ein endliches Erzeugendensystem von U^*. Ist e irgendein Element in E, so ist

$$DR = D(e^{-1}Re) = D(eRe^{-1}),$$

da ja D ein Normalteiler von G und $DR = DQ \cap N$ ein Normalteiler der U^* und E enthaltenden Untergruppe DQ ist. Da R endlich erzeugbar ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe $R(e)$ von D derart, daß

$$\{e^{-1}Re, R, eRe^{-1}\} \leq \{R(e), R\}$$

ist. Da E eine endliche Menge ist, so ist das Kompositum $R(E)$ aller $R(e)$ mit e in E eine endlich erzeugbare Untergruppe von D.

Da D ein Normalteiler von G ist, so ist $T = D \cap \{Y, R(E), U^*\}$ ein Y und $R(E)$ enthaltender Normalteiler von $\{Y, R(E), U^*\} \leq U$. Da $Y, R(E), U^*$ endlich erzeugbar sind, so ist $\{Y, R(E), U^*\}$ als endlich erzeugbare Untergruppe der nach Voraussetzung lokal-NOETHERschen Gruppe U selbst NOETHERsch; und daraus folgt insbesondere die endliche Erzeugbarkeit von T. Da T eine endlich erzeugbare Untergruppe von D und R eine endlich erzeugbare Untergruppe von N ist, so ist $\{T, R\}$ als endlich erzeugbare Untergruppe der nach Voraussetzung lokal-NOETHERschen Gruppe N selbst NOETHERsch.

Da T ein Normalteiler von $\{Y, R(E), U^*\}$ ist, so gehört insbesondere jedes Element e aus dem Erzeugendensystem E von U^* dem Normalisator von T an; und wir haben

$$e^{-1}Te = T = eTe^{-1} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Weiter ist

$$\{e^{-1}Re, R, eRe^{-1}\} \leq \{R(e), R\} \leq \{R(E), R\} \leq \{T, R\} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Folglich wird für jedes e in E

$$e^{-1}\{T, R\}e \leq \{T, R\} \quad \text{und} \quad e\{T, R\}e^{-1} \leq \{T, R\};$$

und hieraus folgt

$$e^{-1}\{T, R\}e = \{T, R\} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Da aber E ein Erzeugendensystem von U^* ist, so folgt, daß U^* dem Normalisator von $\{T, R\}$ angehört, so daß also die NOETHERsche Gruppe $\{T, R\}$ ein Normalteiler von $\{T, R, U^*\}$ ist. Da U^* als endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe U selbst NOETHERsch ist, und da

$$\{T, R, U^*\}/\{T, R\}$$

ein homomorphes Bild der NOETHERschen Gruppe U^* ist, so ist $\{T, R, U^*\}$ als Erweiterung der NOETHERschen Gruppe $\{T, R\}$ durch die NOETHERsche Gruppe $\{T, R, U^*\}/\{T, R\}$ ebenfalls eine NOETHERsche Gruppe. Aus

$$P \leq \{Y, R, U^*\} \leq \{T, R, U^*\}$$

folgt schließlich, daß P als Untergruppe der NOETHERschen Gruppe $\{T, R, U^*\}$ gleichfalls eine NOETHERsche Gruppe ist; und damit haben wir gezeigt, daß G lokal-NOETHERsch ist, q.e.d.

Folgerung 1. *Das Kompositum aller lokal-*NOETHER*schen nachinvarianten Untergruppen ist eine lokal-*NOETHER*sche charakteristische Untergruppe.*

Beweis. Es sei zunächst $G = AB$ das Produkt seiner lokal-NOETHERschen Normalteiler A und B. Dann ist $G/(A \cap B)$ das direkte Produkt der lokal-NOETHERschen Gruppen $A/(A \cap B)$ und $B/(A \cap B)$. Da jedes direkte Produkt zweier NOETHERscher Gruppen wieder eine NOETHERsche Gruppe ist, und da jede endlich erzeugbare Untergruppe von $G/(A \cap B)$ in dem direkten Produkt einer endlich erzeugbaren Untergruppe von $A/(A \cap B)$ und einer endlich erzeugbaren Untergruppe von $B/(A \cap B)$ enthalten ist, so ist $G/(A \cap B)$ sicherlich lokal-NOETHERsch. Anwendung von Satz 1 ergibt, daß $G = AB$ ebenfalls lokal-NOETHERsch ist. Folglich wird Postulat P des § 2 von der Klasse der lokal-NOETHERschen Gruppen erfüllt. Da Postulat T des § 1 ebenfalls von der Klasse der lokal-NOETHERschen Gruppen erfüllt wird, so können wir § 2, Satz 2 anwenden. Also ist das Kompositum aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von G eine lokal-NOETHERsche charakteristische Untergruppe von G.

Der wichtigste Spezialfall von Folgerung 1 ist natürlich die Aussage, daß jedes Produkt lokal-NOETHERscher Normalteiler ein lokal-NOETHERscher Normalteiler ist.

Satz 2. *Erweiterungen lokal-*NOETHER*scher Gruppen durch endliche Gruppen sind lokal-*NOETHER*sch.*

Beweis. Ist N ein lokal-NOETHERscher Normalteiler der Gruppe G und G/N endlich, so ist nämlich $U \cap N$ endlich erzeugbar, wenn U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G ist, da ja $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als Untergruppe von G/N endlich ist, s. etwa BAER [*1*; p. 396, (1.3)]. Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch endliche Gruppen sind aber NOETHERsch; und folglich ist U als endliche Erweiterung der NOETHERschen Gruppe $U \cap N$ selbst NOETHERsch, woraus dann folgt, daß G lokal-NOETHERsch ist, q.e.d.

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß die Klasse der lokal-NOETHERschen Gruppen nicht die Eigenschaft (E.1) hat. Die folgenden Betrachtungen sollen zeigen, daß wir nicht darauf hoffen können, die Gültigkeit von (E.2) zu erweisen.

Die folgenden drei Eigenschaften sind miteinander äquivalent:

(a) *Die Klasse der lokal-*NOETHER*schen Torsionsgruppen genügt der Forderung* (E.1).

(b) *Die Klasse der lokal-*NOETHER*schen Torsionsgruppen genügt der Forderung* (E.2).

(c) NOETHER*sche Torsionsgruppen sind endlich.*

Man bemerke, daß (c) eine Variante der berühmten BURNSIDEschen Vermutung ist.

Beweis. Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt. Gilt (b), so betrachten wir eine NOETHERsche Torsionsgruppe G. Sei p irgendeine Primzahl und A eine $A^p=1$ erfüllende abelsche Gruppe, deren Rang genau gleich der Mächtigkeit von G ist. Es gibt dann eine ein-ein-deutige Abbildung $t(g)$ von G auf eine Basis $t(G)$ von A. Zu jedem Element g aus G gibt es genau einen Automorphismus von A, der $t(x)$ für jedes x in G auf $t(xg)$ abbildet; und wir können diesen Automorphismus von A mit g bezeichnen, da wir auf diese Weise eine isomorphe Darstellung von G als Automorphismengruppe von A erhalten. Weiter existiert eine Erweiterung E von A durch G, die G als Untergruppe enthält und in A genau die eben konstruierten Automorphismen induziert — dies ist eine geeignete Untergruppe des Holomorphs von A. Die Gruppe E wird offenbar von $t(1)$ und G erzeugt; und da G als NOETHERsche Gruppe endlich erzeugbar ist, so ist auch E endlich erzeugbar. Da G und A Torsionsgruppen sind, so ist auch E eine Torsionsgruppe. Ist e irgendein Element in E, so sieht man mühelos ein, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von $\{A, e\}$ sogar endlich ist. Schließlich ist $E/A \simeq G$ und also NOETHERsch. Anwendung von (E.2) ergibt, daß E lokal-NOETHERsch ist. Da aber E endlich erzeugbar ist, so ist E sogar NOETHERsch; und daraus folgt insbesondere, daß A eine endlich erzeugbare abelsche Torsionsgruppe und also endlich ist. Folglich ist insbesondere die Basis $t(G)$ von A endlich, die nach Konstruktion die gleiche Mächtigkeit wie G hat. Also ist G selbst endlich; und wir haben (c) aus (b) hergeleitet.

Schließlich gelte (c); und es sei H eine Erweiterung der lokal-NOETHERschen Torsionsgruppe N durch die lokal-NOETHERsche Torsionsgruppe H/N. Ist dann U eine endlich erzeugbare Untergruppe von H, so ist NU/N eine endlich erzeugbare Untergruppe von H/N; und als solche ist NU/N eine NOETHERsche Torsionsgruppe. Wegen (c) ist also NU/N endlich. Da N eine lokal-NOETHERsche Torsionsgruppe ist, so folgt aus Satz 2, daß auch NU eine lokal-NOETHERsche Gruppe ist. Die endlich erzeugbare Untergruppe U von NU/N ist also NOETHERsch; und damit ist gezeigt, daß H lokal-NOETHERsch ist, d.h. daß (a) aus (c) folgt, q.e.d.

Definition. *Die Gruppe G ist fast-auflösbar, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit endlicher Kommutatorgruppe N' besitzt.*

Im folgenden werden wir uns mit NOETHERschen fast-auflösbaren Gruppen befassen, deren charakteristische Eigenschaften wir in dem folgenden Satz 3 zusammenstellen. Für weitere Eigenschaften dieser Gruppenklasse sei auf BAER [4; p. 276] verwiesen.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(1) *G ist* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

(2) *G ist eine endliche Erweiterung einer* NOETHERschen *auflösbaren Gruppe.*

(3) *G ist endlich erzeugbar und jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.*

(4) *G ist endlich erzeugbar; jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt eine nachinvariante Untergruppe $N \neq 1$, die endlich oder zyklisch ist; ist der lokal-*NOETHER*sche Normalteiler L von G in der nachinvarianten Untergruppe K von G enthalten, und ist K/L eine unendliche zyklische Gruppe, so ist K lokal-*NOETHER*sch.*

Beweis. Aus BAER [*2*; p. 149, Satz 1] folgert man ohne Mühe, daß eine NOETHERsche und fast-auflösbare Gruppe G eine charakteristische Untergruppe N mit folgenden zwei Eigenschaften besitzt:

(2*) G/N ist endlich und $N^{(k)} = 1$ für geeignetes k.

[Hierbei sind die Ableitungen wie üblich induktiv durch die Gleichungen $G = G^{(0)}$, $G^{(i+1)} =$ Kommutatorgruppe von $G^{(i)}$ definiert.] Damit ist die Äquivalenz von (1) und (2) dargetan. — Die Äquivalenz von (1) und (3) haben wir an anderer Stelle bewiesen; s. BAER [*4*; p. 276/277, Zusatz 4].

Es ist klar, daß (4) aus den äquivalenten Eigenschaften (1) bis (3) folgt. Wir nehmen also die Gültigkeit von (4) an. Aus Folgerung 1 ergibt sich zunächst, daß das Kompositum L aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von G eine lokal-NOETHERsche charakteristische Untergruppe von G ist. Wäre $L \neq G$, so besäße das homomorphe Bild $G/L \neq 1$ von G eine nachinvariante Untergruppe $K/L \neq 1$, die endlich oder zyklisch ist. Da $L < K$ und K eine nachinvariante Untergruppe von G ist, und da L das Kompositum aller nachinvarianten lokal-NOETHERschen Untergruppen von G ist, so ist K nicht lokal-NOETHERsch. Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch endliche Gruppen sind nach Satz 2 lokal-NOETHERsch. Also ist K/L eine unendlich zyklische Gruppe. Dann ist aber K nach der dritten Bedingung von (4) lokal-NOETHERsch; und aus diesem Widerspruch folgt, daß $G = L$ lokal-NOETHERsch ist. Da aber G nach der [hier zum erstenmal benutzten] ersten Bedingung von (4) endlich erzeugbar ist, so ist G sogar NOETHERsch.

Sei nun $B \neq 1$ ein homomorphes Bild von G. Dann ist B insbesondere NOETHERsch. Nachinvariante Untergruppen lassen sich also mit B durch endliche geordnete Normalketten verbinden, so daß sich der hier von uns benutzte Begriff der Nachinvarianz mit dem engeren von WIELANDT eingeführten und von uns in BAER [*3*] benutzten Begriff der Nachinvarianz deckt. Besitzt B eine zyklische, von 1 verschiedene, nachinvariante Untergruppe, so ist die Menge R aller zyklische nachinvariante Untergruppen von B erzeugenden Elemente ebenfalls von 1 verschieden. Nach BAER [*3*; p. 418, Satz 2] ist R eine charakteristische Untergruppe von B. Da B mit G NOETHERsch ist, so ist R endlich erzeugbar, so daß R sogar von endlicher Klasse ist [d.h. eine endliche Zentrenkette besitzt]; s. BAER [*3*; p. 418, Satz 3]. Also ist insbesondere das Zentrum von R eine von 1 verschiedene, endlich erzeugbare, charakteristische, abelsche Untergruppe von B. — Besitzt B keine von 1 verschiedene, zyklische nachinvariante Untergruppe, so folgern wir aus der Bedingung (4) die Existenz einer von 1 verschiedenen, endlichen, nachinvarianten Untergruppe von B; und unter diesen gibt es eine maximale M, da ja B mit G NOETHERsch ist. Die nachinvariante Untergruppe M

von B ist in einer Normalkette $\mathfrak{N}$ von B enthalten. Einige Untergruppen in $\mathfrak{N}$ enthalten M als Normalteiler, z.B. M selbst; und unter diesen Gliedern von $\mathfrak{N}$ gibt es ein maximales N. Wäre $N \neq B$, so wäre N echter Normalteiler eines Gliedes J von $\mathfrak{N}$. Aus $N < J$ folgt dann, daß M kein Normalteiler von J ist. Da aber M ein Normalteiler von N und N ein Normalteiler von J ist, so ist $x^{-1}Mx$ für jedes x in J ein Normalteiler von N, so daß also $Mx^{-1}Mx$ für jedes x in J ein endlicher Normalteiler von N ist. Es ist dann klar, daß $Mx^{-1}Mx$ für jedes x in J eine endliche nachinvariante Untergruppe von B ist. Aus der Maximalität von M folgt also $M = x^{-1}Mx$ für jedes x in J, so daß M ein Normalteiler von J ist. Dies ist ein Widerspruch. Also ist M ein Normalteiler von $N = B$. Damit haben wir gezeigt, daß (3) aus (4) folgt, womit die Äquivalenz der Eigenschaften (1) bis (4) erwiesen ist.

Folgerung 2. *Die Klasse der* NOETHERschen *fast-auflösbaren Gruppen genügt den Postulaten* I, II, E.1 *und* P.

Dies ist eine fast unmittelbare Folge aus Satz 3.

Satz 4. *Die Gruppe G ist lokal-*NOETHERsch*, wenn sie einen lokal-*NOETHERschen *Normalteiler N mit folgenden Eigenschaften besitzt:*

(a) *Ist U eine N enthaltende Untergruppe von G mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe U/N, so ist U lokal-*NOETHERsch.

(b) *Jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N ist* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

Bemerkung. Bedingung (a) ist automatisch erfüllt, wenn G/N eine Torsionsgruppe ist; und aus (b) folgt insbesondere, daß G/N lokal-NOETHERsch ist.

Beweis. Es sei S eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Dann ist $S/(S \cap N) \simeq NS/N$ eine endlich erzeugbare Untergruppe von G/N; und es folgt aus (b), daß $S/(S \cap N)$ NOETHERsch und fast-auflösbar ist. Das Kompositum K aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von S ist nach Folgerung 1 eine lokal-NOETHERsche charakteristische Untergruppe von S. Da N nach Voraussetzung lokal-NOETHERsch ist, so ist $N \cap S$ ein lokal-NOETHERscher Normalteiler von S, der natürlich in K enthalten ist. Also ist S/K ein homomorphes Bild der NOETHERschen und fast-auflösbaren Gruppe $S/(S \cap N)$.

Wäre $K \neq S$, so existierte eine nachinvariante Untergruppe $H/K \neq 1$ von S/K, die endlich oder zyklisch ist. Aus $K < H$ und der Nachinvarianz von H folgt dann, daß H nicht lokal-NOETHERsch sein kann, da ja K das Kompositum aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von S ist. Da Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch endliche Gruppen wieder lokal-NOETHERsch sind [Satz 2], so ist H/K unendlich und also eine unendliche zyklische Gruppe. Es existiert folglich eine unendliche zyklische Gruppe W derart, daß $H = KW$ und $1 = K \cap W$ ist. Dann ist aber auch NW/N eine unendlich zyklische Gruppe; und es folgt aus Bedingung (a), daß NW lokal-NOETHERsch ist. Die Untergruppe $(N \cap S)W$ von NW ist also auch

lokal-NOETHERsch. Da

K, $(N \cap S)W$ und $H/(N \cap S)$ lokal-NOETHERsch sind und

$N \cap S \leq K \cap (N \cap S)W$, $H = K(N \cap S)W$ ist,

[die Untergruppe $H/(N \cap S)$ von $S/(N \cap S)$ ist sogar NOETHERsch], so ergibt sich aus Satz 1, daß H lokal-NOETHERsch ist. Aus diesem Widerspruch folgt aber, daß $K = S$ eine endlich erzeugbare und lokal-NOETHERsche Gruppe ist. Also ist jede endlich erzeugbare Untergruppe S von G NOETHERsch, d.h. G ist lokal-NOETHERsch.

Bemerkung. Es sei an das einfache Beispiel einer zyklischen Erweiterung einer abelschen Gruppe erinnert, die nicht lokal-NOETHERsch ist: G werde von Elementen a und b erzeugt, die den folgenden Bedingungen genügen: $b(a^{-i}ba^i) = (a^{-i}ba^i)b$. Die von den Elementen $a^{-i}ba^i$ erzeugte Untergruppe A von G ist dann ein abelscher Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe G/A; und A ist sogar eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges. Diese endlich erzeugbare Gruppe G ist also nicht NOETHERsch und erst recht nicht lokal-NOETHERsch. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der in Satz 3 und 4 auftretenden Bedingung, daß gewisse unendliche zyklische Erweiterungen von lokal-NOETHERschen Gruppen wieder lokal-NOETHERsch sind.

Ist G eine beliebige Gruppe, so sei unter $T(G)$ das Produkt aller Normalteiler X von G verstanden, die folgender Bedingung genügen:

(T) *Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit zyklischer Faktorgruppe U/X ist lokal-*NOETHERsch.

Es folgt aus Satz 2, daß (T) mit folgender Bedingung äquivalent ist:

(T′) X ist lokal-NOETHERsch und jede X enthaltende Untergruppe U von G mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe U/X ist lokal-NOETHERsch.

Weiter folgt sofort aus Folgerung 1, daß *das Produkt $T(G)$ aller T-Teiler von G* lokal-NOETHERsch ist.

Satz 5. *Ist jede* NOETHERsche *Untergruppe eines jeden homomorphen Bildes von G fast-auflösbar, so ist jede $T(G)$ enthaltende Untergruppe U von G mit lokal-*NOETHERscher *Faktorgruppe $U/T(G)$ lokal-*NOETHERsch *und*

$$T[G/T(G)] = 1.$$

Beweis. Hat der Normalteiler X von G die Eigenschaft (T), und ist U eine X enthaltende Untergruppe von G mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe U/X, so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U/X NOETHERsch und fast-auflösbar; und es folgt aus Satz 4, daß U lokal-NOETHERsch ist. Damit ist gezeigt, daß der Normalteiler X von G dann und nur dann die Eigenschaft (T) hat, wenn er folgender Bedingung genügt:

(T*) *Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit lokal-*NOETHERscher *Faktorgruppe U/X ist lokal-*NOETHERsch.

Hat weiter der Normalteiler X von G die äquivalenten Eigenschaften (T) und (T*), und ist S eine lokal-NOETHERsche Untergruppe von G, so ist $XS/X \simeq S/(S \cap X)$ lokal-NOETHERsch; und aus (T*) folgt, daß XS lokal-

NOETHERsch ist. Also sind die Eigenschaften (T) und (T*) auch mit folgender Eigenschaft von X äquivalent:

(T**) *Ist L eine lokal-*NOETHER*sche Untergruppe von G, so ist XL lokal-*NOETHER*sch.*

$T(G)$ ist also das Produkt aller Normalteiler X von G mit der Eigenschaft (T**). Aus § 1, Satz 7 und dem Turmpostulat T, das ja von der Eigenschaft, lokal-NOETHERsch zu sein, erfüllt wird, ergibt sich dann, daß $T(G)$ ebenfalls die Eigenschaft (T**) hat, die aber mit (T*) äquivalent ist. Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen.

Es sei nun W die eindeutig bestimmte Untergruppe von G, die $T(G)$ enthält und der Gleichung $W/T(G) = T[G/T(G)]$ genügt. Dann ist W ein Normalteiler von G. Ist U eine W enthaltende Untergruppe von G mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe U/W, so ist $U/T(G)$ eine $T[G/T(G)]$ enthaltende Untergruppe von $G/T(G)$ mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe

$$[U/T(G)]/T[G/T(G)] \simeq U/W.$$

Da aber $G/T(G)$ ebenfalls der Voraussetzung von Satz 5 genügt, so können wir das erste Resultat von Satz 5 auf $G/T(G)$ anwenden; und es ergibt sich, daß $U/T(G)$ lokal-NOETHERsch ist. Eine zweite Anwendung des ersten Resultats von Satz 5 ergibt dann, daß U selbst lokal-NOETHERsch ist. Also hat W die zu (T) äquivalente Eigenschaft (T*), so daß $W \leq T(G) \leq W$ gilt. Mithin ist $W = T(G)$ und $T[G/T(G)] = W/T(G) = 1$.

Folgerung 3. *Sind* NOETHER*sche homomorphe Bilder von Untergruppen der Gruppe G fast-auflösbar, so ist G dann und nur dann lokal-*NOETHER*sch, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ einer endlich erzeugbaren Untergruppe von G einen T-Teiler $N \neq 1$ besitzt.*

Dies ergibt sich sofort aus Satz 5.

Unter einem *L-Teiler der Gruppe G* sei ein Normalteiler X von G mit folgender Eigenschaft verstanden:

(L) *Ist U eine X enthaltende Untergruppe von G mit* NOETHER*scher und fast-auflösbarer Faktorgruppe U/X, so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U* NOETHER*sch und fast-auflösbar.*

Es ist klar, daß jeder L-Teiler auch ein T-Teiler ist, und daß jede endlich erzeugbare Untergruppe eines L-Teilers NOETHERsch und fast-auflösbar ist; vgl. BAER [4; Satz 5 und seinen Beweis].

Folgerung 4. *Das Produkt $L(G)$ aller L-Teiler von G ist ein L-Teiler von G; und 1 ist der einzige L-Teiler von $G/L(G)$.*

Beweis. Es sei $N/L(G)$ ein L-Teiler von $G/L(G)$ und U eine N enthaltende Untergruppe von G mit NOETHERscher und fast-auflösbarer Faktorgruppe U/N. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von $U/L(G)$ NOETHERsch und fast-auflösbar; und aus Folgerung 1 erschließt man, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von $L(G)$ NOETHERsch und fast-auflösbar ist, da ja $L(G)$ ein Produkt von Normalteilern mit dieser Eigenschaft ist. Es folgt, daß

jede NOETHERsche Untergruppe eines homomorphen Bildes von U fast-auflösbar ist. Nach Definition ist $L(G)$ Produkt von L-Teilern von G. Da L-Teiler von G auch T-Teiler sind, und da jeder in U enthaltene T-Teiler von G ein T-Teiler von U ist, so ist $L(G)$ ein Produkt gewisser T-Teiler von U. Also ist $L(G) \leq T(U)$; und aus Satz 5 folgt, daß U lokal-NOETHERsch ist. Dann sind aber alle endlich erzeugbaren Untergruppen von U NOETHERsch und fast-auflösbar, so daß N ein L-Teiler von G ist. Es folgt, daß $L(G) = N$ ein L-Teiler von G und 1 der einzige L-Teiler von $G/L(G)$ ist, q.e.d.

4. Vererbung gruppentheoretischer Eigenschaften

Wir werden in diesem Abschnitt eine gruppentheoretische Eigenschaft Σ betrachten, die jedenfalls den folgenden Postulaten genügen soll:

I. *Untergruppen von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

II. *Homomorphe Bilder von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

III. *Jede Σ-Gruppe ist* NOETHERsch.

Die von Σ abgeleitete Eigenschaft $L(\Sigma)$ wird dann folgendermaßen definiert:

G ist dann und nur dann eine $L(\Sigma)$-Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist.

Wegen I ist jede Σ-Gruppe auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Aus der Definition folgt sofort, daß jede Untergruppe einer $L(\Sigma)$-Gruppe wieder eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist; und aus II folgert man mühelos, daß homomorphe Bilder von $L(\Sigma)$-Gruppen ebenfalls $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Aus § 1, Satz 6 ergibt sich, daß $L(\Sigma)$ die kleinste Σ umfassende, die Postulate I, II und das Turmpostulat T erfüllende Gruppenklasse ist. Wegen III sind schließlich alle $L(\Sigma)$-Gruppen lokal-NOETHERsch.

Satz 1. *Dann und nur dann ist jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe, wenn jedes Produkt zweier Σ-Normalteiler eine Σ-Gruppe ist.*

Beweis. Ist zunächst jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe, so ist insbesondere jedes Produkt $G = AB$ zweier Σ-Normalteiler A und B eine $L(\Sigma)$-Gruppe, da ja Σ-Gruppen auch $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Da Σ-Gruppen NOETHERsch sind, so sind A, B und also auch $G = AB$ endlich erzeugbar. Da endlich erzeugbare $L(\Sigma)$-Gruppen sogar Σ-Gruppen sind, so ist G eine Σ-Gruppe, womit die Notwendigkeit unserer Bedingung dargetan ist.

Wir nehmen umgekehrt an, daß Produkte zweier Σ-Normalteiler wieder Σ-Gruppen sind. Sei nun $G = AB$ das Produkt seiner beiden $L(\Sigma)$-Normalteiler A und B. Da A und B beide lokal-NOETHERsch sind, so folgt aus § 3, Folgerung 1, daß G lokal-NOETHERsch ist. Ist U eine endlich erzeugbare Untergruppe von $G = AB$, so existieren natürlich auch endliche Teilmengen $E \leq A$ und $F \leq B$ derart, daß $U \leq \{E, F\} = V$ ist. Als endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G ist aber V NOETHERsch. Da A und B Normalteiler von G sind, und da $E \leq A \cap V$, $F \leq B \cap V$ ist, so ist V Produkt seiner Normalteiler $A \cap V$ und $B \cap V$. Als Untergruppe der

NOETHERschen Gruppe V ist aber $A \cap V$ endlich erzeugbar; und als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe A ist $A \cap V$ eine Σ-Gruppe. Ebenso folgt, daß $B \cap V$ eine Σ-Gruppe ist. Das Produkt $V = (A \cap V)(B \cap V)$ zweier Σ-Normalteiler ist nach Voraussetzung eine Σ-Gruppe; und die Untergruppe U der Σ-Gruppe V ist wegen I eine Σ-Gruppe. Also ist G eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Damit ist gezeigt, daß $L(\Sigma)$ dem Postulat P des § 2 genügt. Da aber $L(\Sigma)$ auch dem Turmpostulat T des § 1 genügt, so ergibt sich aus § 2, Satz 2, daß jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist.

Folgerung 1. *Ist das Produkt zweier Σ-Normalteiler stets wieder eine Σ-Gruppe, so ist das Kompositum aller nachinvarianten $L(\Sigma)$-Untergruppen der Gruppe G eine charakteristische $L(\Sigma)$-Untergruppe von G.*

Dies folgt sofort aus Satz 1 und § 2, Satz 2.

Um auch die Resultate der zweiten Hälfte des § 3 anwenden zu können, werde der Eigenschaft Σ noch eine weitere Bedingung auferlegt.

IV. *Jede Σ-Gruppe ist fast-auflösbar.*

Von jetzt ab werde also gefordert, daß Σ den Bedingungen I bis IV genüge.

Satz 2. *Ist $1 < n$, so genügt Σ dann und nur dann dem Erweiterungspostulat* E.n, *wenn* E.n *von $L(\Sigma)$ erfüllt wird.*

Beweis. Genüge zunächst $L(\Sigma)$ dem Erweiterungspostulat E.n. Weiter sei N ein Normalteiler der Gruppe G; und es habe sowohl G/N wie auch jede aus N durch Adjunktion von weniger als n Elementen entstehende Untergruppe von G die Eigenschaft Σ. Da jede Σ-Gruppe auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so folgt aus E.n, daß G selbst eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist. Da N und G/N als Σ-Gruppen endlich erzeugbar sind [III], so ist G eine endlich erzeugbare $L(\Sigma)$-Gruppe und also eine Σ-Gruppe; und E.n wird also auch von Σ erfüllt.

Wir nehmen umgekehrt an, daß Σ der Forderung E.n genügt; und wir betrachten einen Normalteiler N der Gruppe G mit folgenden zwei Eigenschaften: G/N ist eine $L(\Sigma)$-Gruppe; entsteht die Untergruppe U von G aus N durch Adjunktion von weniger als n Elementen, so ist U eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Wegen III und IV ist dann jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N NOETHERsch und fast-auflösbar; und wegen III und $1 < n$ ist jede N enthaltende Untergruppe U mit zyklischer Faktorgruppe U/N lokal-NOETHERsch. Anwendung von § 3, Satz 4 ergibt dann, daß G lokal-NOETHERsch ist. Sei nun U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Dann ist $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe G/N eine Σ-Gruppe. Weiter sei V eine Untergruppe von U, die aus $U \cap N$ durch Adjunktion von weniger als n Elementen entsteht. Dann entsteht NV aus N ebenfalls durch Adjunktion von weniger als n Elementen, so daß also NV eine $L(\Sigma)$-Untergruppe von G ist. Da U eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G ist, so ist die Untergruppe V von U endlich erzeugbar. Als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe NV ist V eine Σ-Gruppe. Da schließlich Σ der Forderung E.n genügt, so folgt, daß U eine Σ-Gruppe ist; und damit ist gezeigt, daß G eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, womit die Gültigkeit von E.n dargetan ist.

Bemerkung. Die Eigenschaft, NOETHERsch und fast-auflösbar zu sein, genügt dem Erweiterungspostulat E.1 [§ 3, Folgerung 2] und also auch E.2. Aus Satz 2 folgt also, daß die Eigenschaft:

„Alle endlich erzeugbaren Untergruppen sind NOETHERsch und fast-auflösbar" ebenfalls dem Erweiterungspostulat E.2 genügt. Daß E.1 von dieser Eigenschaft nicht erfüllt wird, kann durch viele naheliegende Beispiele belegt werden.

Wir wollen schließlich untersuchen, wie sich die gruppentheoretischen Teilerbeziehungen, die von Σ abgeleitet werden, zu denen verhalten, die von $L(\Sigma)$ abgeleitet werden. Es sei an die benötigten Definitionen und Haupteigenschaften erinnert; s. § 1. Wenn Θ eine gruppentheoretische Eigenschaft ist, so besagt $X\Theta^*Y$, daß X ein Normalteiler von Y ist, und daß jede X enthaltende Untergruppe U von Y mit Θ-Faktorgruppe U/X eine Θ-Gruppe ist; und $X\Theta Y$ besagt, daß X ein Normalteiler von Y ist, und daß XS eine Θ-Gruppe ist, wenn nur S eine Θ-Untergruppe von Y ist. Sind homomorphe Bilder von Θ-Gruppen wieder Θ-Gruppen, so folgt aus $X\Theta^*Y$ stets $X\Theta Y$. Wegen § 1, Satz 6 sind wir besonders an der Äquivalenz der Beziehungen $X\Theta Y$ und $X\Theta^*Y$ interessiert; vgl. auch § 3, Satz 5.

Satz 3. *Es sei N ein Normalteiler der Gruppe G.*

(a) *Dann und nur dann gilt $NL(\Sigma)^*G$, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe U von G mit Σ-Faktorgruppe $U/(N\cap U)$ eine Σ-Gruppe ist.*

(b) *Ist jede zyklische Untergruppe von G eine Σ-Gruppe, so gilt dann und nur dann $NL(\Sigma)G$, wenn $\{N, x\}$ lokal-NOETHERsch für jedes x in G ist, und wenn weiter WV für jede endlich erzeugbare Untergruppe W von N und für jede Σ-Untergruppe V des Normalisators von W eine Σ-Gruppe ist.*

(c) *Ist n eine positive ganze Zahl, so gilt dann und nur dann $NL(\Sigma)_nG$, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe U von G, die aus $U\cap N$ durch Adjunktion von weniger als n Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist.*

Bemerkung. Beim Beweis von (a) und (c) wird von den Postulaten III und IV kein Gebrauch gemacht.

Beweis. Ist zunächst $NL(\Sigma)^*G$ und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$, so ist auch NU/N eine Σ-Untergruppe von G/N. Da aber wegen I jede Σ-Gruppe eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so ist NU/N eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Aus $NL(\Sigma)^*G$ folgt, daß NU eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist; und die endlich erzeugbare Untergruppe U der $L(\Sigma)$-Gruppe NU ist also eine Σ-Gruppe.

Sei umgekehrt jede endlich erzeugbare Untergruppe U mit Σ-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$ eine Σ-Gruppe. Ist dann S eine N enthaltende Untergruppe von G mit $L(\Sigma)$-Faktorgruppe S/N und T eine endlich erzeugbare Untergruppe von S, so ist NT/N als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe S/N eine Σ-Gruppe. Die isomorphe Gruppe $T/(T\cap N)$ ist also ebenfalls eine Σ-Gruppe; und aus unserer Annahme folgt, daß T selbst eine Σ-Gruppe ist. Folglich ist S eine $L(\Sigma)$-Gruppe, womit die Gültigkeit von $NL(\Sigma)^*G$ dargetan ist. Damit ist (a) bewiesen.

Während des Beweises von (b) machen wir die zusätzliche Annahme, daß zyklische Untergruppen von G stets Σ-Gruppen sind. Gilt dann $NL(\Sigma)G$, so ist $\{N, x\} = N\{x\}$ für jedes x aus G das Produkt von N mit einer $L(\Sigma)$-Gruppe, da ja zyklische Untergruppen als Σ-Gruppen auch $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Daraus folgt aber, daß jedes $\{N, x\}$ eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist. Da endlich erzeugbare Untergruppen von $L(\Sigma)$-Gruppen die Eigenschaft Σ haben, und da Σ-Gruppen wegen III NOETHERsch sind, so ist jedes $\{N, x\}$ lokal-NOETHERsch. Ist weiter W eine endlich erzeugbare Untergruppe von N und V eine Σ-Untergruppe des Normalisators von W, so ist V wegen III NOETHERsch, so daß also das Produkt WV eine endlich erzeugbare Untergruppe von G ist. Als Σ-Gruppe ist aber V auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe und NV ist folglich ebenfalls eine $L(\Sigma)$-Gruppe [da ja $NL(\Sigma)G$ gilt]. Dann ist aber die endlich erzeugbare Untergruppe WV von NV eine Σ-Gruppe, womit die Notwendigkeit unserer Bedingungen dargetan ist.

Wir nehmen umgekehrt an, daß der Normalteiler N von G den Bedingungen von (b) genüge. Wir betrachten eine $L(\Sigma)$-Untergruppe T von G. Dann ist $NT/N \simeq T/(N \cap T)$ als homomorphes Bild von T eine $L(\Sigma)$-Gruppe, so daß also jede endlich erzeugbare Untergruppe von NT/N eine Σ-Gruppe und wegen III und IV NOETHERsch und fast-auflösbar ist. Da weiter jedes $\{N, x\}$ mit x in $NT \leq G$ lokal-NOETHERsch ist, so ist NT wegen § 3, Satz 4 lokal-NOETHERsch. Ist weiter U eine endlich erzeugbare Untergruppe von NT, so existieren endliche Teilmengen E von N und F von T derart, daß $U \leq \{E, F\} = V$ ist. Da $E \leq V \cap N$ ist, so ist $V = (V \cap N)\{F\}$. Als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe T ist $\{F\}$ eine Σ-Gruppe, die natürlich im Normalisator des Normalteilers $V \cap N$ von V enthalten ist. Da V eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe NT ist, so ist V NOETHERsch und also $V \cap N$ endlich erzeugbar. Aus unserer Bedingung folgt dann, daß $(V \cap N)\{F\} = V$ eine Σ-Gruppe ist. Die Untergruppe U von V ist also auch eine Σ-Gruppe; und NT ist mithin eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Folglich gilt $NL(\Sigma)G$, womit der Beweis von (b) erbracht ist.

Den einfachen Beweis von (c) übergehen wir.

Folgerung 2. *Sind alle zyklischen Gruppen Σ-Gruppen, so folgt dann und nur dann aus $XL(\Sigma)Y$ stets $XL(\Sigma)^*Y$, wenn aus $U\Sigma V$ stets $U\Sigma^*V$ folgt.*

Wegen § 1, Satz 3 kann man also auch sagen, daß die $L(\Sigma)$-Teilerbeziehung dann und nur dann mit der $L(\Sigma)^*$-Teilerbeziehung äquivalent ist, wenn die Σ-Teilerbeziehung mit der Σ^*-Teilerbeziehung äquivalent ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß aus $XL(\Sigma)Y$ stets $XL(\Sigma)^*Y$ folge; und betrachten einen $N\Sigma G$ erfüllenden Normalteiler N der Gruppe G. Dann ist N insbesondere eine Σ-Gruppe. Weiter sei U eine N enthaltende Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe U/N. Wegen III sind die beiden Σ-Gruppen N und U/N NOETHERsch; und also ist auch U NOETHERsch. Aus $N\Sigma G$ folgt natürlich auch $N\Sigma U$; und hieraus erschließen wir $NL(\Sigma)U$, da ja U NOETHERsch ist. Dann ist aber auch $NL(\Sigma)^*U$. Da U/N als Σ-Gruppe eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so ist U eine NOETHERsche $L(\Sigma)$-Gruppe und

als solche ist U sogar eine Σ-Gruppe. Damit ist gezeigt, daß $N\Sigma^*G$ gilt, wenn nur $N\Sigma G$ gilt.

Umgekehrt folge aus $X\Sigma V$ stets $X\Sigma^* V$; und weiter sei N ein $NL(\Sigma)G$ erfüllender Normalteiler der Gruppe G. Ist x ein Element aus G, so ist $\{x\}$ eine Σ-Gruppe. Da Σ-Gruppen auch $L(\Sigma)$-Gruppen sind, so ist $\{N, x\}$ das Produkt des $L(\Sigma)$-Teilers N von G mit der $L(\Sigma)$-Untergruppe $\{x\}$ von G, so daß also $\{N, x\}$ eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist. Wegen III sind aber $L(\Sigma)$-Gruppen lokal-NOETHERsch, so daß also $\{N, x\}$ für jedes x in G lokal-NOETHERsch ist. Ist weiter U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$, so ist auch die isomorphe Gruppe NU/N eine Σ-Gruppe. Da Σ-Gruppen NOETHERsch und fast-auflösbar sind, und da alle $\{N, x\}$ mit x in NU lokal-NOETHERsch sind, so ist NU wegen § 3, Satz 4 lokal-NOETHERsch und die endlich erzeugbare Untergruppe U von NU ist also NOETHERsch. Ist V eine Σ-Untergruppe von U, so liegt V in dem Normalisator der endlich erzeugbaren Untergruppe $N\cap U$ von N [und der NOETHERschen Gruppe U]. Aus $NL(\Sigma)G$ und Satz 3, (b) folgt dann, daß $(N\cap U)V$ eine Σ-Gruppe ist; und damit ist $(N\cap U)\Sigma U$ gezeigt. Daraus folgt aber nach Voraussetzung auch $(N\cap U)\Sigma^* U$; und da $U/(U\cap N)$ eine Σ-Gruppe ist, so muß auch U eine Σ-Gruppe sein. Die Bedingungen von Satz 3, (a) sind also erfüllt. Folglich ist $NL(\Sigma)^*G$ eine Folge von $NL(\Sigma)G$, q.e.d.

Literatur

[1] BAER, REINHOLD: Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [2] BAER, REINHOLD: Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955). — [3] BAER, REINHOLD: Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—437 (1955). — [4] BAER, REINHOLD: NOETHERsche Gruppen. Math. Z. **66**, 269—288 (1956).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois (USA)

(Eingegangen am 30. Juni 1956)

SCHUBART, H., u. H. WITTICH
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 364—370 (1957)

Über die Lösungen der beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen

Von

HANS SCHUBART und HANS WITTICH

Alle Lösungen der beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen

$$(P_1) \qquad w'' = 6w^2 + a(z), \quad a(z) = A_0 z + A,$$

$$(P_2) \qquad w'' = 2w^3 + b(z)\,w + C, \quad b(z) = B_0 z + B$$

sind in $|z| < \infty$ eindeutige analytische Funktionen[1]). Da sowohl in (P_1) als auch in (P_2) nur ein Glied mit maximaler Dimension vorkommt, hat jede nichtrationale Lösung unendlich viele Polstellen[2]). Die Polstellenentwicklung lautet

$$w(z) = \frac{1}{(z-p)^2} + \cdots \qquad \text{für } (P_1)$$

und

$$w(z) = \frac{A_{-1}}{z-p} + \cdots, \quad A_{-1}^2 = 1 \qquad \text{für } (P_2).$$

Für $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ erhält man die Differentialgleichungen

$$(P_1') \qquad w'' = 6w^2 + A,$$

$$(P_2') \qquad w'' = 2w^3 + Bw + C,$$

die sich mit Hilfe elliptischer Funktionen und ihrer Ausartungen integrieren lassen. Dies wird jedoch im folgenden nicht benötigt.

1. Jede nichtkonstante Lösung von (P_1') bzw. (P_2') genügt der Differentialgleichung

$$(1_1') \quad w'^2(z) = 4w^3(z) + 2A\,w(z) + w'^2(z_0) - 4w^3(z_0) - 2A\,w(z_0)$$

bzw.

$$(1_2') \quad w'^2(z) = w^4(z) + B\,w^2(z) + 2C\,w(z) + w'^2(z_0) - w^4(z_0) - B\,w^2(z_0) - 2C\,w(z_0).$$

Daraus folgt mit Hilfe der geometrischen Deutung der Charakteristik $T(r, w)$, daß jede Lösung der Differentialgleichungen (P_i') von endlicher Ordnung ist. Damit ergibt sich für die Schmiegungsfunktion $m(r, w)$ einer beliebigen Lösung $w(z)$ von (P_1') oder (P_2')

$$m(r, w) = O(\log r)\ ^3),$$

[1]) Siehe etwa INCE: Ordinary Differential Equations. Doover 1926.

[2]) WITTICH, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, S. 13 u. f. u. S. 65. Berlin 1955.

[3]) Die Bezeichnungsweise folgt R. NEVANLINNAS Lehrbuch, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953.

gültig für alle r. Beide Differentialgleichungen besitzen Lösungen, für die mindestens ein endlicher Wert c vollständig verzweigt ist, und zwar in dem Sinne, daß jede Wurzel der Gleichung $w(z)-c=0$ mehrfache Wurzel ist. Der Beweis ergibt sich aus $(1_1')$ so:

Eine Lösung $w=w(z)$, $w(z_0)=0$, $w'(z_0)=\tau$, von (P_1') genügt der Differentialgleichung

$$w'^2=4w^3+2Aw+\tau^2=P(w).$$

Nun läßt sich τ auf unendlich viele Arten so wählen, daß $P(w)$ mindestens eine einfache Nullstelle $w=c$ hat, also

$$(1_1')\quad \begin{cases} w'^2=4(w-c)\cdot Q(w) \\ \quad =4\left(Q(c)\,(w-c)+Q'(c)\,(w-c)^2+\dfrac{Q''(c)}{2!}\,(w-c)^3\right), \quad Q(c)\neq 0, \end{cases}$$

gilt. Aus

$$\frac{1}{4}\left(\frac{w'}{w-c}\right)^2=\frac{Q(c)}{w-c}+Q'(c)+\frac{Q''(c)}{2}\,(w-c)$$

folgt

$$m\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=O(\log r),$$

d.h. der Wert c wird unendlich oft angenommen, wobei wegen des ersten Hauptsatzes die Beziehung

$$N\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=N(r,w)+O(\log r)$$

besteht. Ist z_j eine beliebige c-Stelle, so folgt aus (P_1') $w'(z_j)=0$, $w''(z_j)\neq 0$. Danach erhält man

$$N_1\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=\frac{1}{2}\,N\left(r,\frac{1}{w-c}\right)$$

also

$$\vartheta(c)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_1(r,c)}{T(r,w)}=\frac{1}{2}\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,c)}{N(r,c)+O(\log r)}=\frac{1}{2}.$$

c ist vollständig verzweigter Wert mit dem Verzweigungsindex $\vartheta(c)=\frac{1}{2}$. Jede Lösung $w(z)$, $w(z_0)=0$, $w'(z_0)=\tau$, von (P_2') löst die Differentialgleichung

$$w'^2(z)=w^4+Bw^2+2Cw+\tau^2=P(w).$$

Durch passende Wahl von τ kann man

$$(1_2')\qquad w'^2(z)=(w-c)\cdot Q(w), \qquad Q(c)\neq 0,$$

erreichen. Daraus folgt, genau wie eben, die Behauptung, wobei auch $\vartheta(c)=\frac{1}{2}$ gilt. Daß man durch passende Wahl von τ Lösungen von (P_0') bzw. (P_2') mit drei bzw. vier endlichen verzweigten Werten bekommt, soll nur angemerkt werden. Die Existenz von Lösungen mit mindestens einem vollständig verzweigten endlichen Wert ist charakteristisch für die Differentialgleichungen (P_1') und (P_2'). Es gilt nämlich der

Satz: *Die Differentialgleichungen (P_1) und (P_2) haben dann und nur dann Lösungen mit mindestens einem endlichen vollständig verzweigten Wert c, wenn die Koeffizienten A_0 und B_0 gleich Null sind.*

Ist c vollständig verzweigter Wert einer meromorphen Funktion $w(z)$, dann ist c entweder PICARDscher Ausnahmewert oder jede Wurzel von $w(z)-c=0$ ist mindestens Doppelwurzel. Im zweiten Falle folgt aus $n(r,c) \geq 2\bar{n}(r,c)$ und $\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,c)}{T(r,w)} \leq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(r,c)}{T(r,w)} \leq \frac{1}{2}$ für die Verzweigtheit $\Theta(c)$ der Stellensorte c

$$\Theta(c) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\bar{N}(r,c)}{T(r,w)} \geq \frac{1}{2}.$$

Im Falle eines PICARDschen Ausnahmewertes ist $\Theta(c)=1$. Nach den obigen Bemerkungen ist der Satz vollständig bewiesen, wenn gezeigt wird, daß für $A_0 \not\equiv 0$, $B_0 \not\equiv 0$ und beliebiges endliches c stets $\Theta(c) < \frac{1}{2}$ gilt[4]).

2. Aus (P_1) und (P_2) folgt für jede Lösung $w(z)$ die Beziehung

$$m(r,w) = O\left(\log r \cdot T(r,w)\right)$$

für alle r außerhalb einer Menge von endlichem logarithmischem Maß. Nach P. BOUTROUX gilt mit endlichem K

$$N(r,w) < r^K.$$

Daraus schließt man, da $T(r,w)$ konvex in $\log r$ ist, daß jede Lösung $w(z)$ von endlicher Ordnung ist, was

$$m(r,w) = O(\log r)$$

und nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r,w) = N(r,w) + O(\log r)$$

bedingt. Weiter folgt aus (P_1)

$$m\left(r, \frac{1}{w-c}\right) = O(\log r). \tag{2}$$

Dabei ist c beliebig und $w(z)$ eine beliebige Lösung von (P_1). Aus

$$w'' = 2(w^3 - c^3) + b(z)(w-c) + D(z), \qquad D(z) = 2c^3 + b(z)\,c + C$$

ergibt sich für $C \not\equiv 0$, d.h. $D(z) \not\equiv 0$, die Behauptung (2). Sie folgt auch noch auf die gleiche Art, wenn $C=0$ und $c \not\equiv 0$ ist. Mithin verbleibt nur noch der Fall $C=0$, $c=0$[4]) [5]). Jede Lösung $w(z)$ der Differentialgleichung $w'' = 2w^3 + b(z)w$ kann nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen den Wert Null höchstens einfach annehmen. $w(z)$ genügt auch der Differentialgleichung

$$w'^2 = w^4 + b(z)\,w^2 - F(z), \qquad F'(z) = b'(z)\,w^2. \tag{3}$$

[4]) Man vgl. hierzu SCHUBART, H.: Zur Wertverteilung der PAINLEVEschen Transzendenten. Arch. Math. **7** (1956).

[5]) WITTICH, H.: Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w'' = P(z,w)$. Math. Ann. **1953**.

Mit $w(z)$ ist auch die in $|z|<\infty$ meromorphe Funktion $F(z)$ von endlicher Ordnung. Aus (3) folgt $m\left(r, \frac{F}{F'}\right) = O(\log r)$. Das ergibt zusammen mit $m\left(r, \frac{F'}{F}\right) = O(\log r)$

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) = m\left(r, \frac{1}{F'}\right) + O(\log r) = 2m\left(r, \frac{1}{w}\right) + O(\log r). \tag{3'}$$

Weiter erhält man aus (3) $m(r, F) = O(\log r)$, also nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r, F) = T(r, w) + O(\log r), \tag{3''}$$

da $N(r, F) = N(r, w)$ gilt. Aus (3') und (3'') folgt

$$2\delta(0, w) = \delta(0, F) \leq 1.$$

Jede transzendente Lösung $w(z)$ von $w'' = 2w^3 + b(z)w$ hat also unendlich viele Nullstellen, die alle einfach sind.

Falls die Bedingung $A_0 \neq 0$ oder $B_0 \neq 0$ nicht erfüllt ist, können PICARDsche Ausnahmewerte auftreten. Ist z. B. (P_1') von der Form

$$w'' = 6w^2 - 6c^2, \quad c \neq 0,$$

dann genügt die durch $w(0) = 0$, $w'(0) = 8c^3$ bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$w'^2 = 4w^3 - 12c^2w + 8c^3 = 4(w - c)^2(w + 2c).$$

Daraus erkennt man nach dem Eindeutigkeitssatz, daß c PICARDscher Ausnahmewert ist.

3. Da im Falle $C = 0$ der Wert $c = 0$ nicht vollständig verzweigt sein kann, ist für alle anderen zu betrachtenden Fälle die Beziehung (2) erfüllt. Aus (2) folgt

$$\Theta(c) = \lim_{r\to\infty} \frac{m(r, c) + N_1(r, c)}{T(r, w)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r, c) + O(\log r)}{T(r, w)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r, c)}{T(r, w)} = \vartheta(c),$$

so daß der Satz bewiesen ist, wenn $\vartheta(c) < \frac{1}{2}$ gezeigt wird.

Zunächst soll die für (P_1) und alle Werte $c \neq \infty$ bekannte Ungleichung[6]) $\vartheta(c) \leq \frac{1}{4}$ noch etwas verbessert werden. Aus (P_1) folgt, wenn für unendlich viele Werte $z_0, z_1, \ldots, w(z_\nu) = c$, $w'(z_\nu) = 0$ gelten würde, daß höchstens von einem z_ν abgesehen, $w''(z_\nu) \neq 0$ sein muß[7]). Integriert man nun (P_1) längs solcher Wege, die die Pole von w vermeiden, so ergibt sich

$$w'^2 = 2a(z)w - 2a(z_0)c - 2\int_{z_0}^{z} a'(\zeta)\, w(\zeta)\, d\zeta + 4w^3 - 4c^3. \tag{4}$$

Mit $F(z) = \int_{z_0}^{z} a'(\zeta)\,(w(\zeta) - c)\, d\zeta$ gilt dann

$$F(z_\nu) = F'(z_\nu) = F''(z_\nu) = 0, \quad F'''(z_\nu) \neq 0.$$

---

[6]) WITTICH, H.: Siehe Fußnote 2, S. 81.

[7]) Siehe Fußnote 4.

Da $F(z)$ in $|z|<\infty$ eindeutig analytisch ist, gilt $m\left(r, \frac{1}{F}\right)=O(\log r)$, $T(r, w)=2T(r, F)+O(\log r)$ und $N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)=2N_1\left(r, \frac{1}{w}\right)$.

Damit ist einmal $\vartheta(c, w)=\frac{1}{4}\vartheta(0, F)$, zum anderen wegen $N\left(r, \frac{1}{F}\right)\leq 3\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)$ $\Theta(0, F)\leq\frac{2}{3}$, woraus also

$$\vartheta(c, w)\leq\tfrac{1}{8} \tag{5}$$

für alle Lösungen von (P_1) folgt.

Es liegt die Vermutung nahe, daß (P_1) keine Lösungen mit positivem Verzweigungsindex für endliches c besitzt.

Ein ähnliches Verfahren kann bei der Behandlung von (P_2) angewandt werden:

$w=w(z)$ sei eine Lösung von (P_2), die unendlich viele mehrfache c-Stellen $z_0, z_1, \ldots, \neq\infty$, hat. Wegen $w''(z_j)=2c^3+b(z_j)c+C$ gilt, von höchstens einer Stelle abgesehen, $w''(z_j)\neq 0$ [im Falle $C=0$ hat die Gleichung $w(z)=0$ nur einfache Wurzeln]. Man darf also annehmen, daß die Stellen $z_0, z_1, \ldots$ doppelte c-Stellen sind. Durch Integration von (P_2) folgt[8])

$$w'^2=w^4-c^4+b(z)(w^2-c^2)+2C(w-c)-F(z) \tag{6}$$

mit $F(z)=\int_{z_0}^{z} b'(\zeta)(w^2-a^2)\,d\zeta$. Da $b'(z)\cdot(w^2(z)-a)$ nur Doppelpole besitzt, ist $F(z)$ in $|z|<\infty$ eindeutig analytisch. Nach (6) gilt $m(r, F)=O(\log r)$. Daraus ergibt sich zusammen mit $N(r, w)=N(r, F)$ nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r, F)=T(r, w)+O(\log r).$$

Wegen $F(z_\nu)=0$, $F'(z_\nu)=0$, $F'''(z_\nu)\neq 0$ ist

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)\geq N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right).$$

Nun erhält man weiter

$$\frac{N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}=\frac{N\left(r, \frac{1}{F}\right)-\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}\leq 1-\frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}\leq 1-\frac{N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right)}{T(r, w)+O(\log r)},$$

also

$$\vartheta(0, F)\leq 1-\vartheta(c, w). \tag{7}$$

Die doppelten c-Stellen $z_0, z_1, \ldots$ sind dreifache Nullstellen von $F(z)$, so daß

$$N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)\geq 2N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right).$$

gilt, also auch

$$2\vartheta(c, w)\leq\vartheta(0, F). \tag{7'}$$

Aus (7) und (7') folgt

$$2\vartheta(c, w)\leq\vartheta(0, F)\leq 1-\vartheta(c, w),$$

[8]) Dabei vermeidet der Integrationsweg wieder die Polstellen von $w(z)$.

also

$$\vartheta(c, w) \leq \tfrac{1}{3}. \tag{8}$$

Das gilt für alle c [$c = \infty$ ist unverzweigter Wert, also $\vartheta(\infty, w) = 0$] und jede nichtrationale Lösung von (P_2).

Die Differentialgleichung

$$w'' = 2w^3 + zw + C, \quad C = \pm\tfrac{1}{2}$$

besitzt Lösungen $w(z)$, für die kein Wert c einen positiven Verzweigungsindex hat. Das folgt aus der Tatsache, daß jede Lösung der RICCATIschen Differentialgleichungen

$$w' = \pm\left(\frac{z}{2} + w^2\right)$$

auch Lösung der Differentialgleichung

$$w'' = 2w^3 + zw \pm \tfrac{1}{2}$$

ist. Alle c-Stellen der Lösungen von $w' = \pm\left(\frac{z}{2} + w^2\right)$ sind, von höchstens einer Stelle abgesehen, einfach [9]). Immerhin ist aber die von $w = w(z)$ erzeugte Fläche doch so stark verzweigt (über unendlich vielen Grundpunkten), daß der Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit im Endlichen $\Phi_e = \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)}$ seinen maximalen Wert 2 erreicht.

Es gilt nämlich allgemein für jede transzendente Lösung von (P_2) $\Phi_e = 2$, falls $C \neq 0$ ist. Aus

$$\frac{w'''}{w'} = 6w^2 + b'(z) \cdot \frac{w}{w'} + b(z)$$

ergibt sich zunächst $m\left(r, \frac{w}{w'}\right) = O(\log r)$ und daraus $m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m\left(r, \frac{w}{w'} \cdot \frac{1}{w}\right) = O(\log r)$ wegen $m\left(r, \frac{1}{w}\right) = O(\log r)$. Nun ist

$$T(r, w') = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + O(\log r) = 2\,T(r, w) + O(\log r),$$

also

$$\Phi_e = \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)} = 2.$$

Die Lösungen von (P_1) genügen der Relation

$$\Phi_e + \vartheta(\infty) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 2.$$

4. Aus den letzten Beziehungen folgt, daß der zweite Hauptsatz für die Lösungen von (P_1) und (P_2) in eine asymptotische Gleichheit

$$N_1(r) + \sum_{j=1}^{q} m(r, c_j) = 2\,T(r, w) + O(\log r) \tag{9}$$

[9]) Siehe Fußnote 2, S. 73 u. f.

übergeht, gültig für alle r. Es ist zunächst $N_1(r) = N(r, 1/w') + 2N(r, w) - N(r, w')$, also

$$N_1(r) = \tfrac{3}{2} T(r, w) + \tfrac{1}{2} N(r, w) + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r) \quad \text{für } (P_1)$$

und

$$N_1(r) = 2T(r, w) + O(\log r) \text{ bzw. } N_1(r) + m\left(r, \frac{1}{w}\right) = 2T(r, w) + O(\log r) \text{ für } (P_2).$$

Daraus folgt die Behauptung (9), da außer für $C = 0$, $c = 0$ $m(r, c) = O(\log r)$ gilt.

Die transzendenten Lösungen von (P_1) und (P_2) genügen den Differentialgleichungen

$$w'^2 = P_3(w) \quad \text{und} \quad w'^2 = P_4(w),$$

wo je nach Wahl der Anfangsbedingungen gelten kann[10])

$$(10_1) \quad P_3(w) = 4(w - c_1)(w - c_2)(w - c_3)$$
$$(10_2) \quad P_3(w) = 4(w - c)^2(w - 2c)$$
$$(11_1) \quad P_4(w) = (w - c_1) \dots (w - c_4)$$
$$(11_2) \quad P_4(w) = (w - c)^2(w - c_3)(w - c_4)$$
$$(11_3) \quad P_4(w) = (w - c)^2(w - c')^2.$$

Damit findet man

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = O(\log r) \quad \text{für } (10_1) \text{ und } (11_1),$$

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m(r, c) + O(\log r) = T(r, w) + O(\log r) \quad \text{für } (10_2) \text{ und } (11_2),$$

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m(r, c) + m(r, c') + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r) \quad \text{für } (11_3).$$

Somit ergibt sich jeweils

$$N_1(r) = 2T(r, w) + O(\log r),$$
$$N_1(r) + m(r, c) = 2T(r, w) + O(\log r),$$
$$N_1(r) + m(r, c) + m(r, c') = 2T(r, w) + O(\log r),$$

also für jede transzendente Lösung der beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen die asymptotische Gleichheit (9). Ohne Rechnung folgt die Gültigkeit von (9), soweit es sich um Lösungen von (P_1') und (P_2') handelt, aus allgemeineren Sätzen über die Umkehrung des zweiten Hauptsatzes[11]).

[10]) Siehe Fußnote 2, S. 80 u. f.
[11]) Siehe Fußnote 2, S. 53 u. f.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 30. Juni 1956)

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 371—388 (1957)

Über die Anwendung der LAPLACE-Transformation auf Randwertprobleme

Von
GÜNTER HELLWIG

Einleitung

Wir betrachten eine lineare *parabolische* Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen x, t mit $l \leq x \leq m$, $0 \leq t < \infty$, deren Koeffizienten, abgesehen vom inhomogenen Glied, nur von x abhängig sind. Eine solche Gleichung darf in der Gestalt

$$(1) \qquad \bar{D}u \equiv \bar{A}u + b(x)\,u_t = f(x,t) \quad \text{mit} \quad \bar{A}u \equiv -\left(p(x)\,u_x\right)_x + q(x)\,u$$

angenommen werden. Dabei sei $p(x) > 0$, $b(x) > 0$ in $l \leq x \leq m$. Die Lösung $u(x,t)$ von (1) soll noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. In den Anwendungen zeichnen sich die letzteren durch ihre große Vielfachheit aus. Um in dieser Hinsicht allen Anforderungen gerecht zu werden, betrachten wir mit (1) das

$$\textit{Problem I:} \quad \bar{D}u = f(x,t), \quad \lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0(x),$$

$$\bar{R}_i u \equiv a_{i1}\,u(l,t) + a_{i2}\,u_x(l,t) + a_{i3}\,u_t(l,t) + b_{i1}\,u(m,t) + b_{i2}\,u_x(m,t) + b_{i3}\,u_t(m,t) = f_i(t),$$

$i = 1, 2$. Dabei sind $u_0(x), f_i(t)$ willkürlich vorzuschreibende Funktionen, $a_{i1}, \ldots, b_{i3}$ sind Konstante. Zwischen u_0 und f_i bestehen keinerlei *Verträglichkeitsbedingungen*[1]), wie überhaupt bei solchen allgemeinen Randbedingungen Verträglichkeitsbedingungen nicht mehr sinngemäß formuliert werden können. Das Erfülltsein der Differentialgleichung wird dabei in $l < x < m$, $0 < t < \infty$, die Annahme der Anfangswerte für $l < x < m$ und das Bestehen der Randbedingungen für $t > 0$ gefordert. Dabei muß natürlich noch präzisiert werden, was etwa $u_t(l,t)$ zu bedeuten hat. Wir sind daran interessiert, daß zeitliche Ableitungen in den Randbedingungen tatsächlich auftreten, da dadurch neue Schwierigkeiten entstehen und machen die Voraussetzung

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{13}, & b_{13} \\ a_{23}, & b_{23} \end{vmatrix} \neq 0,$$

von der man sich aber weitestgehend wieder befreien kann.

[1]) Wird etwa der Spezialfall $R_1 u = u(l,t) = f_1(t)$ betrachtet, so braucht *nicht* $f_1(0) = u_0(0)$ zu sein.

In der vorliegenden Arbeit soll ein Existenzsatz für das Problem I gegeben werden, der so beschaffen ist, daß die Lösung $u(x,t)$ sich vollständig mit Hilfe der LAPLACE-Transformation bestimmen läßt, insbesondere also eine Darstellung durch das komplexe Umkehrintegral zuläßt.

Betrachtet man die Transformation $\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt = v(x,s)$, wobei $s=\xi+i\eta$ ein komplexer Parameter ist, so sagt man, daß v durch Anwendung des LAPLACEschen Operators $L \equiv \int_0^\infty e^{-st}\{\}\,dt$ aus u entstanden ist und schreibt $v = Lu$. Man hat die formalen Rechenregeln

$$Lu_t = sv - \lim_{t\to 0} u(x,t), \tag{3}$$

$$u = L^{-1}v \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{st}v(x,s)\,ds. \tag{4}$$

Durch formale Anwendung des L-Operators auf das Problem I ergibt sich mit den Festsetzungen $Lf = g$, $Lf_i = g_i$ das

Problem II:
$$Dv \equiv Av + s\,b(x)\,v = g(x,s) + b(x)\,u_0(x),$$
$$R_i v \equiv (a_{i1} + s\,a_{i3})\,v(l,s) + a_{i2}v'(l,s) + (b_{i1} + s\,b_{i3})\,v(m,s) + b_{i2}v'(m,s) = h_i(s)$$

mit $Av \equiv -(pv')' + qv$, $h_i(s) = g_i(s) + a_{i3}u_0(l) + b_{i3}u_0(m)$ und $' \equiv \frac{d}{dx}$.

Ist v die Lösung von II, so soll durch (4) die Lösung von I gegeben werden. Dazu wird man I und II in Teilprobleme zerlegen:

$$\mathrm{I}_1\colon \begin{cases} \overline{D}u = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x), \\ \overline{R}_i u = 0 \end{cases} \quad \mathrm{I}_2\colon \begin{cases} \overline{D}u = 0 \ \text{[2]} \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = 0, \\ \overline{R}_i u = f_i \end{cases} \quad \mathrm{I}_3\colon \begin{cases} \overline{D}\,u = f(x,t) \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = 0; \\ \overline{R}_i u = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{II}_1\colon \begin{cases} Dv = b(x)\,u_0(x) \\ R_i v = 0 \end{cases} \quad \mathrm{II}_2\colon \begin{cases} Dv = 0 \\ R_i v = h_i, \end{cases} \quad \mathrm{II}_3\colon \begin{cases} Dv = g(x,s) \\ R_i v = 0. \end{cases}$$

Die Summe der Lösungen der Teilprobleme ergibt jeweils die Lösung von I bzw. II. Man beachte jedoch, daß wohl II aus I aber nicht II_i aus I_i durch formale Anwendung des L-Operators entstanden ist. Dies ist nur für $a_{i3}u_0(l) + b_{i3}u_0(m) = 0$ richtig. Trotzdem werden wir zeigen, daß die Lösungen $u_i(x,t)$ von I_i aus den Lösungen $v_i(x,s)$ von II_i mit Hilfe des Umkehroperators (4) gewonnen werden können: $u_i = L^{-1}v_i$. Die störenden Zusatzterme beziehen sich nämlich lediglich auf die Punkte $(l,0)$, $(m,0)$ der x,t-Ebene, in denen wir die Lösung $u(x,t)$ bei unserer allgemeinen Problemstellung ohnehin nicht untersuchen werden.

[2] I_2 sind die sog. Ausgleichsprobleme.

Jedes Teilproblem ist von einem anderen Schwierigkeitsgrad. Während man bei I_2, I_3 durch entsprechende Voraussetzungen über $f(x,t)$, $f_i(t)$ im transformierten Bereich (II_2, II_3) stets solche günstigen Verhältnisse herstellen kann, daß eben die Beziehung $u_i = L^{-1}v_i$, $i=2,3$ leicht beweisbar wird, hat man solche Hilfsmittel für das Problem I_1 nicht. Dieses muß vielmehr als das zentrale Problem angesehen werden, an dem es die Leistungsfähigkeit der LAPLACE-Transformation zu erproben gilt. Wir werden daher uns ganz auf dieses Problem konzentrieren und in einer späteren Note in knapper Form über die Probleme I_2 und I_3 berichten.

Es sei $G(x,y,s)$ die GREENsche Resolvente, dann erscheint die Lösung von II_1 in der Gestalt

$$v_1(x,s) = \int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy. \tag{5}$$

Wir beweisen den

Satz. *Sei $p''(x), b'(x), q(x)$ in $l \leq x \leq m$ stetig und von beschränkter Schwankung mit $p>0$, $b>0$; ferner sei $u_0'''(x)$ dort stetig. Dann ist*

$$u(x,t) = \begin{cases} L^{-1}v_1 \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.}\displaystyle\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{st}\left(\int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy\right) ds \text{ [3]} \\ \quad = \displaystyle\lim_{\beta\to\infty} \sum_{|s_\nu|<\beta} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t) \end{cases} \tag{6}$$

bei passendem $\xi_1 > 0$ die Lösung von I_1. $e^{s_\nu t}R_\nu(x,t)$ ist dabei das Residuum von $e^{st}\int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy$ für den Pol $s=s_\nu$ von G.

(a) *Es sind u, u_x, u_t, u_{xx} in $l<x<m$, $0<t<\infty$ stetig und u erfüllt dort $\overline{D}u=0$.*

(b) *u, u_x ist sogar in $l<x<m$, $0\leq t<\infty$ stetig, und es gilt dort*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x).$$

(c) *u, u_x sind in $l\leq x\leq m$, $0<t<\infty$ stetig.*

(d) *Definieren wir $u_t(l,t) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}\lim\limits_{x\to l} u(x,t)$, $u_t(m,t) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}\lim\limits_{x\to m} u(x,t)$, so ist $u_t(l,t)$, $u_t(m,t)$ für $t>0$ stetig und es gilt dort $R_i u = 0$.*

Unsere Betrachtungen können als eine Ausführung der COURANTschen Problemstellung ([5], S. 202–222) für den Fall der parabolischen Gleichungen angesehen werden. R. COURANT betrachtet in [5] für den parabolischen Fall zu (1) die Randbedingungen

$$\overline{R}_1 u \equiv u(l,t) = f_1(t), \quad \overline{R}_2 u \equiv b_{21}u(m,t) + b_{22}u_x(m,t) + b_{23}u_t(m,t) = 0. \tag{7}$$

[3] Auf die Frage nach der Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die besonders für die praktische Anwendung von Interesse ist, wird hier nicht eingegangen.

Er fordert unter anderem, daß die Lösung $v(x, s)$[4]) des Problems II gewissen Abschätzungen genügt. Zum Beispiel:

$$(8) \qquad |v(x, s)| \leq \Phi(|\eta|) \quad \text{mit} \quad \int_0^\infty \Phi(\tau)\, d\tau < \infty, \quad s = \xi + i\eta.$$

Der Nachweis für das Bestehen solcher Ungleichungen für den Fall I_1 scheint zumindest schwierig zu sein. Sie können sehr wohl für die Ausgleichprobleme I_2 und für I_3 bestehen, wie COURANT an Beispielen nachgewiesen hat.

W. MÄCHLER [*10*] betrachtet für hyperbolische und parabolische Gleichungen die Randbedingungen

$$(9) \qquad \overline{R}_i u \equiv a_{i1} u(l, t) + a_{i2} u_x(l, t) + b_{i1} u(m, t) + b_{i2} u_x(m, t) = 0$$

und fordert, daß die Anfangsbedingungen die Randbedingungen erfüllen. Diese Forderung ist für seine Beweistechnik wesentlich. Manche Anregung fanden wir in den Betrachtungen von R. V. CHURCHILL [*2*], [*3*] und G. DOETSCH [*6*] für die Wärmeleitungsgleichung mit einfachen Randbedingungen.

In § 1 geben wir eine genaue Untersuchung des transformierten Problems II. Die dabei gewonnene asymptotische Entwicklung der GREENschen Resolvente dürfte auch von sich aus von Interesse sein. Der § 2 beschäftigt sich mit der Rücktransformation, wobei der Beweis unseres Satzes nur durch recht verschiedenartige Betrachtungen und in zahlreichen Schritten gelingt. Entscheidend für unser Verfahren erweist sich ein in § 2, Nr. 1 benutzter Kunstgriff, der erst einigermaßen erträgliche Konvergenzverhältnisse für die Rücktransformation schafft.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir den Fall $p(x) = b(x) = 1$, $l = 0$, $m = 1$ an, der stets mit Hilfe einer wohlbekannten Transformation herstellbar ist.

Völlig andere Verhältnisse liegen vor, wenn man die in unserem Satz bezüglich $p(x)$, $b(x)$ gemachten Voraussetzungen nur noch im offenen Intervall $l < x < m$ fordert. Dann kann unter anderem der Fall eintreten, daß Randbedingungen überhaupt nicht mehr gestellt werden dürfen. Man vgl. dazu W. FELLER [*13*], die Arbeit [*9*] des Verf., sowie die in Kürze erscheinende Darstellung bei G. DOETSCH [*14*].

§ 1. Die Lösung des transformierten Problems II

1. Fundamentalsystem und GREENsche *Resolvente*

Wir betrachten den Operator $Av = -v'' + q(x)v$ in dem Definitionsbereich $\mathfrak{A}$: v, v', v'' stetig in $0 \leq x \leq 1$, $R_i v = 0$. Setzen wir $A + sI = A_s$ (I der Einheitsoperator), so wird die Lösung von $A_s v = f$, $R_i v = 0$ mit stetigem

[4]) Unser v ist bei COURANT durch v/s zu ersetzen.

$j(x)$ und komplexen Parameter $s=\xi+i\eta$ durch

$$v = A_s^{-1} j \equiv \int_0^1 G(x, y, s)\, j(y)\, dy \tag{1.1}$$

gegeben, falls die GREENsche Resolvente G existiert. In diesem Falle läßt sich umgekehrt jedes $v \in \mathfrak{A}$ in der Form (1.1) schreiben, wozu lediglich $j = A_s v$ zu setzen ist. Die Lösung des Problems (II) erscheint dann in der Gestalt

$$\begin{cases} v = \int_0^1 G(x, y, s)\,\big(u_0(y) + g(y, s)\big)\, dy + \\ \qquad + \sum_{k=1}^{2} \big(g_k(s) + a_{k3}\, u_0(0) + b_{k3}\, u_0(1)\big)\, G_k(x, s). \end{cases} \tag{1.2}$$

Aus einem Fundamentalsystem v_1, v_2 von $A_s v = 0$ können G und G_k explizit aufgebaut werden. Bekanntlich ist

$$G(x, y, s) = -\frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \gamma \\ R_1 v_1, & R_1 v_2, & R_1 \gamma \\ R_2 v_1, & R_2 v_2, & R_2 \gamma \end{vmatrix}, \quad G_k(x, s) = \frac{\Delta_k(x, s)}{\Delta(s)}, \tag{1.3}$$

wobei sich G_k aus den Forderungen $A_s G_k = 0$, $R_i G_k = \delta_{i,k}$ ergibt. In (1.3) sind die Abkürzungen verwendet worden:

$$\begin{cases} \Delta(s) = \begin{vmatrix} R_1 v_1, & R_1 v_2 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1(x, s) = \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(x, s) = -\begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ R_1 v_1, & R_1 v_2 \end{vmatrix}, \\ \gamma(x, y, s) = \pm \frac{1}{\delta(y, s)} \begin{vmatrix} v_1(x, s), & v_2(x, s) \\ v_1(y, s), & v_2(y, s) \end{vmatrix} \begin{matrix} + \text{ für } x \geq y, \\ - \text{ für } x \leq y, \end{matrix} \\ \delta(x, s) = \begin{vmatrix} v_1'(x, s), & v_2'(x, s) \\ v_1(x, s), & v_2(x, s) \end{vmatrix} = \delta(0, s). \end{cases} \tag{1.4}$$

Die v_i können als ganze transzendente Funktionen gewählt werden, woraus ersichtlich ist, daß $G(x, y, s)$ in der s-Ebene eine meromorphe Funktion in s ist. G existiert bekanntlich genau für solche s-Werte, für die $\Delta(s) \neq 0$ ist.

Es ist nützlich, die weiteren Betrachtungen zunächst in einer ϱ-Ebene mit $s = \varrho^2$, $\varrho = \zeta + i\mu$ durchzuführen. Die dabei auftretende Mehrdeutigkeit bei der Umkehrung $\varrho = \sqrt{s}$ ist belanglos. Man darf sie durch die Festsetzung, daß ϱ für reelles positives s selbst reell und positiv ist, beseitigen.

Für ein Fundamentalsystem v_i von

$$A_{\varrho^2} v \equiv -v'' + q(x)\, v + \varrho^2 v = 0 \tag{1.5}$$

gilt im Bereich $\mathfrak{B}_1(|\varrho| \geq R, \zeta \geq \zeta_0$ mit ζ_0 einer festen Konstanten) der ϱ-Ebene die Darstellung ([12], [4] S. 308)

$$\begin{cases} v_k = v_k(x, \varrho^2) = e^{\varrho \varphi_k x} \left\{1 + \frac{[\varphi_k Q(x)]}{\varrho}\right\}, \\ v_k' = e^{\varrho \varphi_k x}\, \varrho\, \varphi_k \left\{1 + \frac{[\varphi_k Q(x)]}{\varrho}\right\}, \quad k = 1, 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Dabei ist $\varphi_1 = -\varphi_2 = 1$ und $Q(x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$. Unter $[\alpha]$ verstehen wir den BIRKHOFFschen Ausdruck $[\alpha] = \alpha + \frac{E}{\varrho}$, wobei E eine von ϱ, x und eventuell anderen Variablen abhängige Größe ist, die in allen Variablen für große $|\varrho|$ stetig und gleichmäßig beschränkt ist. Fernerhin werden solche E-Größen, die zwar von Formel zu Formel verschieden sein mögen, in der Bezeichnungsweise nicht unterschieden. Unser v_1 in (1.6) hat also eine Darstellung der Form

$$v_1(x, \varrho^2) = e^{\varrho x}\left\{1 + \frac{1}{\varrho}\,Q(x) + \frac{E(x,\varrho)}{\varrho^2}\right\}.$$

Die gleichen Darstellungen (1.6) mit anderen E-Größen gelten auch in $\mathfrak{B}_2$ ($|\varrho| \geq R, \zeta \leq \zeta_0$ mit ζ_0 einer festen Konstanten).

2. *Asymptotische Abschätzungen der* GREENschen *Resolvente*

Solche sind von BIRKHOFF [1] und TAMARKIN [12] für $|\varrho| \geq R$ gegeben worden. Für unseren Operator A_ϱ und den speziellen Randbedingungen $R_i v = 0$ mit $a_{i3} = b_{i3} = 0$ findet man sehr scharfe Abschätzungen bei CODDINGTON und LEVINSON [4]. Wir benötigen nicht so sehr solche Abschätzungen, als vielmehr eine sehr genaue asymptotische Entwicklung der Resolvente für unseren allgemeinen Fall und geben eine knappe Herleitung.

Mit (2) haben wir

$$A = -\begin{vmatrix} a_{13} & b_{13} \\ a_{23} & b_{23} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.7}$$

Setzt man (1.6) in $R_i v_k$ ein, so erhält man in $\mathfrak{B}_1$

$$R_i v_k = \varrho^2\left\{a_{i3} + \frac{1}{\varrho}\,[a_{i2}\varphi_k] + e^{\varrho\varphi_k}\left(b_{i3} + \frac{1}{\varrho}\,[b_{i2}\varphi_k + b_{i3}\varphi_k\,Q(1)]\right)\right\}. \tag{1.8}$$

Für (1.8) schreiben wir

$$R_i v_k = \varrho^2\left\{a_{i3} + \frac{[\varkappa]}{\varrho} + e^{\varrho\varphi_k}\left(b_{i3} + \frac{[\varkappa]}{\varrho}\right)\right\}, \tag{1.9}$$

wobei $\varkappa$ eine *jeweils* passend zu wählende Konstante ist. Wird damit die Determinante Δ aus (1.4) gebildet, so findet man in $\mathfrak{B}_1$

$$\Delta = \varrho^4 e^{\varrho}\left\{C(\varrho) + \frac{[\varkappa + \varkappa e^{-\varrho} + \varkappa e^{-2\varrho}]}{\varrho}\right\}, \quad C(\varrho) = A(1 - e^{-2\varrho}) \tag{1.10}$$

mit jeweils passenden Konstanten $\varkappa$. In $\mathfrak{B}_2$ würde man finden

$$\Delta = \varrho^4 e^{-\varrho}\left\{C^*(\varrho) + \frac{[\varkappa + \varkappa e^{\varrho} + \varkappa e^{2\varrho}]}{\varrho}\right\}, \quad C^*(\varrho) = A(e^{2\varrho} - 1). \tag{1.11}$$

Die Nullstellen von C und C^* sind $\varrho_k = k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Schließt man diese durch kleine Kreise mit Radius r aus (gelochte ϱ-Ebene), so gilt dort $|C(\varrho), |C^*(\varrho)| \geq m(r) > 0$. Man zeigt nun leicht mit dem Satz von

ROUCHÉ, daß Δ in der ϱ-Ebene ebenfalls unendlich viele Nullstellen hat, die bis auf endlich viele einfach sind und in obigen Kreisen liegen. Die endlich vielen Nullstellen liegen jedenfalls in einem festen Rechteck in der ϱ-Ebene. Daher gibt es mit $s=\varrho^2$ in der s-Ebene eine rechte Halbebene $\xi \gtrsim \xi_1$ mit $\xi_1 > 0$, die frei von Nullstellen von $\Delta(s)$ ist.

Zur Berechnung von G (1.3) beschränken wir uns zunächst wieder auf $\mathfrak{B}_1$ und multiplizieren die erste Spalte in (1.3) mit $-\frac{1}{2}\frac{v_1(x)\,v_2(y)}{\delta(y,\varrho^2)}$, die zweite mit $-\frac{1}{2}\frac{v_1(y)\,v_2(x)}{\delta(y,\varrho^2)}$ und addieren zur letzten Spalte. Mit (1.3), (1.4) erscheint G in der Gestalt

$$G = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} v_1\,, & v_2\,, & \gamma_0 \\ R_1 v_1, & R_1 v_2, & \gamma_1 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2, & \gamma_2 \end{vmatrix} = -\gamma_0 + \gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2. \tag{1.12}$$

Dabei ist gesetzt:

$$-\gamma_0(x,y,\varrho^2) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\, v_1(y)\, v_2(x) & \text{für } x \gtrsim y, \\ \frac{1}{\delta}\, v_1(x)\, v_2(y) & \text{für } x \lesssim y, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\gamma_i(y,\varrho^2) = -\frac{1}{\delta(y,\varrho^2)} \begin{Bmatrix} \left((a_{i1}+\varrho^2 a_{i3})\, v_1(0) + a_{i2} v_1'(0)\right) v_2(y) + \\ + \left((b_{i1}+\varrho^2 b_{i3})\, v_2(1) + b_{i2} v_2'(1)\right) v_1(y) \end{Bmatrix}. \tag{1.14}$$

Beachtet man, daß sich δ mit (1.4) und (1.6) in der Gestalt

$$\delta(x,\varrho^2) = \delta(0,\varrho^2) = 2\varrho\left\{1 + \frac{[0]}{\varrho}\right\} \tag{1.15}$$

ergibt, so folgt für (1.13) die Darstellung

$$-\gamma_0 = \frac{1}{2\varrho}\, e^{-\varrho|x-y|}\left\{1 + \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\varrho}\,[Q(y)-Q(x)]\right\}. \tag{1.16}$$

Für γ_i erhält man mit etwas Zwischenrechnung und (1.6)

$$\gamma_i = -\varrho\left\{\left(\frac{a_{i3}}{2} + \frac{[\varkappa(y)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho y} + \left(\frac{b_{i3}}{2} + \frac{[\varkappa(y)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho(1-y)}\right\}. \tag{1.17}$$

Dabei ist $\varkappa(y)$ eine *jeweils* passend zu wählende stetig differenzierbare Funktion von y in $0 \lesssim y \lesssim 1$. Mit leichter Zwischenrechnung findet man für G_1, G_2 mit (1.3), (1.4), (1.6) den Aufbau

$$\begin{cases} G_1(x,\varrho^2) = \frac{\varrho^2}{\Delta}\left\{\left(a_{23} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{\varrho x} - \left(a_{23} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho x} + \right. \\ \qquad \left. + \left(b_{23} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{\varrho(x-1)} - \left(b_{23} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho(x-1)}\right\}, \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} G_2(x,\varrho^2) = -\frac{\varrho^2}{\Delta}\left\{\left(a_{13} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{\varrho x} - \left(a_{13} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho x} + \right. \\ \qquad \left. + \left(b_{13} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{\varrho(x-1)} - \left(b_{13} + \frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right) e^{-\varrho(x-1)}\right\} \end{cases} \tag{1.19}$$

mit jeweils passendem, stetig differenzierbarem $\varkappa(x)$. Bei der Herstellung von $\gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2$ multipliziere man zunächst die Glieder in den geschweiften Klammern aus, die keine ϱ-Potenz im Nenner haben. Man findet mit (1.7) den Ausdruck

$$(1.20)\quad \frac{\varrho^3}{\Delta} H_1(x, y, \varrho) = \frac{\varrho^3}{\Delta} \cdot \frac{A}{2} \left\{ e^{-\varrho y} \left(e^{\varrho(x-1)} - e^{-\varrho(x-1)} \right) - e^{-\varrho(1-y)} \left(e^{\varrho x} - e^{-\varrho x} \right) \right\}.$$

Mit der Größe $\alpha_i(x, y)$, die für einen der Ausdrücke

$$(1.21)\quad \alpha_i : y-x,\ y+x,\ x-y,\ y-x+1,\ y+x-1,\ 1-y-x,\ x-y+1,\ 2-y-x$$

zu setzen ist, ergibt sich der endgültige Aufbau

$$(1.22)\quad \gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2 = \frac{\varrho^3}{\Delta} \left\{ H_1(x, y, \varrho) + \frac{1}{\varrho} \sum_i \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y) + \frac{E_i(x, y, \varrho)}{\varrho} \right) e^{-\alpha_i \varrho} \right\}$$

mit jeweils passendem stetig differenzierbaren $\varkappa_i$, $\tilde{\varkappa}_i$ und stetigem E_i. Es ist $\alpha_i + 1 \geq 0$ für $0 \leq x, y \leq 1$. Benutzen wir die aus (1.10), (1.11) fließenden rohen Darstellungen für $1/\Delta$:

$$(1.23)\quad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{-\varrho}[1]}{\varrho^4 C(\varrho)} \text{ in } \mathfrak{B}_1, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{\varrho}[1]}{\varrho^4 C^*(\varrho)} \text{ in } \mathfrak{B}_2,$$

so erkennt man, daß die in (1.22) auftretenden e-Funktionen die Gestalt $e^{-\varrho(\alpha_i+1)}$ in $\mathfrak{B}_1$ haben. In $\mathfrak{B}_2$ würde man entsprechend $e^{\varrho(\alpha_i+1)}$ finden. Sie sind damit alle dem Betrag nach gleichmäßig beschränkt. Man erhält damit für G (1.12) mit (1.1) das folgende

Lemma 1. *In der gelochten ϱ-Ebene gelten für $|\varrho| \geq R$ und $0 \leq x \leq 1$ die Abschätzungen*

$$(1.24)\quad |A_{\varrho^3}^{-1} j| \leq \frac{M_1}{|\varrho|}, \quad \left| \frac{d}{dx} A_{\varrho^3}^{-1} j \right| \leq M_2 \qquad \textit{für stetiges } j,$$

$$(1.25)\quad |A_{\varrho^3}^{-1} j| \leq \frac{M_3}{|\varrho|^2}, \quad \left| \frac{d}{dx} A_{\varrho^3}^{-1} j \right| \leq \frac{M_4}{|\varrho|} \qquad \textit{für } j, j' \textit{ stetig}.$$

Dabei können bei festem j die Konstanten M_i als nur von dem Radius r der ausgeschnittenen Kreise abhängig gedacht werden. Entsprechende Abschätzungen hat man in der gelochten $s = \varrho^2$-Ebene: $|A_s^{-1} j| \leq \frac{M_1}{\sqrt{|s|}}$ bei stetigem j usw.

Dabei wird die Abschätzung (1.25 a) durch partielle Integration gewonnen, die nur an den Gliedern auszuführen ist, die keine $1/\varrho^2$-Potenzen tragen. Die Abschätzungen für die d/dx-Ableitungen erhält man mit der Bemerkung, daß bei $G_x(x, y, \varrho^2)$ die Differentiation nur an den e-Funktionen vorzunehmen ist, wie aus (1.6) ersichtlich ist.

3. *Asymptotische Darstellung der* GREENschen *Resolvente*

Wir beschränken uns zunächst wieder auf den Bereich $\mathfrak{B}_1$ der gelochten ϱ-Ebene. Mit (1.23) findet man dort

$$(1.26)\quad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{-\varrho}}{\varrho^4 C(\varrho)} + \frac{e^{-\varrho} \tilde{E}(\varrho)}{\varrho^5 C(\varrho)} = \frac{1}{2A\, \varrho^4 \mathfrak{Sin}\, \varrho} + \frac{e^{-\varrho} \tilde{E}(\varrho)}{\varrho^5 C(\varrho)},$$

wobei $\tilde{E}(\varrho)$ mit (1.10) durch

$$\tilde{E}(\varrho) = \varkappa + \varkappa e^{-\varrho} + \varkappa e^{-2\varrho} + \frac{1}{\varrho}\bar{E}(\varrho) \tag{1.26a}$$

gegeben ist. Nun faßt man nach Einsetzen von Δ die $1/\varrho$-Glieder in (1.22) mit denen von (1.16) zusammen. Es ergibt sich

$$\begin{cases} P(x, y, \varrho^2) = \frac{1}{2\varrho} e^{-\varrho|x-y|} + \frac{H_1(x, y, \varrho)}{2A\,\varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varrho} \\ \qquad = \frac{1}{\varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varrho} \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,\varrho(1-x)\,\mathfrak{Sin}\,\varrho y & \text{für } x \geq y \\ \mathfrak{Sin}\,\varrho(1-y)\,\mathfrak{Sin}\,\varrho x & \text{für } x \leq y. \end{cases} \end{cases} \tag{1.27}$$

Mit (1.16), (1.22), (1.27) findet man schließlich in $\mathfrak{B}_1$ die *asymptotische Darstellung*

$$G(x, y, \varrho^2) = \begin{cases} P(x, y, \varrho^2) + \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2\varrho^2}\left(Q(y) - Q(x)\right) e^{-\varrho|x-y|} + \\ + \frac{E}{\varrho^3} e^{-\varrho|x-y|} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\tilde{E}(\varrho)}{C(\varrho)} e^{-\varrho} H_1(x, y, \varrho) + \\ + \frac{1}{\varrho^2 C(\varrho)} \sum_i \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y) + \frac{E_i(x, y, \varrho)}{\varrho}\right) e^{-(\alpha_i+1)\varrho}. \end{cases} \tag{1.28}$$

Eine ähnliche Darstellung würde man in $\mathfrak{B}_2$ finden, dabei sind die $--$-Zeichen in den e-Funktionen durch $+-$Zeichen und C durch C^* zu ersetzen. Es sei bemerkt, daß $P(x, y, \varrho^2)$ die GREENsche Resolvente des Problems $-v'' + sv = 0$ mit $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ ist.

§ 2. Die Untersuchung von $L^{-1} A_s^{-1} u_0$

Wir unterziehen den Ausdruck

$$u(x, t) = L^{-1} A_s^{-1} u_0 \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st}\left(\int_0^1 G(x, y, s)\, u_0(y)\, dy\right) ds, \tag{2.1}$$

durch den uns die Lösung des Problems I_1 gegeben werden soll, einer genauen Analyse. Dabei ist $\xi_1 > 0$ so gewählt, daß keine Pole von G in der Halbebene $\xi \geq \xi_1$ liegen.

1. $L^{-1} A_s^{-1} u_0$ erfüllt die integrierte Differentialgleichung

Wir beginnen mit einem Zerspaltungsprozeß. Es sei

$$u_0(x) = h_1(x) + h_2(x) \tag{2.2}$$

mit

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ m(x) & \varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon \\ u_0(x) & \text{für } 2\varepsilon \leq x \leq 1 - 2\varepsilon, \\ n(x) & 1 - 2\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon \\ 0 & 1 - \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} u_0(x) \\ u_0(x) - m(x) \\ 0 \\ u_0(x) - n(x) \\ u_0(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

Da $u_0'''(x)$ in $0 \leq x \leq 1$ stetig vorausgesetzt war, so können $m(x), n(x)$ als Hilfsfunktionen so bestimmt werden, daß $h_1'''(x), h_2'''(x)$ in $0 \leq x \leq 1$ stetig sind.

a) Die Betrachtung von $w_1 = L^{-1} A_s^{-1} h_1$

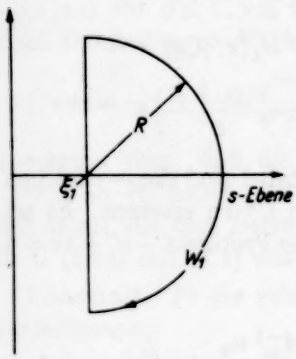
h_1 liegt im Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ des Operators A (§ 1.1). Deshalb gilt mit § 1.1 die Darstellung

$$h_1 = A_s^{-1} A_s h_1 = A_s^{-1}(A h_1 + s h_1) \tag{2.4}$$

und damit

$$A_s^{-1} h_1 = \frac{h_1}{s} + z(x,s) \quad \text{mit} \quad z(x,s) = -\frac{1}{s} A_s^{-1} A h_1. \tag{2.5}$$

Nun ist $L^{-1}\frac{1}{s} = 1$ für $t > 0$ und die Konvergenz ist gleichmäßig in $0 < T_0 \leq t \leq T_1$. $z(x,s)$ läßt sich mit Lemma 1 durch $|z| \leq \frac{M}{|s|^2}$ abschätzen. Deshalb konvergiert $L^{-1} z(x,s)$ in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T_1$ gleichmäßig und absolut. Der Grenzübergang $t \to 0$ darf unter dem Integralzeichen durchgeführt werden und liefert



$$\lim_{t \to 0} L^{-1} z(x,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} z(x,s)\, ds = 0, \tag{2.6}$$

wobei die Null aus dem CAUCHYschen Satz folgt (Figur), indem man das Integral

$$0 = \int_W z(x,s)\, ds = \int_{\xi_1 - iR}^{\xi_1 + iR} z(x,s)\, ds + \int_{W_1} z(x,s)\, ds$$

betrachtet für $R \to \infty$. Nun konvergiert auch noch $L^{-1} z'(x,s)$ gleichmäßig und absolut in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T_1$, da $|z'| \leq \frac{M}{|s|^{\frac{3}{2}}}$ mit der Abschätzung (1.25) gilt. Man hat daher die Darstellungen

$$w_1(x,t) = h_1(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st} z(x,s)\, ds \equiv L^{-1} A_s^{-1} h_1, \tag{2.7}$$

$$w_{1x}(x,t) = h_1'(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st} z'(x,s)\, ds \equiv L^{-1}\left\{\frac{d}{dx} A_s^{-1} h_1\right\} \tag{2.8}$$

für $0 \leq x \leq 1$ und $t > 0$. w_1, w_{1x} sind in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < \infty$ stetig und es gilt

$$\lim_{t \to 0} w_1(x,t) = h_1(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ [5]}. \tag{2.9}$$

[5]) Beachte, daß wir *nicht* behaupten

$$\lim_{t \to 0} L^{-1} A_s^{-1} h_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} A_s^{-1} h_1\, ds.$$

Das letzte Integral ist im allgemeinen sinnlos.

Wie bei MÄCHLER [10] zeigt man jetzt, daß w_1 die integrierte Gleichung

$$(2.10)\quad \begin{cases} \int_0^x \int_0^t \bar{D} w_1 \, dx \, dt = -\int_0^t \{w_{1x} - w_{1x}|_{x=0}\} dt + \int_0^x q(x) \left(\int_0^t w_1 \, dt \right) dx + \\ \qquad + \int_0^x (w_1 - w_1|_{t=0}) \, dx = 0 \end{cases}$$

erfüllt. Man wiederhole dazu die in [9] S. 346–348 angestellten Überlegungen für diesen Spezialfall. Durch Differentiation nach x und t erhält man aus (2.10) ferner das Bestehen der Gleichungen

$$(2.11)\quad \begin{cases} \left(\left(-\int_0^t w_{1x} \, dt \right)_x + w_1 \right)_t + q(x) \, w_1 = 0, \\ \left(-w_{1x} + \left(\int_0^x w_1 \, dx \right)_t \right)_x + q(x) \, w_1 = 0 \end{cases}$$

für alle x, t aus $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < \infty$.

b) Die Betrachtung von $w_2 = L^{-1} A_s^{-1} h_2$

Wir setzen $\delta = 3\varepsilon$ mit dem in (2.3) festgelegtem $\varepsilon > 0$ und betrachten x nur noch in dem Intervall $\delta \leq x \leq 1 - \delta$. w_2 ergibt sich mit (2.3) in der Form

$$(2.12)\quad \begin{cases} w_2(x,t) = L^{-1} \left\{ \int_0^{2\varepsilon} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy + \int_{1-2\varepsilon}^{1} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy \right\} \\ \qquad = w_3(x,t) + w_4(x,t). \end{cases}$$

Für w_3 ist $x - y > 0$ und sogar $x - y \geq \varepsilon > 0$. Nunmehr schätzen wir die GREENsche Resolvente in der Halbebene $\xi \geq \xi_1 > 0$ für $3\varepsilon \leq x \leq 1 - 3\varepsilon$, $0 \leq y \leq 2\varepsilon$ neu ab. Setzt man in dieser Halbebene $s = \sigma e^{i\Theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}$, so wird mit unserer Festsetzung aus § 1.1 $\varrho = \sqrt{s} = \sqrt{\sigma} \, e^{i \frac{\Theta}{2}}$ und

$$(2.13)\qquad \zeta = \operatorname{Re} \sqrt{s} = \sqrt{\sigma} \cos \frac{\Theta}{2} > \sqrt{\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{|s|}{2}} \geq \sqrt{\frac{\xi_1}{2}}.$$

Mit den Entwicklungen in § 1.2 erkennt man, daß $\alpha_i + 1 > 0$ gilt, und daß $G(x, y, s)$ in dieser Halbebene durch

$$(2.14)\qquad |G(x,y,s)| \leq M e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}$$

abgeschätzt werden kann mit einer geeigneten positiven Zahl α_0. Entsprechendes gilt für die Ableitungen. Für $v_3 = \int_0^{2\varepsilon} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy$ findet man dann Abschätzungen der Gestalt

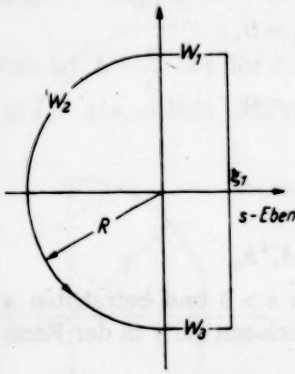
$$(2.15)\quad |v_3| \leq \mathfrak{C}_1 e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}, \quad |v_1'| \leq \mathfrak{C}_2 \sqrt{|s|} \, e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}, \quad |v_3''| \leq \mathfrak{C}_3 |s| \, e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}},$$

die auf die Form

$$|v_3|, |v_3'|, |v_3''| \leq \frac{\mathfrak{C}}{|s|^k} \quad \text{mit} \quad k > 0 \text{ beliebig,} \tag{2.16}$$

gebracht werden können. Damit können alle Differentiationen unter dem komplexen Integral durchgeführt werden. w_3 ist in $\frac{1}{3}\varepsilon \leq x \leq 1 - \frac{1}{3}\varepsilon$, $0 \leq t < \infty$ beliebig oft nach t differenzierbar und es ist $\bar{D} w_3 = 0$ sowie $\lim_{t \to 0} w_3(x, t) = 0$. Analoges gilt für w_4 in (2.12).

Zusammenfassung. Da $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$ wegen $\varepsilon > 0$ beliebig, selbst beliebig war, folgt, daß $u(x, t)$ (2.1) und $u_x(x, t)$ in $0 < x < 1$, $0 \leq t < \infty$ stetig sind und $\lim_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x)$ für $0 < x < 1$ gilt. Ferner erfüllt $u(x, t)$ die Gln. (2.11). Die Behauptung (b) unseres Satzes ist damit bewiesen.



Die Formel (2.1) läßt nun eine Umschreibung zu. Es ist $u(x, t)$ auch in der Form

$$u(x, t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{st} A_s^{-1} u_0 \, ds \tag{2.17}$$

für $0 < x < 1$, $t \geq 0$ darstellbar. $\oint$ bedeutet dabei das Kurvenintegral, welches längs des in der Figur angegebenen geschlossenen Weges zu nehmen ist. R in (2.17) durchläuft dabei eine gegen $+\infty$ strebende Folge, die so gewählt wird, daß der Weg durch keine Polstelle von G führt.

Dies ist deshalb klar, weil mit den Abschätzungen in Lemma 1 die Bestandteile über $W_1 + W_2 + W_3$ (Fig. 2) gleichmäßig gegen Null streben für $R \to \infty$. (2.17) gilt jetzt im Gegensatz zu (2.1) sogar für $t \geq 0$, weil das einzig unangenehme Integral $\oint \frac{e^{st}}{s} ds$ nach dem Residuumkalkül 1 ergibt unabhängig von t.

2. *Die Stetigkeit von u, u_x in $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$*

Zum Beweis von Stetigkeitseigenschaften von u (s. 2.1) genügt es, sich auf große $|s|$ zu beschränken. Für diese s kennen wir mit (1.28) den genauen Aufbau der GREENschen Resolvente.

a) Durch partielle Integration finden wir zunächst

$$\left\{ \begin{aligned} q_1 = \int_0^1 P(x, y, s)\, u_0(y)\, dy &= \frac{u_0(x)}{s} - u_0(0)\, T(x, 0, s) + \\ &+ u_0(1)\, T(x, 1, s) - \int_0^1 T(x, y, s)\, u_0'(y)\, dy. \end{aligned} \right. \tag{2.18}$$

Dabei ist

$$\left\{ \begin{aligned} T(x, y, s) &= \frac{1}{s\, \mathfrak{Sin} \sqrt{s}} \times \\ \times &\begin{cases} \mathfrak{Sin} \sqrt{s}\,(1 - x)\, \mathfrak{Cof} \sqrt{s}\, y & \text{für } x \geq y \\ - \mathfrak{Sin} \sqrt{s}\, x\, \mathfrak{Cof} \sqrt{s}\,(1 - y) & x \leq y \end{cases}, \quad T(x, 0, s) = T(1 - x, 1, s). \end{aligned} \right. \tag{2.19}$$

Durch weitere partielle Integration ergibt sich schließlich

$$(2.20)\quad \begin{cases} q_1 \equiv \frac{1}{s}\left(u_0(x) + \frac{u_0''(x)}{s}\right) - \left(u_0(0) + \frac{u_0''(0)}{s}\right) T(x,0,s) + \\ \qquad + \left(u_0(1) + \frac{u_0''(1)}{s}\right) T(x,1,s) - \frac{1}{s}\int_0^1 T(x,y,s)\, u_0''''(y)\, dy. \end{cases}$$

Bis auf den letzten Term, der mit q_2 bezeichnet werde, können alle Glieder explizit rücktransformiert werden. Man findet unter anderem für $t>0$

$$(2.21)\quad \begin{cases} L^{-1}T(x,0,s) = \int_x^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau\ ^{6}), \quad L^{-1}T(x,1,s) = -\int_{1-x}^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau, \\ L^{-1}\frac{T(x,0,s)}{s} = \int_0^t \left(\int_x^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau\right) dt, \quad L^{-1}\frac{1}{s^2} = t. \end{cases}$$

Dabei ist $\vartheta_3(\tau, t)$ gegeben durch

$$(2.22)\qquad \vartheta_3(\tau,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t}\cos 2k\pi\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau+k)^2}{t}}$$

Für q_2 findet man $|q_2| \leq \frac{\mathfrak{C}_4}{|s|^2}$, $\left|\frac{d}{dx}q_2\right| \leq \frac{\mathfrak{C}_5}{|s|^{\frac{3}{2}}}$, so daß $L^{-1}q_2$ und $\frac{d}{dx}L^{-1}q_2$ in $0\leq x\leq 1$, $t\geq 0$ stetig sind und überdies die Differentiation unter dem komplexen Integral durchgeführt werden darf. Ferner wird behauptet, daß $L^{-1}q_1 = Q_1(x,t)$ für $t\geq 0$ und festes x aus $0\leq x\leq 1$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion ist, das bedeutet unter anderem, daß $\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega} e^{-s_0 t} Q_1(x,t)\, dt$ für ein reelles oder komplexes s_0 existiert[7]). Dieses ist für die Thetafunktion ϑ_3 wohlbekannt (G. DOETSCH [6], S. 306), für $L^{-1}q_2$ folgt es aus [7] S. 263, Satz 4.

Zur Bildung von $\frac{\partial}{\partial t}L^{-1}q_2$ schreiben wir $L^{-1}q_2$ in der Form

$$(2.23)\qquad L^{-1}q_2 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{st}}{s}\left(\int_0^1 T(x,y,s)\, u_0''''(y)\, dy\right) ds.$$

Dabei konvergiert das Integral

$$(2.24)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1 T(x,y,\xi_1+i\eta)\, u_0''''(y)\, dy\right|^2 d\eta \leq \mathfrak{C}_6$$

---

[6]) Man benutze dazu etwa das Tabellenwerk [8]. Dieses gibt zu einem u das dazugehörige $v = Lu$ an, garantiert aber im allgemeinen nicht die Darstellung $u = L^{-1}v$. In unseren einfachen Fällen kann dies aber leicht mit allgemeinen Sätzen geschehen (s. etwa G. DOETSCH [7], S. 263, Satz 4).

[7]) Vgl. G. DOETSCH [7], S. 32 für eine genaue Definition.

gleichmäßig in $0 \leq x \leq 1$. Daraus folgt mit [11], daß $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_2$ fast überall (d.h. bis auf eine zweidimensionale Punktmenge vom Maße Null) existiert. Damit ist zusammenfassend nachgewiesen, daß $L^{-1} q_1$, $\frac{\partial}{\partial x} L^{-1} q_1$ in $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ stetig sind und $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_1$ existiert dort fast überall. Ferner ist $L^{-1} q_1$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion.

b) Für den zweiten Ausdruck in (1.28) findet man

$$(2.25)\quad \left\{ \begin{aligned} q_3 &\equiv \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2s} \int_0^1 \left(Q(y) - Q(x)\right) e^{-\sqrt{s}\,|x-y|}\, u_0(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \left\{ Q(x)\, u_0(0)\, e^{-\sqrt{s}\,x} + \left(Q(1) - Q(x)\right) u_0(1)\, e^{-\sqrt{s}\,(1-x)} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 e^{-\sqrt{s}\,|x-y|} \left\{ \left(Q(x) - Q(y)\right) u_0(y) \right\}' dy \end{aligned} \right.$$

mit $' \equiv \frac{d}{dx}$. Die ersten Terme können sofort rücktransformiert werden. Man hat etwa

$$(2.26)\quad L^{-1} \frac{e^{-\sqrt{s}\,x}}{s^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi .$$

Für den letzten Term in (2.25) $(= q_4)$ findet man $|q_4| \leq \frac{\mathfrak{C}_7}{|s|^{\frac{3}{2}}}$ und mit leichten Abschätzungen

$$(2.27)\quad \left| \frac{d}{dx} q_4 \right| \leq \frac{\mathfrak{C}_8}{|s|} \left\{ \int_0^x e^{-\operatorname{Re}\sqrt{s}\,(x-y)}\, dy + \int_x^1 e^{-\operatorname{Re}\sqrt{s}\,(y-x)}\, dy \right\} \leq \frac{\mathfrak{C}_9}{|s|\,\operatorname{Re}\sqrt{s}} \leq \frac{\mathfrak{C}_{10}}{|s|^{\frac{3}{2}}}$$

mit (2.13) auf dem Integrationsweg $\xi_1 - i\infty \ldots \xi_1 + i\infty$. Damit sind $L^{-1} q_4$, $\frac{\partial}{\partial x} L^{-1} q_4 = L^{-1} \frac{\partial}{\partial x} q_4$ gleichmäßig und absolut konvergent in $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$. Schließlich folgt ganz analog auch die Existenz von $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_4$ fast überall und q_4 hat zusammenfassend dieselben Eigenschaften wie q_1.

c) Nunmehr werde der Ausdruck

$$(2.28)\quad \left\{ \begin{aligned} q_5 &\equiv \frac{1}{s} \int_0^1 \left\{ \frac{\tilde{E}(\sqrt{s})}{C(\sqrt{s})}\, e^{-\sqrt{s}}\, H_1(x, y, \sqrt{s}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C(\sqrt{s})} \sum \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y)\right) e^{-(\alpha_i + 1)\sqrt{s}} \right\} u_0(y)\, dy \end{aligned} \right.$$

aus (1.28) betrachtet. Zunächst ist auf dem Integrationsweg $\xi_1 - i\infty \ldots \xi_1 + i\infty$ mit (1.10), (1.26a)

$$(2.29)\quad \frac{1}{C(\sqrt{s})} = \frac{1}{A} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\mathfrak{a}_\nu \sqrt{s}}, \quad \frac{\tilde{E}}{C} = \frac{\varkappa}{sA} + \frac{\bar{E}(\sqrt{s})}{s^{\frac{3}{2}} A} + \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}} \{\ldots\}.$$

Die Terme von $e^{-\sqrt{s}} H_1$ haben mit (1.20), (1.21) die Gestalt $e^{-(\alpha_i+1)\sqrt{s}}$, wobei $\alpha_i + 1 \geq 0$. Der „schlechteste" Term im ersten Term von (2.28) hat damit die Gestalt $\frac{\varkappa}{A s^2} e^{-(\alpha_i+1)\sqrt{s}}$ und zeigt wesentlich besseres Konvergenzverhalten als die Ausdrücke unter a) und b). Man wird keine Schwierigkeiten haben, für q_5 dieselben Eigenschaften nachzuweisen, die wir für q_1 fanden.

d) Es verbleiben aus (1.28) Ausdrücke der Gestalt

$$q_6 \equiv \int_0^1 \frac{E(x, y, \sqrt{s})}{s^{\frac{3}{2}}} \begin{Bmatrix} e^{-\sqrt{s}\,|x-y|} \\ e^{-(\gamma_i+1)\sqrt{s}} \end{Bmatrix} u_0(y)\, dy, \tag{2.30}$$

die mit Abschätzungen der Form (2.27) behandelt werden können. Bei der Betrachtung von $\frac{\partial}{\partial x} q_6$, führe man die Differentiation lediglich an den e-Funktionen aus. Daß dieses für große $|s|$ ausreichend ist, folgt aus dem Vergleich von v_k' mit v_k in (1.6).

Zusammenfassung. Der Ausdruck $u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ hat die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie die untersuchten q-Größen. Damit sind u, u_x in $0 \leq x \leq 1, t > 0$ stetig, u_t existiert dort fast überall und u ist eine $\mathfrak{L}$-Funktion.

3. *Die Stetigkeit von u_t in $0 < x < 1, t > 0$*

Das Vorliegen eines offenen x-Intervalls gestattet es, die Methoden der Nr. 1 und 2 zu kombinieren. Nach Nr. 1 genügt mit $u = w_1 + w_2$ die Betrachtung von

$$w_1 = h_1 - L^{-1}\left\{\frac{1}{s} A_s^{-1} u_1\right\} \quad \textit{mit} \quad u_1 = A h_1 \tag{2.31}$$

und $u_1(x), u_1'(x)$ stetig in $0 \leq x \leq 1$. Die Behandlung von $A_s^{-1} u_1$ erfolgt nach dem Muster von Nr. 2 unter Benutzung nur einmaliger partieller Integration. Wir beginnen ähnlich wie in (2.18) mit

$$\left\{\begin{aligned} \bar{q}_1 \equiv \frac{1}{s} \int_0^1 P(x, y, s)\, u_1(y)\, dy &= \frac{u_1(x)}{s^2} - \frac{u_1(0)}{s} T(x, 0, s) + \\ &+ \frac{u_1(1)}{s} T(x, 1, s) - \frac{1}{s} \int_0^1 T(x, y, s)\, u_1'(y)\, dy. \end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

Die ersten Terme werden explizit zurücktransformiert und dann nach t differenziert. Für den letzten Term $\bar{q}_2$ finden wir mit (2.19) etwa für $x \geq y$

$$\left\{\begin{aligned} |\bar{q}_2| &\leq \overline{\mathfrak{C}}_1 \frac{|\mathfrak{Sin}\sqrt{s}(1-x)|}{|s|^2} \int_0^x \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{s}\, y}{\mathfrak{Sin}\sqrt{s}}\, dy \\ &\leq \overline{\mathfrak{C}}_1 \frac{|\mathfrak{Sin}\sqrt{s}(1-x)|}{|s|^2} \int_0^x \frac{1 + e^{-2y\sqrt{\xi_1}}}{1 - e^{-2y\sqrt{\xi_1}}} e^{-(1-y)\operatorname{Re}\sqrt{s}}\, dy \\ &\leq \frac{\overline{\mathfrak{C}}_2}{|s|^2 \operatorname{Re}\sqrt{s}} \leq \frac{\mathfrak{C}_3}{|s|^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}\right. \tag{2.32}$$

und analoges für $x \leq y$ mit Benutzung von (2.13). Damit ist $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} \bar{q}_1$ stetig und die Differentiation darf unter dem komplexen Integral vorgenommen werden. Analoges findet man für die weiteren Terme und endlich wie in Nr. 2 die Stetigkeit von $u_t(x, t)$ in $0 < x < 1$, $t > 0$.

Damit sind die Möglichkeiten der asymptotischen Darstellung (1.18) voll ausgenützt. Es ist nicht so, daß durch höhere Differentiationsforderungen an u_0 auch die Stetigkeit von u_t in $0 \leq x \leq 1$ mit unserer Methode erzwungen werden könnte, wie die Terme (2.30) zeigen.

4. Das Erfülltsein der Differentialgleichung

$u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ erfüllt die Relationen (2.11), wobei die Differentiationen nach t ausgeführt werden dürfen. Man findet

$$\left(-\int_0^t u_x \, dt\right)_{xt} + u_t + q(x) u = 0. \tag{2.33}$$

Setzen wir $F(x, t) = -\int_0^t u_x \, dt$, so sind F_x, F_t, F_{xt} stetig und es folgt nach dem SCHWARZschen Satz $F_{xt} = F_{tx} = -u_{xx}$ für $0 < x < 1$, $t > 0$.

5. Die Randbedingungen

Wir betrachten mit COURANT [5] die Hilfsfunktion

$$w(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{A_s^{-1} u_0}{s}\right\}. \tag{2.34}$$

Nun ist $u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion und mit [7] S. 218, Satz 1 folgt $w(x, t) = \int_0^t u(x, \tau) \, d\tau$. Mit dem Lemma in § 1, Nr. 2 folgt

$$v(x, s) = |A_s^- u_0| \leq \frac{M}{|s|}, \quad |v'| \leq \frac{M}{|s|^{\frac{1}{2}}},$$

so daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{x \to 0} w(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{v(0, s)}{s}\right\}, \quad \lim_{x \to 0} w_x(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{v'(0, s)}{s}\right\} \tag{2.35}$$

gilt. Analoges für $x = 1$. v erfüllt die Relation $R_i v = 0$. Wir finden

$$L^{-1}\left\{\frac{R_i v}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\left(\frac{a_{i1}}{s} + a_{i3}\right) v(0, s) + \frac{a_{i2}}{s} v'(0, s) + \cdots\right\} = 0. \tag{2.36}$$

Nach (2.34) gibt dies

$$\begin{aligned} &a_{i1} w(0, t) + b_{i1} w(1, t) \\ &\qquad = -\{a_{i2} w_x(0, t) + b_{i2} w_x(1, t) + a_{i3} u(0, t) + b_{i3} u(1, t)\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Die linke Seite ist für $t>0$ stetig nach t differenzierbar. Nun ist w_x, $w_t = u(x,t)$, $w_{tx} = u_x$ in $0 \le x \le 1$, $t>0$ stetig. Also folgt $w_{tx} = w_{xt}$ und (2.37) ergibt nach Differentiation

$$\begin{cases} a_{i1}u(0,t) + b_{i1}u(1,t) + a_{i2}u_x(0,t) + b_{i2}u_x(1,t) \\ \qquad = -\dfrac{\partial}{\partial t}\{a_{i3}u(0,t) + b_{i3}u(1,t)\}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Setzen wir

$$\varphi_i(t) = a_{i1}w(0,t) + b_{i1}w(1,t) + a_{i2}w_x(0,t) + b_{i2}w_x(1,t) \tag{2.39}$$

so ist $\dfrac{d}{dt}\varphi_i(t)$ stetig für $t>0$ und aus (2.37), (1.7) folgt

$$u(0,t) = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} \varphi_1 & b_{13} \\ \varphi_2 & b_{23} \end{vmatrix}, \quad u(1,t) = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{13} & \varphi_1 \\ a_{23} & \varphi_2 \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Damit ist $u_t(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lim\limits_{x\to 0} u(x,t)\right)$, $u_t(1,t)$ stetig und das Erfülltsein der Randbedingungen folgt aus (2.38).

6. $u(x,t) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t)$

Es ist $v = A_s^{-1}u_0$ analytisch in s bis auf die Pole s_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, die in der linken Halbebene $\Re e\, s < \xi_1$ liegen. Ferner ist bekannt, daß $u(x,t) = L^{-1}v$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion ist für $0 \le x \le 1$, $t>0$. Auf den in $\Re e\, s \le \xi_1$ gelegenen Bögen von den Kreisen $|s| = r_n$ ($n = 1, 2, \ldots, r_n \to \infty$) die durch keinen Pol hindurchgehen, ist $|v| \le \dfrac{M}{|s|}$. Unter Benutzung von [6], S. 276, Satz 1 folgt die Darstellung

$$u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t), \qquad 0 \le x \le 1,\ t>0, \tag{2.41}$$

wobei die Summe über die Residuen von $A_s^{-1}u_0$ zu nehmen ist. Für $0<x<1$, $t \gtrsim 0$ folgt dies sofort aus (2.17), womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] BIRKHOFF, G. D.: On the asymptotic character of solutions of certain linear differential equations, etc. Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908). — [2] CHURCHILL, R. V.: The solution of linear boundary-value problems in physics by means of the Laplace-transformation. Part I: A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Ann. **114**, 591—613 (1937). — [3] CHURCHILL, R. V.: Modern operational mathematics in engineering. New York u. London 1944. — [4] CODDINGTON, E. A., and N. LEVINSON: Theory of ordinary differential equations. New York u. London 1955. — [5] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937. — [6] DOETSCH, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937. — [7] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I: Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950. — [8] DOETSCH, G.: Tabellen zur Laplace-Transformation. Berlin 1947. —

[*9*] HELLWIG, G.: Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern. Math. Z. **58**, 337—357 (1955). — [*10*] MÄCHLER, W.: Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Comm. Math. Helv. **5**, 256—304 (1933). — [*11*] PLANCHEREL, M.: Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies. Rend. di Palermo **30** (1910). — Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel. Proc. London, Math. Soc. (2) **24** (1925). — [*12*] TAMARKIN, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations etc. Math. Z. **27**, 1—54 (1927). — [*13*] FELLER, W.: Two singular diffusion problems. Ann. of Math. **54**, 173—182 (1951). — Diffusion processes in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 1—31 (1954). — [*14*] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. III. Basel.

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 7. August 1956)

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 389—408 (1957)

Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität

Von
ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung

Sind z_1, z_2 zwei Punkte der vollen komplexen Ebene E, so soll der durch die Gleichung

$$(1.1) \qquad [z_1, z_2] = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \qquad \left([z_1, \infty] = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\right)$$

definierte Ausdruck $[z_1, z_2]$ die OSTROWSKI-AHLFORSsche Entfernung von z_1 und z_2 heißen[1]).

Man betrachte eine in einem Gebiet G von E eindeutige reguläre Funktion $w(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = |z| e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ und nehme an, G besitze einen isolierten Randpunkt z_0. Läßt man dann den einfachen Fall eines Pols beiseite, so wird das Verhalten von $w(z)$ in jeder punktierten Kreisumgebung $K_\delta \subseteq G_\delta : 0 < [z, z_0] < \delta$ $(0 < \delta < 1)$ durch den klassischen Satz von CASORATI-WEIERSTRASS beherrscht[2]):

Satz 1. (CASORATI-WEIERSTRASS). *Es bedeute I_δ $(0 < \delta < 1)$ das Intervall $0 < r < \delta$. Man definiere dort bei gegebenem $a \in E$ die nichtnegative Funktion*

$$(1.2) \qquad \mu(r, a) = \operatorname{Min}\{[w(z), a] \,|\, [z, z_0] = r \in I_\delta\}.$$

Ist dann $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so ist für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ die Punktmenge

$$(1.3) \qquad \{r \,|\, \mu(r, a) < \varepsilon, r \in I_\delta\}$$

nicht leer.

[1]) Der Ausdruck $[z_1, z_2]$ wurde gelegentlich (vor OSTROWSKI und AHLFORS) auch von BIEBERBACH in seinem bekannten Lehrbuch der Funktionentheorie verwendet. Die systematische Verwendung von $[z_1, z_2]$ für Konvergenzfragen verdankt man OSTROWSKI [Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des PICARDschen Satzes, Math. Z. **24** (1926)] und später CARATHÉODORY (Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen, Math. Ann. **101**, S. 515—533). Zu voller Geltung bei Werteverteilungsfragen kommt der Kugelabstand $[z_1, z_2]$ erst durch die Arbeit von AHLFORS (Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Phys. math. Soc. Sci. fenn. **8**, Nr. 10) aus dem Jahre 1935.

[2]) In vielen Büchern (wie z. B. im Cours d'Analyse von PICARD und in den bekannten Büchern von BIEBERBACH und AHLFORS) wird dieser Satz bloß als Satz von WEIERSTRASS (Abh. Berl. Akad. Wiss. **1876**) bezeichnet. Den Namen CASORATI habe ich (bei flüchtigem Suchen) lediglich in dem bekannten Göschenbändchen von KNOPP und in dem neu erschienenen Buch von Herrn BEHNKE gefunden.

Dieser klassische Satz wurde durch PICARD folgendermaßen verschärft[3]).

Satz 2. (PICARD). *Es kann höchstens zwei $a \in E$ derart geben, daß*

$$\{r \mid \mu(r, a) = 0, r \in I_\delta\}$$

leer ist.

Während nun Satz 2 durch die insbesondere von R. NEVANLINNA eingeführten Begriffsbildungen neu bewiesen und weitgehend verschärft wurde, haben die im Laufe der Zeit entstandenen Methoden sicher auf die Beweise des Satzes 1, sowie auf eine Reihe von Sätzen der klassischen CAUCHY-RIEMANNschen Theorie wenig Anwendung gefunden. Die meisten Lehrbücher, auch die in der neuesten Zeit erschienenen, gehen kaum auf die NEVANLINNAsche Theorie ein und begnügen sich mit einigen Hinweisen auf das klassische Buch von R. NEVANLINNA. Wie wenig das gerechtfertigt ist, kann man ersehen, wenn man die Grundlagen der CAUCHYschen Theorie mit den Methoden von RIEMANN-NEVANLINNA konfrontiert. Man gewinnt dann nach einem Eindringen in die diesbezüglichen Begriffsbildungen bald den Eindruck, daß diese Theorie an den Anfang einer Vorlesung über Funktionentheorie gehört.

Im folgenden setze ich voraus, daß der Leser mit folgenden Tatsachen und Resultaten der NEVANLINNA-AHLFORSschen Theorie der meromorphen Funktionen vertraut ist.

Es sei $w(z)$ in $|z| < +\infty$ meromorph und es bezeichne $n(r, a)$ für jedes $a \in E$ die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ in $|z| \leq r$. Man setze

$$N(r, a) = \int_0^r \{n(t, a) - n(0, a)\} \frac{dt}{t} + n(0, a) \log r \tag{1.4}$$

und

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \log \frac{1}{[w, a]} d\varphi . \tag{1.5}$$

Man setze ferner

$$S(r, w) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| \leq r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\sigma \qquad (d\sigma = t\, dt\, d\varphi) \tag{1.6}$$

und

$$T(r, w) = \int_{0+}^r S(t, w) \frac{dt}{t} . \tag{1.7}$$

Dann gilt

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, w) + C(a) \tag{1.8}$$

mit einer von r unabhängigen endlichen Größe $C(a)$.

[3]) Für klassische Begriffsbildungen und für Methodisches soll hier ein für allemal auf das Standardwerk von R. NEVANLINNA (Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin 1954, 2. Aufl.) verwiesen werden, oder auf die in der Fußn. 1 zitierte klassische AHLFORSsche Arbeit.

2. Es gelte für eine in $|z| < +\infty$ meromorphe Funktion $w(z)$

$$T(r, w) = O(\log r); \tag{1.9}$$

dann ist $z = \infty$ eine Rationalitätsstelle für $w(z)$, und somit muß diese eine rationale Funktion sein. Legt man diese (elementaren) Tatsachen der NEVANLINNAschen Theorie der meromorphen Funktionen zugrunde, so kann man den CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz 1 fast ohne Rechnung in folgender scharfer Form beweisen:

Satz 3. *Ist $w = w(z)$ in $|z| < +\infty$ meromorph und $0 < \alpha < 1$, so kann die Menge*

$$\{r \mid \mu(r, a) < e^{-\alpha T(r, w)},\ a \in E \text{ fest}\} \tag{1.10}$$

keine endliche obere Schranke haben.

Beweis. Es sei angenommen, daß von einem $r = r_0$ an $\mu(r, a) \geq e^{-\alpha T(r, w)}$ gilt. Dann gilt auch für $|z| = r \geq r_0$

$$[w(z), a] \geq e^{-\alpha T(r, w)} \tag{1.11}$$

und somit

$$m(r, a) \leq \alpha\, T(r, w). \tag{1.12}$$

Nun kann wegen (1.11) $n(r, a) - n(0, a)$ nicht über $n(r_0, a) - n(0, a)$ wachsen. Somit wird $N(r, a) = O(\log r)$ und mit Rücksicht auf (1.8)

$$T(r, w) \leq C \log r + \alpha\, T(r, w) \qquad (C > 0, r > r_0). \tag{1.13}$$

Ist jetzt $z = \infty$ eine wesentliche Singularität, so gilt $\lim\limits_{r \to \infty} \{\log r : T(r, w)\} = 0$. Daraus würde aber $1 \leq \alpha$ folgen, was offensichtlich unmöglich ist.

Dieser Beweis wäre nun schön und einfach, wenn nicht unglücklicherweise die Gl. (1.9) lediglich mit Hilfe der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung bewiesen werden könnte. Es wird also zunächst notwendig sein, einen direkten Beweis von (1.9) zu geben und dann sowohl Satz 3 als auch andere später angeführte Sätze für solche analytischen Funktionen $w(z)$ zu beweisen, die in der Umgebung einer isolierten Singularität eindeutig sind. Was man noch mit der hier verwendeten Methode erreichen kann, wird der sachkundige Leser bald selbst beurteilen können. Hervorzuheben wäre hier an erster Stelle die konsequente Verwendung der lokalen Charakteristik, die das Verhalten von $w(z)$ in der Umgebung von z_0 bestimmt. Selbstverständlich vergesse ich in diesem Zusammenhang weder die Dissertation von GUNNAR AF HÄLLSTRÖM, noch andere dort angeführte (mir jedoch nicht zugänglich gewordene) Arbeiten[4]). Während aber dort mehr oder weniger mit einer globalen Wachstumscharakteristik gearbeitet wird, ermöglicht die lokale Charakteristik mit AHLFORSschen Methoden eine einfache Behandlung von Werte-

[4]) GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzbereichen (Dissertation Universität Helsinki 1939).

verteilungsfragen von analytischen Funktionen, die in der Umgebung einer Stelle z_0 von meromorphem Charakter sind. Obwohl solche Fragen (nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn HÄLLSTRÖM) mit Hilfe der ursprünglichen Methoden von NEVANLINNA mehr oder weniger behandelt wurden, so habe ich mich angesichts eines Kunstgriffes, wodurch man die Bildung von Mittelwerten umgehen kann, entschlossen, den ganzen Fall kurz neu darzustellen. Das Hauptgewicht der Arbeit liegt aber auf dem CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz. Ich hoffe, hier gezeigt zu haben, wie die NEVANLINNA-AHLFORSschen Methoden, auf diesen Fragenkomplex angewandt, eine elegante und weitergehende Behandlung desselben gestatten.

2. Vorbereitende Tatsachen

Die Funktion $w=w(z)$ sei in einer Umgebung $K: 0<[z, z_0]<\delta$ $(0<\delta<1)$ eindeutig und dort bis auf Pole regulär. Wir nehmen $z_0=\infty$ an und ersetzen K etwa durch die Umgebung

$$|z|>M \qquad (M>0) \tag{2.1}$$

von $z=\infty$. Es bedeute nun $R_{r\,|\,r_0}$ den Ring

$$r_0\leq|z|\leq r \qquad (r_0>M), \tag{2.2}$$

und allgemein $n(r|r_0, a)$ die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ innerhalb $R_{r\,|\,r_0}$. Sind dann a und b zwei beliebige, voneinander verschiedene komplexe Zahlen, so gilt, wie man leicht sieht,

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{[w,a]}{[w,b]}\,d\varphi-\frac{r_0}{2\pi}\int\limits_{|z|=r_0}\frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{[w,a]}{[w,b]}\,d\varphi=n(r|r_0,a)-n(r|r_0,b)^{5}).$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck

$$n(r|r_0,a)+\frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi-\frac{r_0}{2\pi}\int\limits_{|z|=r_0}\frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi,$$

unabhängig von a ist und eine lediglich von r_0, r und w abhängige Größe $S_0(r|r_0, w)$ [kurz $S_0(r|r_0)$] darstellt. Verwendet man hier die bekannte NEVANLINNA-AHLFORSsche Schmiegungsfunktion

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi, \tag{2.3}$$

so läßt sich dieser Sachverhalt durch die Gleichung

$$S_0(r|r_0,w)=n(r|r_0,a)+r\,m'(r,a)-r_0\,m'(r_0,a) \tag{2.4}$$

[5]) Diese Formel folgt aus einer von F. und R. NEVANLINNA bewiesenen allgemeinen GREENschen Transformationsformel [Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci. fenn. **50**, Nr. 5 (1922)], wenn man dort $\lambda=1$ nimmt.

ausdrücken. Setzt man jetzt

$$T_0(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S_0(t|r_0, w)\,\frac{dt}{t}, \tag{2.5}$$

und

$$N(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} n(t|r_0, a)\,\frac{dt}{t}, \tag{2.6}$$

so wird

$$T_0(r|r_0, w) = N(r|r_0, a) + m(r, a) - A(r|r_0, a), \tag{2.7}$$

mit

$$A(r|r_0, a) = m(r_0, a) + r_0 \log\frac{r}{r_0}\cdot m'(r_0, a). \tag{2.8}$$

Aus der Relation (2.7) lassen sich eine Reihe von Folgerungen ableiten, welche Auskunft über das Verhalten von $w(z)$ in der Umgebung der wesentlichen isolierten Singularität $z_0 = \infty$ geben.

3. Erste Hilfssätze

Wir beweisen folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Es bezeichne kurz $r|r_0$ das Ringgebiet* (2.2) *und $d\sigma = |z|\,d|z|\,d\varphi$ das Flächenelement von E. Dann gibt es bei gegebenem $w(z)$ eine lediglich von r_0 abhängige Konstante A_0 derart, daß*

$$S_0(r|r_0, w) = \frac{1}{\pi}\int_{r|r_0} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\sigma + A_0 \tag{3.1}$$

wird.

Bezeichnet man hier das Integral rechts mit $S(r|r_0, w)$ [kürzer $S(r|r_0)$] und definiert die Funktion $T(r|r_0, w)$ durch die Gleichung

$$T(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S(t|r_0, w)\,\frac{dt}{t}, \tag{3.2}$$

so folgt aus (3.1)

$$T_0(r|r_0, w) = T(r|r_0, w) + A_0 \log\frac{r}{r_0}. \tag{3.3}$$

Die Funktion $T(r|r_0, w)$ [kürzer $T(r|r_0)$] soll die lokale Charakteristik von $w(z)$ in der Umgebung der wesentlichen Singularität $z_0 = \infty$ heißen. Nachfolgender Hilfssatz verallgemeinert den durch die Gl. (1.7) ausgedrückten Satz von NEVANLINNA:

Hilfssatz 2. *Ist*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r|r_0)}{\log r} < +\infty, \tag{3.4}$$

so ist $z = \infty$ eine Rationalitätsstelle von $w(z)$.

Ist also $z=\infty$ eine wesentliche Singularität für die Funktion $w(z)$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} S(r|r_0, w) = \infty. \tag{3.5}$$

Bevor der Beweis dieses Hilfssatzes erbracht wird, soll noch der Hilfssatz 3 formuliert werden:

Hilfssatz 3. *Es sei für ein* $a\in E$

$$\mu_0(r, a) = \operatorname*{Min}_{|z|=r} [w(z), a] \tag{3.6}$$

gesetzt. Dann gilt

$$S_0(r|r_0, w) = n(r|r_0, a) + \Theta \frac{L(r)}{\mu_0(r, a)} + C_0(a), \tag{3.7}$$

mit

$$L(r) = \int_{|z|=r} \frac{|dw|}{1+|w|^2}. \tag{3.8}$$

Hierbei bedeutet $L(r)$ die Länge derjenigen Kurve, die man aus der Kurve $w=w(z)$ $(|z|=r)$ durch stereographische Projektion auf die Oberfläche R der RIEMANNschen Kugel erhält. Die Größe $\Theta=\Theta(a)$ genügt (bei festem r_0) für jedes $a\in E$ der Ungleichung $0\leq|\Theta|\leq 1$. Ferner ist $C_0(a)$ eine endliche Konstante, sofern $w(z)$ auf $|z|=r_0$ regulär und von a verschieden ist.

Der Beweis des Hilfssatzes 1 erfolgt aus (2.7), wenn man diese mit dem Oberflächenelement $d\omega(a)=|a|d|a|d\alpha:(1+|a|^2)^2$ $(a\in E)$ von R multipliziert und anschließend über a integriert. Um zu zeigen, daß das Integrationsergebnis eine endliche Zahl ist, verfahren wir so: Zunächst gilt unabhängig vom Punkte w

$$\int_E \log\frac{1}{[w, a]}\, d\omega(a) = \frac{1}{2}\pi. \tag{3.9}$$

Jetzt betrachte man die Menge

$$C_0 = \{w|\, w = w(z), |z| = r_0\}, \tag{3.10}$$

und bilde die Menge $E_0=E-C_0$. Da C_0 offenbar das (sphärische) Maß Null hat, so gilt $\int_{E_0} d\omega(a)=\pi$, sobald das Integral links im LEBESGUEschen Sinne genommen wird. Man setze nun für jeden Punkt a von E_0

$$g(w, a) = \frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w, a]} \qquad (|z|=r_0). \tag{3.11}$$

Dann wird in 4. gezeigt werden: *Es gilt in jedem Punkt* $a\in E_0$

$$|g(w, a)| \leq \frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w, a]}. \tag{3.12}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung, dessen Beweis wir noch nachzuholen haben kann man zeigen, daß

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_{E_0} m'(r_0, a)\, d\omega(a)$$

existiert und eine endliche Zahl ist. Denn schreibt man I_0 in der Form

$$I_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{E_0} d\omega(a) \left\{ \int_0^{2\pi} g(w, a)\, d\varphi \right\}$$

und beachtet, daß wegen (3.12) und (3.9) das Integral $\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{E_0} |g(w, a)|\, d\omega(a) \right\}$ existiert und höchstens gleich $2\pi L(r_0) : r_0$ ist, so muß nach dem klassischen FUBINIschen Satz[6])

$$I_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{E_0} g(w, a)\, d\omega(a) \right\} \tag{3.13}$$

gelten und somit I_0 endlich sein. Hierbei sind beide Integrale rechts im LEBESGUEschen Sinne zu nehmen. Verbindet man diese Überlegungen mit der Tatsache, daß

$$\int_{E_0} n(r|r_0, a)\, d\omega(a) = \int_E n(r|r_0, a)\, d\omega(a) = \int_{r|r_0} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, d\sigma$$

gilt, so folgt leicht aus (2.7) durch Integration über E_0

$$T_0(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} S(t|r_0) \frac{dt}{t} - r_0 I_0 \cdot \log \frac{r}{r_0}.$$

Schreibt man jetzt A_0 für $-r_0 I_0$, so hat man (3.3) und durch Differentiation nach r die Relation (3.1). Für die Größe A_0 gilt nach dem vorher Gesagten die Ungleichung $|A_0| \leq \frac{1}{\pi} L(r_0)$. Bevor wir nun zum Beweis der wichtigen Abschätzung (3.12) übergehen, soll noch der Hilfssatz 2 bewiesen werden.

Es sei zunächst (3.4) als richtig angenommen. Dann gilt auch

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r|r_0)}{\log r} = K_0 < +\infty. \tag{3.14}$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (2.7) wegen $m(r, a) \geq 0$, daß für $a \in E$ ebenfalls

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r|r_0, a)}{\log r} \leq K < +\infty. \tag{3.15}$$

Es sei jetzt $r > r_1 > r_0$. Dann ist

$$n(r_1|r_0, a) \log \frac{r}{r_1} \leq \int_{r_1}^{r} n(t|r_0, a) \frac{dt}{t} \leq N(r|r_0, a),$$

und somit $n(r_1|r_0, a) \leq K$. Läßt man jetzt $r_1 \to \infty$ konvergieren, so erhält man $\lim_{r_1 \to \infty} n(r_1|r_0, a) \leq K$: Das bedeutet: zu jedem $a \in E$ existiert ein $r_a^* = r(a)$

[6]) Man vgl. z. B. SAKS, S.: Theory of the Integral. Hafner Publishing Comp. (Kein Erscheinungsjahr!), S. 81.

derart, daß für $|z|>r_a^*$ die Funktion $w(z)\neq a$ ist. Man betrachte jetzt das Gebiet $R_1: r_1\leq|z|\leq r<+\infty$ mit $r_1>\operatorname{Max}\{r_0^*, r_\infty^*\}$ und halte r_1 fest. Die beiden Berandungen $|z|=r_1$ bzw. $|z|=r$ von R_1 mögen mit Γ_1 bzw. Γ bezeichnet werden. Dann gilt für eine in $|z|>r_0$ eindeutige reguläre Funktion $f(z)$

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}=2f(z).$$

Beide Integrale sind hier im positiven Sinne zu nehmen. Wendet man jetzt den Residuensatz auf die Funktion $f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}$ $(z\in R_1)$ an, so erhält man

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}=0,$$

und somit wegen $\zeta\bar{\zeta}=r^2$ $(\zeta\in\Gamma)$ und $\zeta\bar{\zeta}=r_1^2$ $(\zeta\in\Gamma_1)$,

$$\overline{I_1(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{f(\zeta)}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\overline{f(\zeta)}\frac{r^2\zeta+r_1^2 z}{r^2\zeta-r_1^2 z}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Daraus folgt leicht

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Re\, f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\omega(f;z), \tag{3.16}$$

mit

$$\omega(f;z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_1}\left\{f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\overline{f(\zeta)}\frac{\zeta+z\varrho^2}{\zeta-z\varrho^2}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

und $\varrho=r_1:r$.

Man nehme jetzt an, $w=w(z)$ sei in $r_0\leq|z|<+\infty$ regulär und habe dort keine Nullstellen. Dann gibt es eine ganze Zahl k_0 derart, daß jeder Zweig der Funktion $g(z)=\log w(z)-k_0\log z$, eine in R_1 reguläre eindeutige Funktion ist. Aus (3.16) folgt dann für ein $z\in R_1$

$$\log\frac{|w|}{|z|^{k_0}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{|w|}{|\zeta|^{k_0}}Re\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\}d\varphi-Re\,\omega(g;z), \tag{3.17}$$

oder noch wegen $Re\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\}>0$ und $\log|w|\leq\log\sqrt{1+|w|^2}$,

$$\log|w|\leq|k_0|\log\frac{r}{|z|}+\frac{r+|z|}{r-|z|}m(r,\infty)+|\omega(g;z)|. \tag{3.18}$$

Man nehme jetzt $r=2|z|$ und berücksichtige die Ungleichung $m(r,\infty)\leq T(r|r_0)+K_1\log r$ mit $K_1>0$. Dann wird mit einem $m>0$

$$\log|w(z)|\leq m\log|z|+|\omega(g;z)|,$$

also

$$|w(z)|\leq|z|^m e^{|\omega(g;z)|}. \tag{3.19}$$

Diese Ungleichung beweist die Behauptung. Denn läßt man $|z| \to \infty$ konvergieren, so bleibt $|\omega(g; z)|$ beschränkt.

Nun gilt in $|z| > M$ die LAURENT-Darstellung

$$w(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.20}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} w(\zeta)\, \zeta^{-n} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (r > |z|).$$

Verwendet man hier (3.19), so stellt man durch den Übergang $r \to \infty$ leicht fest, daß von einem $n \geq n_0$ an alle a_n verschwinden müssen. Somit kann $z = \infty$ keine wesentliche Singularität sein.

Der Hilfssatz 2 erlaubt nun den (großen) CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz in folgender scharfer Form zu beweisen.

Satz 4. *Ist $w = w(z)$ eine in $r_0 < |z| < +\infty$ eindeutige und, mit Ausnahme von Polen, reguläre Funktion, so kann für jedes α $(0 < \alpha < 1)$ die Menge*

$$\{r \,|\, [w(z), a] < e^{-\alpha T(r|r_0, w)},\ r = |z| > r_0\}$$

keine endliche obere Schranke haben.

Der Beweis läuft genau wie der entsprechende Beweis von Satz 3. Hätte nämlich diese r-Menge eine endliche obere Schranke $r_1 > r_0$, so wäre $N(r|r_0, a)$ ein $O(\log r)$ und mithin, mit Rücksicht auf (2.7) und (3.3)

$$T(r|r_0, w) = m(r, a) + O(\log r).$$

Andererseits gilt für $r \geq r_1$, $m(r, a) \leq \alpha\, T(r|r_0, w)$, und somit muß $(1-\alpha)\, T(r, w) = O(\log r)$ sein. Danach kann $z = \infty$ höchstens ein Pol von $w(z)$ sein.

Bevor nun mit dem Beweis des Hilfssatzes 3 begonnen wird, sollen kurz folgende Bemerkungen hinzugefügt werden. Ist z_0 eine im endlichen liegende isolierte Singularität der eindeutigen Funktion $w = w(z)$, so führen die vorherigen Ausführungen, angewandt auf die Funktion $w\left(z_0 + \frac{1}{z}\right)$ $(|z| > M)$ zu folgendem Ergebnis:

Man definiere die Größe $m(r, z_0)$ für hinreichend kleines $|z - z_0| = r$, durch die Gleichung

$$m(r, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \log^+ |w(z)|\, d\varphi \qquad (z = z_0 + r\, e^{i\varphi}). \tag{3.21}$$

Ist dann $w(z)$ in einer punktierten Umgebung $0 < |z - z_0| < r_1$ regulär und gilt dort

$$m(r, z_0) = O\left(\log \frac{1}{r}\right), \tag{3.22}$$

so ist z_0 eine rationale Stelle von $w(z)$, also höchstens ein Pol. Diese Stelle ist eine hebbare, sobald an Stelle (3.22) die Gleichung $m(r, z_0) = O(1)$ gilt.

4. Beweis des Hilfssatzes 3

Wir setzen $w=u+iv$, $a=\alpha+i\beta$ mit reellen u, v, α, β und rechnen den Ausdruck $I=\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}$ aus, indem wir annehmen, daß a $(a\neq\infty)$ nicht auf der Punktmenge

$$C_0=\{w\,|\,w=w(z),\,|z|=r\} \tag{4.1}$$

liegt. Zunächst wird

$$I=\frac{u u_r+v v_r}{1+u^2+v^2}-\frac{(u-\alpha)u_r+(v-\beta)v_r}{(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2}.$$

Man setze jetzt

$$A=(1+|w|^2)\,|w-a|^2,$$

$$B=u\,|w-a|^2-(u-\alpha)\,|w|^2,$$

und

$$C=v\,|w-a|^2-(v-\beta)\,|w|^2.$$

Dann wird

$$I=-\frac{(u-\alpha)u_r+(v-\beta)v_r}{A}+\frac{Bu_r+Cv_r}{A}=A_1+A_2.$$

Mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung erhält man nun

$$|A_1|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,|w-a|}.$$

Ferner wird wegen $B^2+C^2=|w-a|^2|w|^2|a|^2$,

$$|A_2|\leq\frac{|w'|\,|w|\,|a|}{(1+|w|^2)\,|w-a|}, \tag{4.2}$$

und somit

$$|I|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}\,\frac{1+|w|\,|a|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|a|^2}}.$$

Da nun der letzte Faktor stets ≤ 1 ist, so wird schließlich

$$|I|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}. \tag{4.3}$$

Hieraus folgt erstens der noch fehlende Beweis von (3.12) und zweitens die Ungleichung

$$r\,|m'(r,a)|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\frac{|dw|}{(1+|w|^2)\,[w,a]} \tag{4.4}$$

für alle $a\notin C_0$.

Mit Hilfe dieser Abschätzung wird

$$|S(r|r_0,w)-n(r|r_0,a)|\leq C_0(a)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\frac{|dw|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}. \tag{4.5}$$

Daß man aus dieser Ungleichung die Beziehung (3.7) ableiten kann, ist wohl trivial und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ist $a = \infty$, so ist $[w, \infty]^{-1} = \sqrt{1+|w|^2}$ und somit $|I|$ kleiner oder gleich als $[w, \infty]^{-1} \cdot |w'| : 1+|w|^2$. Das beweist (4.4) für alle $a \in E$ [7]).

5. Vertiefungen des CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes

Ist $w(z)$ in der ganzen (offenen) z-Ebene meromorph, so liefert zunächst Hilfssatz 2 einen von der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung unabhängigen Beweis des durch 1 besprochenen NEVANLINNAschen Ergebnisses, wonach die Gl. (1.9) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß $w(z)$ eine rationale Funktion ist [8]). Wiederholt man jetzt die Rechnungen von 4, so erhält man die Abschätzung

$$|S(r, w) - n(r, a)| \leq \frac{L(r)}{\mu_0(r, a)}, \tag{5.1}$$

und zwar für alle r, für welche $w(z) \neq \infty$, $w(z) \neq a$ ($|z| = r$) ist. Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man folgende Sätze beweisen, die in der Richtung des CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes liegen.

Satz 5. *Die Funktion $w = w(z)$ möge in der Umgebung jedes im Endlichen liegenden Punktes z von meromorphem Charakter sein. Man definiere $\mu_0 = \mu_0(r, a)$ durch die Gleichung*

$$\mu_0 = \operatorname*{Min}_{|z|=r} [w(z), a]. \tag{5.2}$$

Divergiert dann

$$\int^{\infty} \mu_0^2 \frac{dr}{r}, \tag{5.3}$$

so gilt

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, a)}{S(r, w)} \geq 1 \geq \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, a)}{S(r, w)}. \tag{5.4}$$

Ferner gilt auf einer Menge Δ, die so beschaffen ist, daß $\int_{\Delta} \mu_0^2 \frac{dr}{r}$ divergiert,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, a)}{S(r, w)} = 1. \tag{5.5}$$

Eine andere Fassung des kleinen CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes wird durch nachstehenden Satz gegeben:

---

[7]) Eine weniger scharfe (und weniger geschickte) Abschätzung als die Abschätzungen (4.2) bzw. (4.4) habe ich zuerst in einer früheren Note [Zur Abschätzung der a-Stellen ganzer transzendenter Funktionen mit Hilfe der SHIMIZU-AHLFORSschen Charakteristik, Math. Ann. **120**, 581—584 (1945)] gegeben.

[8]) Den Beweis, daß für jede rationale Funktion $w(z)$, $T(r, w) = O(\log r)$ ist, findet der Leser bei NEVANLINNA, loc. cit. Fußnote 3.

Satz 6. *Ist*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,a)}{S(r,w)} < 1, \tag{5.6}$$

so ist das Integral (5.3) *konvergent*[9]).

Die Größe $\mu_0(r,a)$ kann man hier durch eine bessere ersetzen. Man definiere für alle r die Größe $\nu_0(r,a)$ durch die Gleichung

$$\nu_0(r,a) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{d\varphi}{[w,a]^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Dann gelten die Sätze 5 und 6 mit $\nu_0(r,a)$ statt $\mu_0(r,a)$. Diese Sätze nehmen für den allgemeinen Fall einer in der Umgebung von $z=\infty$ meromorphen Funktion $w(z)$ folgende Form an:

Satz 7. *Die Funktion $w=w(z)$ möge in der Umgebung $r_0\leq|z|<+\infty$ von $z=\infty$ regulär eindeutig und vom meromorphen Charakter sein. Divergiert dann für ein $a\in E$*

$$\int_{r_0}^{\infty}\nu_0(r,a)^2\frac{dr}{r}, \tag{5.8}$$

so gilt

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} \leq 1 \leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)}. \tag{5.9}$$

Ferner gilt auf einer Menge Δ, die so beschaffen ist, daß (5.8), erstreckt über Δ, divergiert,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} = 1. \tag{5.10}$$

Satz 8. *Gilt unter denselben Bedingungen für $w(z)$*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} < 1, \tag{5.11}$$

so ist (5.8) *konvergent.*

Wir beweisen lediglich die Sätze 7 und 8.

Es sei

$$I = \int_{|z|=r}\frac{|w'|}{1+|w|^2}\frac{|dz|}{[w,a]}. \tag{5.12}$$

Dann folgt daraus mit Rücksicht auf die SCHWARZsche Ungleichung

$$I^2 \leq \frac{2\pi r^2}{\nu_0^2}\int_{|z|=r}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}d\varphi, \tag{5.13}$$

also wegen (3.1)

$$I^2 \leq \frac{2\pi^2 r}{\nu_0^2}\frac{dS_0}{dr} \qquad (S_0 = S_0(r|r_0,w)). \tag{5.14}$$

[9]) Die Sätze 5 und 6 sind zuerst mit einem anderen Ausdruck an Stelle von $\mu_0(r,a)$ (mit $\mu_0(r,a) = \mathrm{Min}\{1, \mathrm{Min}\,|w(z)-a|\}$) in meiner in der Fußnote 7 zitierten Note bewiesen. Dort wird aber weder der Fall $a=\infty$ berührt, noch die invariante Form des Satzes bei Kugeldrehungen hervorgehoben.

Somit wird nach (4.4)

$$|S_0 - n(r|r_0, a)| \leq C_0(a) + \frac{\pi}{\nu_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.15}$$

Es bedeute jetzt I die Gesamtheit derjenigen Intervalle der Menge $r \geq r_0$, für die

$$\frac{1}{\nu_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}} > S_0^{\lambda} \qquad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$$

gilt. Dann ist

$$\int_I \nu_0^2 \frac{dr}{r} < \int_I \frac{dS_0}{S_0^{2\lambda}} < +\infty. \tag{5.16}$$

Ist also I' die zu I komplementäre Menge (in bezug auf die Menge $r \geq r_0$), so gilt

$$\frac{1}{\nu_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq S_0^{\lambda}$$

und somit dort

$$n(r|r_0, a) = S_0(r|r_0, w) + \pi\vartheta\, S_0^{\lambda}(r|r_0, w) \qquad (-1 \leq \vartheta \leq 1). \tag{5.17}$$

Aus dieser Gleichung können die Sätze 7 und 8 ohne Schwierigkeit abgeleitet werden.

Für den Satz 7 ist so zu schließen: Es sei

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r|r_0, a)}{S(r|r_0, w)} < 1. \tag{5.18}$$

Dann gilt von einem r an

$$n(r|r_0, a) \leq (1 - \delta)\, S(r|r_0, w) \qquad (0 < \delta < 1), \tag{5.19}$$

und dies widerspricht der Gl. (5.17). Die Beziehung (5.10) kann der Leser selbst beweisen. Analog schließt man für den Satz 8. Gilt (5.11), so kann offenbar (5.8) nicht divergieren. Sonst würde (5.9) gelten, deren rechte Seite zu (5.18) im Widerspruch steht.

6. Exkurs über den AHLFORSschen Gleichverteilungssatz in der Theorie der offenen Überlagerungsflächen

Die Abschätzung (4.4), angewandt auf eine in der ganzen (offenen) Ebene meromorphen Funktion $w(z)$, führt zu der Ungleichung

$$|S(r, w) - n(r, a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{|dw|}{(1 + |w|^2)\,[w, a]}, \tag{6.1}$$

sobald a der Menge (4.1) nicht angehört. Ist nun A eine beliebige, meßbare Teilmenge von E von positivem Maß, so kann man, indem man wieder in der in bezug auf (4.1) komplementären Menge E_0 operiert, und den FUBINIschen Satz (vorsichtig) anwendet, die Ungleichung

$$S(r, w) = \frac{1}{mA}\int_A n(r, a)\, d\omega(a) + \vartheta\, L(r) \tag{6.2}$$

beweisen, wobei $mA^* = \int_A d\omega(a)$ ist, und ϑ eine Konstante ist, deren absoluter Betrag höchstens $1 : mA^*$ werden kann. Beim Beweis von (6.2) ist derselbe Weg zu beschreiten, der in der ersten Hälfte von 3. für die Endlichkeit von I_0 eingeschlagen wurde. Die angegebene obere Grenze für ϑ erhält man aus der Ungleichung

$$\frac{1}{mA^*}\int_A \frac{d\omega(a)}{[w,a]} \leq \frac{1}{mA^*}\int_{E_0} \frac{d\omega(a)}{[w,a]} = \frac{2\pi}{mA^*}. \tag{6.3}$$

Die Deutung des Integrals links in (6.2) ist einfach und bekannt. Dieses liefert den Inhalt desjenigen Teiles, des (stereographisch auf R abgebildeten) durch die Funktion $w(z)$ erzeugten Flächenstückes

$$F_r : \{w \mid w = w(z),\ 0 \leq |z| \leq r\},$$

dessen Spurpunkte auf A fallen. Bekanntlich gilt

$$\int_A n(r,a)\, d\omega(a) = \int_{E_A} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, d\sigma, \tag{6.4}$$

wobei E_A die Menge

$$\{z \mid 0 \leq |z| \leq r,\ w(z) \in A\} \tag{6.5}$$

bedeutet.

Man setze nun allgemein für eine meßbare Menge A mit $mA^* > 0$

$$S(r,w,A) = \frac{1}{mA^*}\int_A n(r,a)\, d\omega(a). \tag{6.6}$$

Dann folgt aus (6.2) folgender Satz:

Satz 9. *Es seien A_1, A_2 zwei meßbare Teilmengen von E mit $mA_1^* > 0$, $mA_2^* > 0$. Dann gilt*

$$|S(r,w,A_1) - S(r,w,A_2)| \leq k\, L(r), \tag{6.6}$$

mit einer lediglich von mA_1^* und mA_2^* abhängigen, endlichen Konstante k.

Ist A ein Gebiet, so kann man mit AHLFORS[10]), der für diesen Fall (6.2) zuerst bewiesen hat, das Integral rechts in (6.2) in zwei Summanden zerlegen, die von dem Beitrag der sog. Zungen bzw. Inseln herrühren. Zu der ersten Gruppe der Blätter von F_r gehören bekanntlich alle solche (zusammenhängende) Blätterteile, deren Relativränder Spuren in A haben. Blätter, die in bezug auf A keinen Rand aufweisen, die sog. Inseln, liefern dann rechts in (6.2) einen ganzzahligen Betrag $n(r,A)$, der mit der Anzahl der über A liegenden Blätter der Insel zusammenfällt. Verwendet man für den Zungenbeitrag die Bezeichnung $m(r,A)$, so folgt aus (6.2) die AHLFORSsche Gleichung

$$m(r,A) + n(r,A) = S(r,w) + \vartheta\, L(r), \tag{6.7}$$

[10]) AHLFORS, L.: Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta math. **65**, 157—194 (1935).

welche die Gleichverteilung der Überdeckung von R durch die von $w(z)$ erzeugte RIEMANNsche Fläche zum Ausdruck bringt. Wir gehen darauf nicht näher ein.

7. Die NEVANLINNAsche Defektrelation

Es dürfte zum Schluß nicht ohne Interesse sein, die klassische NEVANLINNAsche Defektrelation mit Hilfe der lokalen Wachstumscharakteristik in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität z_0 (die wir ohne weiteres gleich ∞ annehmen können), aufzustellen. Wir benutzen dabei die Methode, die AHLFORS[11]) für den Fall einer meromorphen Funktion gegeben hat.

Es seien $a_1, \ldots, a_q$ $(q > 2,\ a_q = \infty)$ q voneinander verschiedene, feste komplexe Zahlen. Man setze

$$\varrho(a) = C\,\Pi^2 \log^{-2}\Pi \qquad \left(\Pi = \prod_1^q [a, a_k]^{-1}\right), \tag{7.1}$$

und wähle die Konstante $C = C(a_1, \ldots, a_q)$, so daß $\int_E \varrho(a)\, d\omega(a) = 1$ wird. Das Integral links ist hier als LEBESGUEsches Integral einer summierbaren Funktion aufzufassen.

Seine Existenz wird durch den Exponenten -2 beim Logarithmus gewährleistet. Es sei jetzt r_0 so groß gewählt, daß in $r_0 \leq |z| < +\infty$ keine wesentlichen Singularitäten von $w(z)$ liegen. Man kann auch ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß auf $|z| = r_0$, $w(z) \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, q)$ ist. Es sei jetzt für $r_0 \leq r$

$$S_\varrho(r\,|\,r_0, w) = \int_{r_0}^{r} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, \varrho(w)\, d\sigma \tag{7.2}$$

und

$$T_\varrho(r\,|\,r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S_\varrho(t\,|\,r_0, w)\, \frac{dt}{t}\,. \tag{7.3}$$

Dann kann man die fundamentale Ungleichung von AHLFORS folgendermaßen verallgemeinern:

Hilfssatz 4. *Es existiert eine Konstante C_0 derart, daß*

$$T_\varrho(r\,|\,r_0, w) \leq T(r\,|\,r_0, w) + C_0 \log r \tag{7.4}$$

gilt.

Beweis. Man wähle für den Augenblick ein $r_1\,(r_0 < r_1)$ derart, daß auf $|z| = r_1$ $w(z) \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ wird. Setzt man dann allgemein

$$I(r, w) = \int_E \varrho(a) \left\{ \int_{|z|=r} \log \frac{1}{[w, a]}\, d\varphi \right\} d\omega(a),$$

[11]) AHLFORS, L.: loc. cit. Fußnote 1.

so sind offenbar die Integrale $I(r_0, w)$ und $I(r_1, w)$ endlich. Sind nun diese beiden Integrale endlich, so folgt aus der Gl. (2.7), da $T_0(r_1|r_0, w) = T(r_1|r_0, w) + A_0 \log \frac{r_1}{r_0}$, also endlich ist und

$$\int_E N(r|r_0, a)\, \varrho(a)\, d\omega(a) = \int_{r|r_0} S_\varrho(t|r_0, w)\, \frac{dt}{t}, \tag{7.5}$$

daß

$$I_\varrho = \int_{E_0} \varrho(a)\, m'(r_0, a)\, d\omega(a) \tag{7.6}$$

ebenfalls endlich sein muß.

Das kann man auch direkt so zeigen, indem man (4.4) für $r = r_0$ zugrunde legt und beachtet, daß wegen

$$\operatorname{Min}_{|z|=r_0} [w, a_k] = \delta > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

das Integral

$$\int_E \varrho(a) \frac{d\omega(a)}{[w, a]}$$

endlich bleibt. Dabei ist dieses wieder als LEBESGUEsches Integral, wie in den früheren Fällen $\left(\varrho = \frac{1}{\pi}\right)$ zu nehmen.

Die Konstante I_ϱ hängt offenbar lediglich von $a_1, \ldots, a_q$ und den Werten der Funktion $w(z)$ auf $|z| = r_0$ ab und ist somit von dem speziellen Wert des Hilfswertes r_1 von r unabhängig. Wir haben also

$$T_0(r|r_0, w) \geq T_\varrho(r|r_0, w) - C_0 \log \frac{r}{r_0}, \tag{7.7}$$

und mit Rücksicht auf (3.3) von einem r an

$$T_\varrho(r|r_0, w) \leq T(r|r_0, w) + C_1 \log r, \tag{7.8}$$

mit $C_0,\ C_1 > 0$.

Mit Hilfe dieses Hilfssatzes kann jetzt die NEVANLINNAsche Defektrelation mit Hilfe der lokalen Charakteristik $T(r|r_0, w)$ leicht aufgestellt werden.

Es bezeichnen $n'(r|r_0, 0)$ bzw. $n'(r|r_0, \infty)$ die Anzahlen der Nullstellen bzw. Pole von $w'(z)$ in $r_0 \leq |z| \leq r$. Man setze

$$n_1(r|r_0) = n'(r|r_0, 0) - n'(r|r_0, \infty) + 2n(r|r_0, \infty)$$

und

$$\Phi = \Phi(r, \varphi) = \frac{|w'|}{1 + |w|^2} \sqrt{\varrho(w)} \log H.$$

Ferner setze man

$$Q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \Phi\, d\varphi.$$

Dann wird

$$(q - 2)\, S_0(r|r_0, w) - \sum_1^q n(r|r_0, a_k) + n_1(r|r_0) = r\, Q'(r)|_{r_0}^r,$$

vorausgesetzt, daß auf $|z| = r$, $w(z) \neq a_k$ ist. Da $Q(r)$ für solche r noch stetig ist, kann man hier nach vorheriger Division durch r integrieren und man erhält mit Rücksicht auf (3.5)

$$(7.9) \qquad (q-2)\, T(r|r_0) = \sum_1^q N(r|r_0, a_k) - N_1(r|r_0) + Q(r) + O(\log r).$$

Dabei ist

$$N_1(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} n_1(t|r_0)\, \frac{dt}{t}.$$

Wenn ich hier die klassische Abschätzung von AHLFORS für $Q(r)$ skizziere, so geschieht dies nur, um dem Leser das Nachschlagen jener Arbeit zu ersparen.

Zunächst wird

$$Q(r) \leq \log \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \frac{|w'|}{1+|w|^2} \sqrt{\varrho(w)}\, d\varphi \right\} + q \log T(r|r_0) + O(\log r),$$

also mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung und mit Rücksicht auf den Hilfssatz 3

$$(7.10) \qquad Q(r) \leq \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{S'_\varrho(r|r_0)}{2\pi r} \right\} + o\left(T(r|r_0)\right).$$

Die weitere Abschätzung kann auf Grund folgenden Hilfssatzes erbracht werden:

Hilfssatz 5. *Die Funktion $g(r)$ möge im Intervall*

$$(7.11) \qquad I_0 : r_0 \leq r < +\infty$$

positiv, stetig und monoton wachsend sein. Ferner sei $g(r)$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich im Endlichen nicht häufen, differenzierbar. Dann ist das Maß der Menge

$$(7.12) \qquad E_r = \{x \,|\, g'(x) > g^2(x),\ r_0 \leq x \leq r\}$$

nach oben beschränkt.

In der Tat gilt

$$\int_{E_r} dx \leq \int_{E_r} \frac{dg}{g^2} \leq \frac{1}{g(r_0)} < +\infty.$$

Man führe jetzt für den Augenblick die Veränderliche $\xi = \log r$ ein und beachte, daß $r\, S'_\varrho(r|r_0) = \frac{d^2}{d\xi^2}\, T_\varrho(r|r_0)$ ist. Wendet man den vorigen Hilfssatz an, so sieht man leicht, daß die Doppelungleichung

$$(7.13) \qquad \frac{d^2}{d\xi^2}\, T_\varrho(r|r_0) \leq \left(\frac{d}{d\xi}\, T_\varrho(r|r_0)\right)^2 \leq T_\varrho(r|r_0)^4,$$

auf einer Teilmenge I_0^* von I_0 erfüllt sein muß, für die $\int_{I_0^*} dx$ unendlich ist. Hierdurch wird mit Rücksicht auf (7.10)

$$Q(r) \leq \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{T_Q(r|r_0)^4}{2\pi r^2} \right\} + o\big(T(r|r_0)\big),$$

für alle $r \in I_0^*$, und somit dort $Q(r) = o\big(T(r|r_0)\big)$. Es wird also

$$(7.14) \qquad (q-2)\, T(r|r_0) \leq \sum_1^q N(r|r_0, a_k) - N_1(r|r_0) + o\big(T(r|r_0)\big),$$

sofern r in I_0^* liegt. Daß man die NEVANLINNAsche Defektrelation

$$(7.15) \qquad \sum_1^q \delta(r_0|a_k) + \sum_1^q \vartheta(r_0|a_k) \leq 2,$$

mit

$$\delta(r_0|a_k) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r|r_0, a_k)}{T(r|r_0, w)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

und entsprechender Definition der Verzweigungsindizes $\vartheta(r_0|a_k)$ wie im klassischen Fall, ableiten kann, ist trivial und bedarf hier keiner Erläuterung.

Bevor ich diese Arbeit schließe, will ich noch kurz zeigen, wie man mit Hilfe der lokalen SHIMIZU-AHLFORSschen Charakteristik die NEVANLINNAsche Defektrelation (7.15) auf die nichtintegrierten Anzahlfunktionen $n(r|r_0, a_k)$ übertragen kann. Dabei folge ich einer Methode, die ich zuerst in einer vor einigen Jahren publizierten Note[12]) entwickelt habe.

Man kehre zu der nichtintegrierten Gl. (7.9) zurück und bezeichne jedes Mal mit $n_1(r|r_0, a_k)$ die Anzahl der a_k-Stellen von $w(z)$ innerhalb R_{r,r_0}, gezählt mit der um Eins verminderten Vielfachheit. Dann ist

$$n_1(r|r_0) \geq \sum_1^q n_1(r|r_0, a_k)$$

und somit wird zunächst

$$(7.16) \qquad (q-2)\, S(r|r_0, w) - \sum_1^q \{n(r|r_0, a_k) - n_1(r|r_0, a_k)\} \leq r\, Q'\Big|_{r_0}^{r}.$$

Es werde nun angenommen, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für alle genügend großen $r\,(r \geq r_1 > r_0)$, für die $Q'(r)$ existiert, die Ungleichung

$$(7.17) \qquad r\, Q'(r) \geq \varepsilon\, S(r|r_0, w)$$

gilt. Dann würde daraus durch Integration von $r = r_1$ bis r die Ungleichung

$$(7.18) \qquad Q(r) - Q(r_1) \geq \varepsilon \int_{r_1}^{r} S(t|r_0, w) \frac{dt}{t}$$

---

[12]) Zu NEVANLINNAs zweitem Fundamentalsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. (Annal. Acad. Sci. fenn., Ser. A, Nr. 151 **1953**, 8 S.)

folgen und somit, mit Rücksicht auf (7.10) von einem r an

$$\log\left\{\frac{S'_\varrho(r|r_0,w)}{2\pi r}\right\} \geq \varepsilon\, T(r|r_0,w) \quad (r \geq r_2 \geq r_1). \tag{7.19}$$

Daraus kann man aber wieder einen Widerspruch ableiten. In der Tat ist mit einem $C>0$

$$e^{\varepsilon T} \geq C_1 T^8 \qquad \left(T = T(r|r_0,w)\right),$$

und somit

$$T_\varrho(r|r_0,w) \geq C_1 \int_{r_2}^{r}\left\{\int_{r_2}^{t} T^8\, d\lambda\right\}\frac{dt}{t} + O(\log r).$$

Berücksichtigt man nun die Ungleichung (7.8) und beachtet man, daß bei geeignetem $C_2>0$ $\log r < C_2 T$ ist, so wird mit einem $C_3>0$

$$T(r|r_0,w) \geq C_3 \int_{r_2}^{r}\left\{\int_{r_2}^{t} T^8\, d\lambda\right\}\frac{dt}{t} = C_3 I(r). \tag{7.20}$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun leicht

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} \geq C_4 I^8 \qquad \left(I = I(r)\right).$$

Dadurch sind wir in den Anwendungsbereich des Hilfssatzes 5 gelangt und haben zugleich die Existenz von mindestens einer Folge (r_n) $(r_n \to \infty,$ $n = 1, 2, \ldots)$ nachgewiesen, für die $r\,Q'(r) \leq \varepsilon\, S(r|r_0,w)$ gilt. Da nun $S(r|r_0,w) \to \infty$ konvergiert, erhält man

$$\varliminf_{r\to\infty}\left\{(q-2) - \sum_1^q \frac{n(r|r_0,a_k) - n_1(r|r_0,a_k)}{S(r|r_0,w)}\right\} \leq 0\ ^{13}),$$

oder

$$q-2 \leq \varlimsup_{r\to\infty}\left\{\sum_1^q \frac{n(r|r_0,a_k) - n_1(r|r_0,a_k)}{S(r|r_0,w)}\right\}.$$

Man definiere jetzt allgemein bei gegebenem $a \in E$ die (obere) Stellendichte $\delta_0(r_0|a)$ von a in der Umgebung $r_0 \leq |z| < +\infty$ von $z=\infty$ durch die Gleichung

$$\delta_0(r_0|a) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r|r_0,a) - n_1(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)}. \tag{7.21}$$

Danach wird der Zähler der rechten Seite dadurch gebildet, daß man lediglich die Stellen, wo $w(z)=a$ wird, in Betracht zieht, ohne die Vielfachheit der entsprechenden Wurzeln zu berücksichtigen. Es wird also

$$q-2 \leq \sum_1^q \delta_0(r_0|a_k),$$

[13]) Aus der Nichterfüllbarkeit von (7.17) kann nur geschlossen werden, daß die linke Seite hier höchstens Null sein kann. Denselben Schluß habe ich auch in der in [12]) erwähnten Note gezogen.

und somit kann der PICARD-NEVANLINNAsche Satz auch folgendermaßen formuliert werden:

Satz 10. (PICARD-NEVANLINNA). *Die Funktion $w=w(z)$ möge in der Umgebung $r_0 \leq |z| < +\infty$ von $z=\infty$ von meromorphem Charakter sein. Ist dann $z=\infty$ eine wesentliche Singularität für $w(z)$, so gilt stets für q verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_q$ $(a_q=\infty, q \geq 3)$*

$$\sum_1^q \delta_0^{\sim}(r_0|a_k) \geq q-2. \tag{7.22}$$

Ist $r_0=0$ und somit $w(z)$ in der gesamten (offenen) Ebene meromorph, so geht (7.22) (und somit auch der ganze Satz 10) in den klassischen PICARD-NEVANLINNAschen Satz über.

Herrn GUNNAR HALLSTRÖM, der einen Teil des Manuskripts gelesen hat, habe ich für einige Bemerkungen zu danken. Ebenfalls Herrn K. HABETHA für Hilfe bei der Korrekturarbeit.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 14. Juli 1956)

LINGENBERG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 409—446 (1957)

Zur Differentialgeometrie der Flächen, die eine eingliedrige projektive Gruppe in sich gestatten und über Allgemeine Projektivrotationsflächen *

Von

WALTER LINGENBERG

Einleitung 409
§ 1. Vorbemerkungen 411
§ 2. Integration der Ableitungsgleichungen 413
§ 3. Über die Bestimmung von Π-Flächen durch vorgegebene Eigenschaften 418
§ 4. Projektiv abwickelbare Π-Flächen 420
§ 5. Isotherm-asymptotische Π-Flächen 424
§ 6. Einige allgemeine Eigenschaften der APR-Flächen 427
§ 7. Flächen, deren kanonische Normalen durch zwei feste Geraden laufen 430
§ 8. Integration einer speziellen PICARDschen Differentialgleichung 434
§ 9. Auf Projektivminimalflächen abwickelbare APR-Flächen 439

Einleitung

Die Flächen, die eine eingliedrige stetige Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten[1]), nennen wir hier, sofern sie keine Regelflächen sind, der Kürze halber *Π-Flächen*. Beispiele solcher Flächen sind: gewöhnliche und affine Rotationsflächen (mit Ausnahme von Affinsphären), Schraubenflächen und Spiralflächen. Diese Flächenklassen dienen bekanntlich oft dazu, sich Beispiele von Flächen mit vorgegebenen differentialgeometrischen Eigenschaften zu verschaffen, da statt der im allgemeinen bei solchen „Umkehrfragen" auftretenden partiellen Differentialgleichungen hier nur gewöhnliche Differentialgleichungen zu integrieren sind.

Es ist Aufgabe dieser Arbeit — ausgehend von einem Satz von FUBINI — hierzu allgemein zu zeigen, wie man bei Π-Flächen Umkehrfragen auf die Integration einer, bzw. höchstens zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzieren kann, und diese Integration in einigen wichtigen Fällen auch soweit auszuführen, daß die Parameterdarstellung der gesuchten Flächen in geschlossener Form angegeben werden kann. Hierbei nehmen die Π-Flächen, bei denen die Bahnkurven der zugehörigen eingliedrigen Gruppen in den Ebenen eines Büschels liegen, eine Sonderstellung ein. Wir nennen diese

*) Die Arbeit ist aus der Inauguraldissertation (Kiel 1950) des Verfassers entstanden. Für die Anregung zur Beschäftigung mit dem Thema und stets bereitwilligst gewährte Hilfe ist der Verfasser Herrn Prof. K. H. WEISE zu tiefstem Dank verpflichtet.

[1]) Diese Flächenklasse wurde besonders von LIE betrachtet. Vgl. [*13*]. (Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die entsprechenden Nummern des Literaturverzeichnisses am Schluß der Arbeit.)

Allgemeine Projektivrotationsflächen (APR-Flächen) und geben in einem besonderen Abschnitt Kennzeichnungen für sie an.

In der Behandlung der Parameterfrage ist die vorliegende Arbeit durchaus unorthodox. Die Resultate der projektiven Flächentheorie übernehmen wir in der Form, wie sie der von BOL für Asymptotenlinienparameter angegebene Kalkül der *halbinvarianten Differentiation* liefert[2]). Hierbei ergeben sich nämlich unter Verwendung des *Wilczynskischen Bezugssystemes* besonders einfache Kennzeichnungen einer ganzen Reihe von projektiv wichtigen Flächenklassen durch das Verschwinden gewisser Halbinvarianten. Dagegen benutzen wir für Integrationsprozesse ein Parameternetz, das konjugiert zu den Asymptotenlinien liegt und dessen eine Schar von Parameterlinien aus den Bahnkurven der zugehörigen eingliedrigen Gruppen besteht. Das ist für unsere Zwecke bequemer, als direkt die für allgemeine Parameter gültigen Formeln — etwa nach BOL [4] — auf die genannten konjugierten Parameter zu spezialisieren.

Kennt man ein vollständiges System von Halbinvarianten β, γ, l, m für eine Π-Fläche, so läßt sich (§ 2) die Integration des Systems der Ableitungsgleichungen außer bei APR-Flächen auf Quadraturen zurückführen. Bei den letzteren bleibt noch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zu integrieren. Da die Π-Flächen von einer Funktion von einer Veränderlichen und den die eingliedrige Gruppe festlegenden Konstanten abhängen, kann man an das System der Halbinvarianten β, γ, l, m noch eine Forderung stellen. Das Problem, Π-Flächen zu bestimmen, die durch das Verschwinden einer Halbinvarianten gekennzeichnet sind, läßt sich dann (§ 3) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren, durch deren Integration man ein vollständiges System von Halbinvarianten β, γ, l, m der gesuchten Flächen bekommt.

In § 4 bestimmen wir die projektiv abwickelbaren Π-Flächen. In Erweiterung eines Resultates von BORŮVKA [6] zeigen wir, daß außer den sämtlich projektiv abwickelbaren APR-Flächen die auf Π-Flächen abwickelbaren Π-Flächen in geschlossener Form mit Hilfe der Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen angegeben werden können. Ferner existieren noch Π-Flächen, die auf die von ČECH [9] bestimmten Flächen mit einer eingliedrigen Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich abwickelbar sind. Als Spezialfall der — sämtlich projektiv abwickelbaren — isotherm-asymptotischen Π-Flächen werden in § 5 diejenigen projektiv transformierten eigentlichen Affinsphären angegeben, die mit ihrem metrischen Vorbild, der Kugel, auch die Eigenschaft gemein haben, durch die Transformationen einer wenigstens eingliedrigen Gruppe von projektiven Transformationen in sich überzugehen.

Der zweite Teil der Arbeit enthält die speziell auf APR-Flächen bezüglichen Resultate. In § 6 werden zunächst einige allgemeine Tatsachen über

[2]) BOL [2], [3]. Die Kenntnis dieser Arbeiten wird hier vorausgesetzt, insbesondere schließen wir uns den Bolschen Bezeichnungen an. Außerdem vgl. man BOL [4] und dort insbesondere S. 290ff.

die APR-Flächen, die aus den Ergebnissen des ersten Teils folgen, zusammengestellt. Sind speziell die Bahnkurven Kegelschnitte, so kommt man zu den von Süss [19] und Su [17] gekennzeichneten *Affinrotationsflächen* (AR-Flächen) und ihren Projektivtransformierten, den *Projektivrotationsflächen* (im eng ren Sinne) (PR-Flächen), so daß diese Bezeichnungen auch vom gruppentheoretischen Standpunkt aus gerechtfertigt erscheinen. Umgekehrt ist jedoch die Süsssche Kennzeichnung der AR-Flächen durch ihre Affinnormalen nicht projektivinvariant. Hierzu zeigen wir aber in § 7, daß die PR-Flächen durch Forderungen an ihre projektiven Normalenkongruenzen definiert werden können: *Laufen sämtliche kanonischen Normalen erster und zweiter Art einer Fläche durch je eine feste Gerade, so ist diese eine PR-Fläche und umgekehrt.*

In den §§ 8, 9 werden Umkehrfragen für APR-Flächen behandelt. Es zeigt sich, daß die in einigen projektiv wichtigen Flächenklassen vorkommenden APR-Flächen einfache Parameterdarstellungen gestatten, die wieder außer elementaren Funktionen höchstens die Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen enthalten.

§ 1. Vorbemerkungen

Mit den Bezeichnungen wie bei Bol [3] sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ der Ortsvektor einer auf Asymptotenlinienparameter bezogenen Fläche im dreidimensionalen projektiven Raum mit homogenen Koordinaten, für den bei geeigneter Normierung die Ableitungsgleichungen[3])

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_{uu} = \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{vv} = \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x}, \end{cases} \qquad \left(\mathfrak{x}_u \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} \text{ usw.}\right)$$

mit den Integrabilitätsbedingungen

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} 2\beta_v \gamma + \beta \gamma_v = \gamma_{uu} + 2\chi_u, \\ \beta_u \gamma + 2\beta\gamma_u = \beta_{vv} + 2\pi_v, \\ \pi_{vv} + \beta\chi_v + 2\beta_v \chi = \chi_{uu} + \gamma\pi_u + 2\gamma_u \pi, \end{cases}$$

gelten.

Sind λ, μ gegebene *Grundhalbinvarianten* mit den Gewichten $(-1, a_0)$ bzw. $(b_0, -1)$, so sind nach Bol [3] § 75 die *halbinvarianten Ableitungen* einer Halbinvarianten A vom Gewicht (a, b) definiert durch

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} A_1 = \lambda^{-a} \dfrac{\partial}{\partial u} (\lambda^a A) \equiv A_u + a \dfrac{\lambda_u}{\lambda} A, \\ A_2 = \mu^{-b} \dfrac{\partial}{\partial v} (\mu^b A) \equiv A_v + b \dfrac{\mu_v}{\mu} A. \end{cases}$$

[3]) Bei Beschränkung auf das reelle Gebiet gelten die Formeln zunächst nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen, doch läßt sich diese Einschränkung für unsere Untersuchungen beseitigen.

Wir kennzeichnen halbinvariante Ableitungen durch angehängte fette Indizes. Speziell ist $\mathfrak{x}$ halbinvariant und man erhält mit Benutzung von (1) die halbinvarianten Ableitungsgleichungen (BOL [3] Formeln (76.12))

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_{11} = \beta \mathfrak{x}_2 + l \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{y} + p \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{21} = \mathfrak{y} + q \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} = \gamma \mathfrak{x}_1 + m \mathfrak{x}. \end{cases}$$

Die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{12}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{21})$ heißt erste Relativnormale der Fläche bezüglich der Grundhalbinvarianten λ, μ. $\mathfrak{y}$ sei auf der LIE-F_2 des Flächenpunktes gelegen. Im WILCZYNSKIschen System ($\lambda = \gamma, \mu = \beta$) ist dann nach BOL [3], Formeln (76.6), (118.4) und (118.6)

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} p = \frac{1}{2}\left(\beta\gamma - \left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)_v\right), \\ q = \frac{1}{2}\left(\beta\gamma - \left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)_u\right), \\ l = \pi + \frac{1}{2}\beta_v - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)_u - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)^2, \\ m = \chi + \frac{1}{2}\gamma_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)_v - \frac{1}{4}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)^2. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen (2) lassen sich nun durch die Gleichungen

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{cases} p_1 = l_2 \\ q_2 = m_1 \\ \beta m_2 = \gamma l_1 \end{cases}$$

ersetzen.

Gibt man sich β, γ, π, χ bzw. β, γ, l, m als Funktionen von u und v vor und sind die Gln. (2) bzw. (6) befriedigt, so ist dadurch eine Fläche bis auf projektive Transformationen eindeutig festgelegt. Insbesondere erhält man eine Π-Fläche, wenn β, γ, l, m Lösungsfunktionen von (2) sind, die nur von $u + v$ abhängen, da dann die Abbildungen $\bar{u} = u + c$, $\bar{v} = v - c$ mit beliebigem, konstantem c der Fläche auf sich lediglich projektive Transformationen sein können.

Umgekehrt gilt der für unsere Betrachtungen grundlegende

Hauptsatz. *Gestattet eine auf Asymptotenlinienparameter bezogene Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, die keine Regelfläche ist, eine ein- oder zweigliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich, so läßt sich durch geeignete Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien erreichen, daß β, γ, π, χ bzw. β, γ, l, m nur von $u + v$ abhängen (oder Konstante sind). Die Parametertransformationen $\bar{u} = u + c$, $\bar{v} = v - c$ mit beliebigem c entsprechen dann den Transformationen der ein-*

gliedrigen Gruppe (bzw. einer eingliedrigen Untergruppe) und die Kurven $u+v=\text{const}$ *sind deren Bahnkurven auf der Fläche*[4]).

Gruppen, die höher als zweigliedrig sind, können nur bei Regelflächen auftreten — vgl. FUBINI [10] S. 32f.

§ 2. Integration der Ableitungsgleichungen

1. β, γ, l, m bilden ein vollständiges System von Halbinvarianten für die Fläche $\mathfrak{x}$ in dem Sinne, daß jede Halbinvariante auf der Fläche durch β, γ, l, m und deren halbinvariante Ableitungen ausgedrückt werden kann. Im Hinblick auf unsere Hauptfrage wollen wir nun eine Darstellung der Π-Flächen in Abhängigkeit von diesen Halbinvarianten angeben, d.h. wir wollen die Ableitungsgleichungen (1.1) integrieren[5]).

Dazu führen wir auf unserer Fläche konjugierte Parameter ein, und zwar soll die eine Schar von Parameterlinien aus Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe, die die Fläche in sich überführt und die andere Schar aus den zu diesen bezüglich der Asymptotenlinien konjugierten Kurven bestehen. Nach dem Hauptsatz aus § 1 kann die Skala auf den Asymptotenlinien bei den Π-Flächen so gewählt werden, daß β, γ, π, χ nur von $t=u+v$ abhängen. Die Kurven $t=\text{const}$ sind dann die genannten Bahnkurven und daher $s=u-v=\text{const}$ die zweite Schar unserer neuen Parameterlinien[6]). Aus (1.1) leitet man nun mit den Bezeichnungen

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \mathsf{B}=\beta+\gamma, & \Pi=\pi+\chi, & t=u+v, \\ \Gamma=\beta-\gamma, & \Phi=\pi-\chi, & s=u-v, \end{cases}$$

durch Addition und Subtraktion der beiden Gln. (1.1) das System[7])

$$(2.2)\qquad \begin{cases} 2\mathfrak{x}_{tt}+2\mathfrak{x}_{ss}=\mathsf{B}(t)\,\mathfrak{x}_t-\Gamma(t)\mathfrak{x}_s+\Pi(t)\,\mathfrak{x}, \\ 4\mathfrak{x}_{st}=\Gamma(t)\,\mathfrak{x}_t-\mathsf{B}(t)\,\mathfrak{x}_s+\Phi(t)\,\mathfrak{x}, \end{cases}$$

[4]) Der Beweis des Hauptsatzes ist in den Arbeiten von FUBINI [10] (§ 8, § 8^{bis}) und CECH [9] sowie in [11], Kap. 8 enthalten. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß die Annahme, die Asymptotenlinien seien Bahnkurven einer eingliedrigen, projektiven Gruppe auf der Fläche, zunächst zu der Folgerung führt, daß β, γ, l, m (eventuell nach Vertauschung von u und v) nur von u allein abhängen. Durch Ausnutzung der Integrabilitätsbedingungen ergibt sich dann, daß β, γ, l, m zu Konstanten gemacht werden können.

[5]) Irgendeine Parameterdarstellung der Π-Flächen anzugeben, bereitet keine Schwierigkeit, da man sich ja jede Π-Fläche aus einer (sogar ebenen) Kurve, die nicht Bahnkurve ist, durch Anwendung der Transformationen der eingliedrigen Gruppe erzeugt denken kann.

[6]) Unsere Parameter sind damit bis auf lineare Transformationen der Form $\bar{t}=at+b$, $\bar{s}=as+c$ (a, b, c bedeuten Konstante) festgelegt.

[7]) Zunächst galten unsere Betrachtungen nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen. Wie man sich überlegt, erhält man aber elliptisch gekrümmte Flächen, wenn man bei reellem s die Größen t, B und Φ als rein imaginär, Γ und Π dagegen als reell annimmt.

und ebenso aus (1.2) die Integrabilitätsbedingungen

$$(2.3)\qquad \begin{cases} 4\Pi' + 2\mathfrak{B}'' = 3(\mathfrak{B}\mathfrak{B}' - \Gamma\Gamma'), \\ 4\Phi' + 2\Gamma'' = \mathfrak{B}'\Gamma - \mathfrak{B}\Gamma', \\ 2\Phi'' + \Pi'\Gamma + 2\Pi\Gamma' - \Phi'\mathfrak{B} - 2\Phi\mathfrak{B}' = 0 \end{cases}$$

her (Striche bedeuten Differentiationen nach t).

2. Die Gln. (2) und (3) zusammen bilden nun ein vollständiges System von Differentialgleichungen. Um es zu integrieren, nutzen wir die Tatsache aus, daß die Kurven $t = \text{const}$ auf unseren Flächen jeweils Bahnkurven einer eingliedrigen stetigen Gruppe von projektiven Transformationen, also *W-Kurven*, sind und ihr Ortsvektor daher einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt — vgl. z. B. BOL [3] § 51. Um diese Differentialgleichung aufzustellen, denke man sich (2) nur für eine Komponente z von $\mathfrak{x}$ angeschrieben. Man differenziere dann die erste Gl. (2) nach s, die zweite nach t, eliminiere zwischen beiden z_{sti} und mit Hilfe der beiden Gln. (2) selbst noch z_{tt} und z_{st}. Es ergibt sich mit Benutzung von (3)

$$(2.4)\qquad \begin{cases} z_{sss} = -\tfrac{1}{4}\Gamma z_{ss} + \tfrac{1}{16}(8\Pi + 4\mathfrak{B}' + 2\Gamma^2 - 3\mathfrak{B}^2) z_s + \\ + \tfrac{1}{16}(-4\Phi - 4\Gamma' + \mathfrak{B}\Gamma) z_t + \tfrac{1}{16}(3\mathfrak{B}\Phi - 2\Gamma\Pi + \mathfrak{B}\Gamma' - \mathfrak{B}'\Gamma + 2\Gamma'') z. \end{cases}$$

Differenziert man nochmals nach s und berücksichtigt (4) und (2), so folgt die gesuchte Differentialgleichung

$$(2.5)\qquad \begin{cases} z_{ssss} - \tfrac{1}{16}(8\Pi + 4\mathfrak{B}' + 3\Gamma^2 - 3\mathfrak{B}^2) z_{ss} \\ \quad - \tfrac{1}{32}(8\mathfrak{B}\Phi - 8\Gamma\Pi + 4\Gamma''' + 4\mathfrak{B}\Gamma' - 4\mathfrak{B}'\Gamma + \Gamma\mathfrak{B}^2 - \Gamma^3) z_s \\ \quad - \tfrac{1}{64}(-4\Phi^2 - 4\Gamma'\Phi + 2\Gamma^2\Pi - 2\mathfrak{B}\Gamma\Phi - 2\Gamma\Gamma'' + \Gamma^2\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}\Gamma\Gamma') z = 0. \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz aus § 1 entsprechen die Parametertransformationen $\bar{s} = s + 2c$ den Transformationen der eingliedrigen Gruppe, die die Kurven $t = \text{const}$ in sich überführen. Da in (5) kein Glied mit z_{sss} vorkommt, ist s ein normierter Parameter für die W-Kurven auf der Fläche (vgl. BOL [3] § 51, Aufg. 1). Da ferner die Bahnkurven einer festen eingliedrigen projektiven Gruppe untereinander projektiv sind, bleibt nur übrig, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung (5) von t nicht abhängen. Sie müssen also Konstante sein. Es bestehen demnach die Gleichungen

$$(2.6)\qquad \begin{cases} 8\Pi + 4\mathfrak{B}' + 3\Gamma^2 - 3\mathfrak{B}^2 = 8c_1, \\ 8\mathfrak{B}\Phi - 8\Gamma\Pi + 4\Gamma''' + 4\mathfrak{B}\Gamma' - 4\mathfrak{B}'\Gamma + \Gamma\mathfrak{B}^2 - \Gamma^3 = 4c_2, \\ -4\Phi^2 - 4\Gamma'\Phi + 2\Gamma^2\Pi - 2\mathfrak{B}\Gamma\Phi - 2\Gamma\Gamma'' + \Gamma^2\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}\Gamma\Gamma' = -\frac{c_3}{8}, \end{cases}$$

die Integrale von (3) darstellen (die c_i seien stets reell).

3. Es läßt sich durch Differentiation sofort bestätigen, daß die Gln. (6) wirklich Integrale von (3) sind. Die ersten beiden Gleichungen lassen sich nach Π und Φ auflösen und damit Π und Φ aus der dritten eliminieren. Man

bekommt so unter Verwendung der Abkürzung

$$\Phi_1 = \frac{2\Gamma'' + \Gamma^3 - 4c_1\Gamma - 2c_2}{\mathsf{B}}. \tag{2.7}$$

(falls $\mathsf{B}=0$, setze man $\Phi_1 = -4c_2$) das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \Pi = \frac{3}{8}(\mathsf{B}^2 - \Gamma^2) - \frac{1}{2}\mathsf{B}' + c_1, \\ \Phi = \frac{1}{4}(\mathsf{B}\Gamma - \Phi_1) - \frac{1}{2}\Gamma', \\ \Phi_1^2 = 4\Gamma'^2 + \Gamma^4 - 8c_1\Gamma^2 - 8c_2\Gamma + c_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben Π, Φ als Funktionen von B, Γ, B', Γ', Γ''. Die dritte kann bei $\mathsf{B} \neq 0$ wegen (7) nach B aufgelöst werden. Gibt man sich dann Γ als Funktion von t vor, so können B, Φ, Π allein durch Einsetzen und Differenzieren bekannter Größen erhalten werden. Ist dagegen $\mathsf{B}=0$, so läßt sich wegen $\Phi_1 = -4c_2$ aus der dritten Gl. (8) Γ berechnen.

Diese Gleichung vermittelt also einen Zusammenhang zwischen B und Γ, der, wie man sich leicht überzeugt (indem man sich zunächst etwa Φ_1 als Funktion von t vorgegeben denkt), nur dann nicht die eine der beiden Funktionen $\mathsf{B}(t)$, $\Gamma(t)$ aus der anderen bis auf Integrationskonstanten zu berechnen gestattet, wenn $\Gamma = k = \text{const}$ angenommen wird[8]). Im letztgenannten Fall bleibt $\mathsf{B}(t)$ willkürlich wählbar, sobald nur c_1 und c_2 so bestimmt werden, daß

$$k^3 - 4c_1 k - 2c_2 = 0 \tag{2.9}$$

ist. Diesem Fall entsprechen die APR-Flächen — man vgl. **5** und § 6ff.

4. Die Integration der Ableitungsgleichungen (2) ist nun sofort zu leisten. Mit (6) nimmt (5) die Form

$$z_{ssss} - \frac{c_1}{2} z_{ss} - \frac{c_2}{8} z_s + \frac{c_3}{256} z = 0 \tag{2.10}$$

an. Setzen wir zunächst voraus, daß die „charakteristische Gleichung"

$$\alpha^4 - \frac{c_1}{2}\alpha^2 - \frac{c_2}{8}\alpha + \frac{c_3}{256} = 0 \tag{2.11}$$

vier verschiedene Wurzeln α_i besitze, so folgt aus (10) der Lösungsansatz

$$z = \sum_{i=1}^{4} A_i(t)\, e^{\alpha_i s} \tag{2.12}$$

für (2). Geht man mit diesem Ansatz in die zweite Gl. (2) hinein, so erhält man, da die mit $e^{\alpha_i s}$ behafteten Glieder einzeln verschwinden müssen, zur Bestimmung der A_i die Gleichungen

$$(\Gamma - 4\alpha_i) A_i' + (\Phi - \alpha_i \mathsf{B}) A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.13}$$

und hieraus mit Benutzung von (8), falls $\Gamma - 4\alpha_i \not\equiv 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$\log A_i = \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B} \right) dt + a_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\ (a_i = \text{const}). \tag{2.14}$$

[8]) Diese Bedingung ist invariant nur bei den in Anmerkung 6 genannten Parametertransformationen.

Denkt man sich diese Werte für A_i in (12) eingetragen, so befriedigt z die zweite Gleichung des Systems (2). Da aber dieses z von vier Integrationskonstanten abhängt, muß es die erste Gl. (2) von selbst befriedigen, denn einerseits können bei den bisherigen Operationen keine regulären Lösungen verlorengegangen sein, andererseits lehrt die Theorie, daß jede Komponente des allgemeinen Integrals von (2) vier Integrationskonstanten enthält. Es darf sich also beim Einsetzen von (12) und (14) in (2_1) keine neue Bedingung ergeben, was man durch Nachrechnen sofort bestätigen kann. Damit hat man als allgemeine Lösung von (2)

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{4} \mathfrak{a}_i \, e^{\alpha_i s + \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B}\right) dt}$$

(die $\mathfrak{a}_i$ bedeuten konstante Vektoren). Nach einer projektiven Transformation nimmt die Parameterdarstellung der zugehörigen Flächen die Form

$$x_i = e^{\alpha_i s + \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B}\right) dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.15}$$

an. Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung nicht alle voneinander verschieden, so muß der Ansatz (12) in bekannter Weise modifiziert werden, da dann (12) nicht das allgemeine Integral von (10) darstellt. Die Integration bietet auch hier keine Schwierigkeiten, solange man die Voraussetzung $\Gamma - 4\alpha_i \not\equiv 0$ beibehält, so daß sich ein Eingehen auf diese Sonderfälle erübrigt. Es sei nur als Beispiel die Flächendarstellung für eine vierfache Wurzel $\alpha_i = \alpha_1 (= 0)$ angegeben. Mit den Abkürzungen

$$(*) \qquad I_k = \int \frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{(\Gamma - 4\alpha_i)^k}\, dt \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \qquad \log \varrho = -\frac{1}{4}\int \mathsf{B}\, dt$$

kann man erhalten (wir setzen $\frac{\partial^0}{\partial s^0} F \equiv F$)

$$x_i = \varrho \cdot e^{s I_1} \cdot \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left\{ \frac{1}{6}(s + I_2)^3 + 4(s + I_2) I_3 + 16 I_4 \right\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

5. Das eben geschilderte Verfahren zur Bestimmung der $A_i(t)$ wird unanwendbar, wenn $\Gamma - 4\alpha_i \equiv 0$ für ein α_i gilt. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen, daß $\Gamma = 4\alpha_3 = k = \text{const}$ ist. Da aus (8_3) mit (11) jetzt $\Phi_1 = 0$ folgt, ist die dritte der Gln. (13) identisch erfüllt und daher zur Bestimmung von $A_3(t)$ nicht brauchbar. Da dann nach (8) und (9) sowohl

$$\Phi_1^2 = k^4 - 8c_1 k^2 - 8c_2 k + c_3 = 0$$

als auch

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial k}\Phi_1^2 = k^3 - 4c_1 k - 2c_2 = 0$$

gilt, zeigt ein Vergleich mit (11), daß $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{k}{4}$ jetzt eine Doppelwurzel von (11) ist. Für die beiden anderen Wurzeln erhält man

$$\alpha_{1,2} = -\tfrac{1}{4}k \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}c_1 - \tfrac{1}{8}k^2}. \tag{2.16}$$

Nehmen wir an, daß $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$, so können wir zur Lösung von (2) statt (12) den Ansatz

$$z = \varrho\left[A_1(t)\, e^{\alpha_1 s} + A_2(t)\, e^{\alpha_2 s} + \{A_3(t) + s\, A_4(t)\}\, e^{\frac{1}{2} k s}\right] \tag{2.17}$$

machen. Dabei sei ϱ wie in (*) definiert. Durch Einsetzen in (2_2) ergeben sich zunächst die Bedingungen

$$A_1' = 0, \quad A_2' = 0, \quad A_4' = 0. \tag{2.18}$$

Geht man dann in (2_1) herein, so folgt wegen (18) und (16)

$$A_3'' - \mathsf{B}(t)\, A_3' + (\tfrac{3}{8} k^2 - \tfrac{1}{2} c_1)\, A_3 + k\, A_4 = (\tfrac{1}{2} c_1 - \tfrac{3}{8} k^2)\, s\, A_4. \tag{2.19}$$

Da $\alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha_3$, ist $\frac{1}{2} c_1 - \frac{3}{8} k^2 \neq 0$, so daß $A_4 = 0$ sein muß, denn linker Hand steht eine Funktion von t allein. Daher genügt A_3 der homogenen Differentialgleichung

$$A_3'' - \mathsf{B}(t)\, A_3' + c\, A_3 = 0, \tag{2.20}$$

wobei zur Abkürzung

$$c = \tfrac{3}{8} k^2 - \tfrac{1}{2} c_1 \tag{2.21}$$

gesetzt wurde. Da $c \neq 0$, ist die Gl. (20) nicht allgemein durch Quadraturen zu integrieren. Nehmen wir aber an, es seien $w_1(t)$ und $w_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (20), dann kann (17) die Form

$$z = \varrho\left[a_1 e^{\alpha_1 s} + a_2 e^{\alpha_2 s} + \{a_3 w_1(t) + a_4 w_2(t)\}\, e^{\frac{1}{2} k s}\right]$$

erhalten. (Die a_i bedeuten Integrationskonstanten.) Setzen wir noch

$$\log \bar{\varrho} = \tfrac{1}{4}\left[k s - \int \mathsf{B}(t)\, dt\right], \quad \eta_\nu = \alpha_\nu - \tfrac{1}{4} k \qquad (\nu = 1, 2),$$

so kann die Darstellung der zugehörigen Flächen durch eine geeignete projektive Transformation auf die Form

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \bar{\varrho}\, e^{\eta_1 s}, \\ x_2 &= \bar{\varrho}\, e^{\eta_2 s}, \\ x_3 &= \bar{\varrho}\, w_1(t), \\ x_4 &= \bar{\varrho}\, w_2(t) \end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

gebracht werden.

Wir lassen nun sukzessive die Voraussetzungen $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$ fallen. Ist zunächst $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, so muß $k \neq 0$ und auch $c \neq 0$ sein, und man erhält statt (22) mit den gleichen Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \bar{\varrho}\, e^{-\frac{1}{4} k s}, \\ x_2 &= \bar{\varrho}\, s\, e^{-\frac{1}{4} k s}, \\ x_3 &= \bar{\varrho}\, w_1(t), \\ x_4 &= \bar{\varrho}\, w_2(t). \end{aligned}\right. \tag{2.23}$$

Ist dagegen $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_4$, so muß $c=0$ sein. Je nachdem, ob dann $\alpha_1\neq\alpha_2$ oder $\alpha_1=\alpha_2$, erhält man

$$(2.24)\qquad \begin{cases} x_1=\bar{\varrho}\,(s+k\,w_3(t)),\\ x_2=\bar{\varrho}\,e^{-ks},\\ x_3=\bar{\varrho}\,w_2(t),\\ x_4=\bar{\varrho}, \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad (2.25)\qquad \begin{cases} x_1=\bar{\varrho}\,(\tfrac{1}{2}s^2+w_3(t)),\\ x_2=\bar{\varrho}\,s,\\ x_3=\bar{\varrho}\,w_2(t),\\ x_4=\bar{\varrho}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet w_3 eine nichtkonstante Lösung von (20) mit $c=0$, während mit $w_3(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(2.26)\qquad A_3'''-\mathsf{B}(t)\,A_3'+1=0$$

bezeichnet wurde. Denkt man sich in den Darstellungen (24), (25) $\bar{\varrho}=1$ gesetzt, so erkennt man, daß diese Flächen Schiebflächen sind. Man sieht, daß sich bei diesen durch $c=0$ gekennzeichneten Flächen die Differentialgleichungen (20) bzw. (26) durch Quadraturen integrieren lassen. Unsere bisherigen Resultate fassen wir nun zusammen in dem folgenden

Satz 1. *Aus dem vollständigen System von Halbinvarianten β, γ, l, m ist die Parameterdarstellung einer Π-Fläche mit $\Gamma\neq k$ durch Quadraturen herzuleiten. Bei den Π-Flächen mit $\Gamma=k$ (also den APR-Flächen — vgl. § 6) kommt man nur dann allgemein mit Quadraturen aus, wenn die betreffende Fläche überdies Projektivtransformierte einer Schiebfläche ist. Anderenfalls bleibt noch die Integration der homogenen linearen Differentialgleichung* (20) *zu leisten.*

§ 3. Über die Bestimmung von Π-Flächen durch vorgegebene Eigenschaften

1. Wir knüpfen wieder an § 1 an. Durch Vorgabe von β, γ, l, m ist eine Fläche bis auf projektive Transformationen bestimmt und jede weitere Halbinvariante H auf der Fläche läßt sich durch β, γ, l, m und deren halbinvariante Ableitungen ausdrücken:

$$(3.1)\qquad H=H(\beta,\gamma,l,m,\beta_1,\gamma_2,l_1,l_2,\ldots,m_{2\ldots2}).$$

(Da wir das WILCZYNSKIsche System verwenden, ist $\beta_2=\gamma_1=0$.) Das Verschwinden einer Halbinvarianten H ist eine Bedingung, die von der Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien nicht abhängt und daher geometrische Bedeutung haben wird. Insbesondere zeigt BOL [3], wie sich eine ganze Reihe von wichtigen Flächenklassen, z. B. die Komplexflächen, die Flächen von DEMOULIN, die Projektivminimalflächen u. a. durch das Verschwinden solcher Halbinvarianten einfach kennzeichnen lassen (man vgl. z. B. l. c. § 121). Hiervon kann man ausgehen, wenn man die Π-Flächen bestimmen will, die in einer dieser Flächenklassen enthalten sind.

Allgemein sind nämlich nach § 1 bei den Π-Flächen β, γ, l, m und wegen unserer Wahl der Grundhalbinvarianten auch alle ihre halbinvarianten Ableitungen Funktionen von $t=u+v$ allein. Daher kann eine Bedingung $H=0$ bei den Π-Flächen als eine gewöhnliche Differentialgleichung für die unbe-

kannten Funktionen β, γ, l, m aufgefaßt werden, wenn man die halbinvarianten Ableitungen durch gewöhnliche ausdrückt. Zunächst können wir dann vermöge (1.5) und (2.1) l, m samt Ableitungen durch Π und Φ samt Ableitungen und diese mit Hilfe von (2.8) durch B und Γ nebst ihren Ableitungen ausdrücken. Da ferner $2\beta = \mathsf{B} + \Gamma$ und $2\gamma = \mathsf{B} - \Gamma$, läßt sich dann die Differentialgleichung $H = 0$ in der Form

$$H^*(\mathsf{B}, \Gamma, \mathsf{B}', \Gamma', \ldots, \mathsf{B}^{(r)}, \Gamma^{(q)}) = 0 \tag{3.2}$$

schreiben. Wird nun Γ als nicht konstant und $\mathsf{B} \not\equiv 0$ angenommen, so kann man mit Hilfe der dritten Gl. (2.8) auch B nebst Ableitungen eliminieren und erhält so eine Differentialgleichung der Form

$$H^{**}(\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(\sigma)}) = 0. \tag{3.3}$$

Anderenfalls ist bei $\Gamma = k = \text{const}$ bereits (2) eine Differentialgleichung für die eine unbekannte Funktion $\mathsf{B}(t)$, und schließlich bleibt noch zu prüfen, ob die Annahme $\mathsf{B} \equiv 0$ zu weiteren Lösungen führt, was aber nach (2) und § 2, **3** höchstens eine Quadratur erfordert. Es gilt also

Satz 2. *Die Bestimmung eines vollständigen Systems von Halbinvarianten β, γ, l, m für Π-Flächen, die einer vorgeschriebenen halbinvarianten Bedingung*

$$H(\beta, \gamma, l, m, \beta_1, \ldots, m_{\mathfrak{k}\ldots\mathfrak{e}}) = 0$$

genügen, erfordert höchstens die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren Ordnung $r + 4$ nicht übersteigt, wenn H halbinvariante Ableitungen von β, γ, l, m bis höchstens zur r-ten Ordnung enthält.

Die letzte Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß β, γ als Funktionen von Γ als höchste die zweite Ableitung von Γ und l, m als höchste die zweite Ableitung von β, γ enthalten.

2. Es gibt also im allgemeinen in jeder Flächenklasse, die sich durch das Verschwinden nur einer Halbinvarianten kennzeichnen läßt, Π-Flächen. Zusammen mit Satz 1 liefert Satz 2 die Aussage, daß die Bestimmung der Parameterdarstellung solcher Flächen außer Quadraturen noch, falls $\Gamma \neq k$, die Integration einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung erfordert, und dazu, falls $\Gamma = k$, der homogenen linearen Gl. (2.20) [9]. Wir werden auf Grund dieses allgemeinen Ergebnisses die Bestimmung von Π-Flächen, die vorgegebene Eigenschaften haben, an einigen Beispielen vorführen, die auch an sich ein gewisses Interesse beanspruchen dürften. Zweckmäßig betrachtet man dabei die Flächen mit $\Gamma = k$ gesondert. Es stellt sich nämlich heraus, daß bei den letzteren die aus der Bedingung $H = 0$ entstehende Differentialgleichung in einfacheren Fällen meist in geschlossener Form integriert werden

[9]) Auch bei den Flächen mit $\Gamma = k$ genügt eine einzige Differentialgleichung, wenn man sich die gesuchten Flächen durch ihre „*Meridiankurven*" (s. § 6) charakterisiert denkt, wie vom Spezialfall der Rotationsflächen her bekannt ist. Praktisch läßt sich aber daraus meist kein Vorteil ziehen, da die betreffende Differentialgleichung sehr kompliziert wird. Man vgl. jedoch für einen Spezialfall CALUGAREANU [8].

kann, so daß hier die Hauptaufgabe in der Integration der linearen Differentialgleichung (2.20) besteht. Dagegen ist im Falle $\Gamma \neq k$ die Differentialgleichung $H=0$ auch bei so einfachen Bedingungen wie z.B. $l=0$ schon so kompliziert gebaut, daß man eine Integration in geschlossener Form kaum erhoffen kann.

3. An dieser Stelle möge noch eine Bemerkung über die eingliedrigen projektiven Gruppen, die Π-Flächen in sich überführen, Platz finden. Wie aus § 2 folgt, sind durch die Vorgabe der Wurzeln α_i der „charakteristischen Gleichung" (2.11) die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe festgelegt, d.h. die drei Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 bestimmen die eingliedrige Gruppe G_1 von projektiven Transformationen — oder eventuell eine eingliedrige Untergruppe einer zweigliedrigen Gruppe — die die jeweils gesuchte Fläche gestattet.

Es gilt dann

Satz 3. *Die Bahnkurven der zu einer Π-Fläche gehörenden eingliedrigen Gruppe sind dann und nur dann eben, wenn für die Fläche $\Gamma = k = \text{const}$ erreicht werden kann.*

Der Beweis ergibt sich aus der Art unserer Parameterdarstellung der Π-Flächen. Die Bahnkurven sind nämlich dann und nur dann eben, wenn identisch in s eine lineare Abhängigkeit

$$\sum_1^4 f_i(t) \cdot x_i(s,t) = 0 \tag{3.4}$$

der Komponenten x_i des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ besteht. Gilt $\Gamma \neq k$, so konnte man die Parameterdarstellung der zugehörigen Π-Flächen nach § 2, **4** berechnen. Setzt man diese für die verschiedenen möglichen Fälle in (4) ein, so folgt stets $f_i=0$ $(i=1,2,3,4)$. Andererseits sind bei den Flächen mit $\Gamma=k$, deren Parameterdarstellungen wir auf die Form (2.22) bis (2.25) gebracht hatten, die Bahnkurven ersichtlich eben. Sie liegen in Ebenen des Büschels $f_3(t)\,x_3+f_4(t)\,x_4=0$, die bei den Transformationen der G_1 einzeln festbleiben. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf § 6.

Im Hinblick auf unsere Umkehrfragen gilt, daß es zu jedem Wertetripel c_1, c_2, c_3, also zu jeder G_1, Flächen gibt, die eine vorgegebene halbinvariante Bedingung erfüllen, d.h. auch nach Vorgabe der Bedingung $H=0$ bleibt die G_1 noch frei wählbar. Das wird natürlich anders, wenn wir mehrere halbinvariante Bedingungen vorschreiben: es gibt dann im allgemeinen, wenn überhaupt, so doch nur für spezielle c_i, also spezielle G_1, Lösungen. Hierzu vgl. man § 5 und § 9.

§ 4. Projektiv abwickelbare Π-Flächen

1. Mit den Π-Flächen, die projektiv abwickelbar sind, hat sich bereits BORŮVKA [6] beschäftigt. Er gibt die APR-Flächen in Gleichungsform an (vgl. unseren § 6) und zeigt mittels der CARTANschen Methode der alternierenden Differentialformen, daß weitere Flächen der verlangten Eigenschaften existieren und von Konstanten abhängen. Auf Grund unserer bis-

herigen Ergebnisse können wir auch diese noch übrig bleibenden Flächen bestimmen[10]).

Da sich bei einer projektiven Abwicklung β und γ nicht ändern — für das Folgende vgl. BOL [3], §§ 84, 119 sowie ČECH [9] — muß das System der Integrierbarkeitsbedingungen (1.9) bei den projektiv abwickelbaren Π-Flächen außer dem Lösungssystem β, γ, l, m der abzuwickelnden Fläche noch andere Lösungen $\beta, \gamma, \bar{l}, \bar{m}$ haben. Setzt man $L = \bar{l} - l$, $M = \bar{m} - m$, so gilt nach (1.6)

$$L_2 = 0, \quad M_1 = 0, \quad L_1\gamma = M_2\beta.$$

Da L das Gewicht (2,0), M das Gewicht (0,2) hat, folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$L = f(u), \quad M = g(v), \tag{4.1}$$

während die dritte in der Form

$$\gamma(t)\frac{df}{du} + 2\frac{d\gamma}{dt}f(u) = \beta(t)\frac{dg}{dv} + 2\frac{d\beta}{dt}g(v)$$

geschrieben werden kann. Integrieren wir hier noch nach $t = u + v$, so erhalten wir

$$\gamma(u+v)\cdot f(u) - \beta(u+v)\cdot g(v) = \varphi(u-v) \tag{4.2}$$

mit „willkürlicher" Funktion φ.

2. Da β und γ von der Ausgangsfläche her gegeben zu denken sind, gibt es für die Lösungen dieser Funktionalgleichung folgende zwei Möglichkeiten:

A. Man kann (2) mit $f(u) = a$, $g(v) = b$ (a, b konstant und nicht beide Null) befriedigen. Dann sind die den Lösungswerten von a und b entsprechenden Abwicklungen der Ausgangsfläche wieder Π-Flächen. Wir werden diese unter **3** bestimmen.

B. Man kann (2) außer durch $f = g = \varphi = 0$ nur befriedigen, wenn wenigstens eine der Funktionen f, g nicht konstant ist. Dann sind die Abwicklungen der Ausgangsfläche nicht mehr Π-Flächen. Da aber β und γ nur von $t = u + v$ abhängen, müssen sie unter den von ČECH[11]) bestimmten Flächen mit einer eingliedrigen stetigen Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich vorkommen.

Um die Flächen unter B zu finden, hat man also nur zu prüfen, welche der von ČECH bestimmten Paare $-\beta, \gamma$[12]) unsere Gl. (2.8_3) befriedigen[13]).

[10]) Spezielle Beispiele solcher Flächen gibt BORŮVKA in [5].

[11]) ČECH [9], vgl. auch [11], Kap. 8 (man beachte aber die dort abweichende Numerierung der Typen). Es läßt sich bei diesen Flächen erreichen, daß β und γ Funktionen von $u + v$ allein werden.

[12]) Da man, um auf unsere Parameter zu kommen, noch die Parametertransformation $u = \bar{u}$, $v = -\bar{v}$ in der Tabelle bei ČECH [9] zu machen hat.

[13]) Als Beispiel dafür, daß nicht alle der 30 Typen ČECHs auf Π-Flächen abwickelbar sind, sei Typ 25 genannt. Dort ist $\beta = -at$, $\gamma = 1$. Daher hat man $\mathfrak{B} = 1 - at$, $\Gamma = -1 - at$ und beim Einsetzen in (2.8_3) sieht man leicht, daß die Gleichung nur mit $a = 0$ zu befriedigen wäre, aber $a = 0$ ist ausgeschlossen, weil die Fläche keine Regelfläche sein darf.

Diese Paare bestimmen dann jeweils projektiv abwickelbare Π-Flächen, deren Parameterdarstellung nach den Resultaten von § 2 aus den Funktionen β und γ ohne weiteres berechnet werden kann[14]).

3. Wir betrachten nun den Fall A, der uns die auf Π-Flächen abwickelbaren Π-Flächen liefern wird. Es gilt dann $f = a = \text{const}$, $g = b = \text{const}$ und aus (2) wird

$$a\gamma(t) - b\beta(t) = \varphi(u - v) = \text{const}. \tag{4.3}$$

Zunächst ist für die Flächen mit $\Gamma = \beta - \gamma = k = \text{const}$ die Gl. (3) mit $a = b$ stets erfüllbar. Man erhält so die sämtlich projektiv abwickelbaren APR-Flächen. Ist $\Gamma \neq k$, so kann man statt (3) schreiben:

$$\mathsf{B} = a_1\Gamma + a_2 \qquad (a_i = \text{const}). \tag{4.4}$$

Um nun die Integrabilitätsbedingungen (2.8) auszunutzen, differenzieren wir (2.8_2) und eliminieren mit Hilfe von (2.3) Φ'. Das liefert die Gleichung

$$\Phi_1' = 2\mathsf{B}\Gamma', \tag{4.5}$$

die sich nach Einsetzen von (4) unmittelbar wieder integrieren läßt:

$$\Phi_1 = a_1\Gamma^2 + 2a_2\Gamma + a_4. \tag{4.6}$$

Setzt man dies in (2.8_3) selbst ein, löst nach Γ'' auf und integriert, so folgt unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{cases} n_0 = \tfrac{1}{4}(a_4^2 - c_3), & n_1 = a_2 a_4 + 2c_2, & n_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 a_4 + 2a_2^2 + 4c_1) \\ n_3 = a_1 a_2, & n_4 = \tfrac{1}{4}(a_1^2 - 1), \end{cases} \tag{4.7}$$

die Gleichung[15])

$$t = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{n_4\Gamma^4 + n_3\Gamma^3 + n_2\Gamma^2 + n_1\Gamma + n_0}}. \tag{4.8}$$

Daß diese durch (4) und (8) gekennzeichneten Π-Flächen wirklich projektiv abwickelbar sind, erkennt man auch direkt, wenn man sich a_1 und a_2 fest vorgegeben denkt und ebenso die n_i aus (7). Dann erhält man eine Schar von ∞^1 aufeinander projektiv abwickelbaren Flächen durch Variation von a_4, wobei c_1, c_2, c_3 durch (7) als Funktionen von a_4 festgelegt werden.

Wir wollen die Bestimmung der Parameterdarstellung dieser Flächen, die nach § 2 nun nur noch Quadraturen erfordert, nur in dem Hauptfalle, daß weder die Gl. (2.11) noch die Gleichung

$$n_4 x^4 + n_3 x^3 + n_2 x^2 + n_1 x + n_0 = 0 \tag{4.9}$$

[14]) Schwierigkeiten gibt es nur bei den Typen 4 und 6, wo zur Bestimmung von β und γ noch je eine Differentialgleichung 4. Ordnung zu integrieren ist. Durch Vergleich mit unseren Formeln läßt sich deren Ordnung nur um zwei erniedrigen.

[15]) Die additive Integrationskonstante kann als unwesentlich gleich Null gesetzt werden.

mehrfache Wurzeln x besitzt, weiter verfolgen, da die anderen Fälle ganz entsprechend zu erledigen sind.

Durch Auflösung von (8) nach Γ erhält man unter den genannten Verschiedenheitsvoraussetzungen[16]), falls überdies $n_4 \neq 0$:

$$\Gamma(t) = a_0 + \frac{1}{\sqrt{n_4}} \frac{\wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}. \tag{4.10}$$

a_0 bedeute eine Wurzel von (9) und $\wp$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion mit den Invarianten

$$g_2 = n_0 n_4 + \frac{1}{12} n_2^2 - \frac{1}{4} n_1 n_3,$$

$$g_3 = \frac{1}{6} n_0 n_2 n_4 - \frac{1}{16}(n_0 n_3^2 + n_1^2 n_4) + \frac{1}{48} n_1 n_2 n_3 - \left(\frac{n_2}{6}\right)^3.$$

Es sei t_0 in einem den Nullpunkt enthaltenden Periodenparallelogramm der $\wp$-Funktion gelegen und durch die zusammenstimmenden Bedingungen

$$\begin{cases} \wp t_0 = \frac{1}{2} n_4 a_0^2 + \frac{1}{4} n_3 a_0 + \frac{1}{12} n_2 \\ \wp' t_0 = \sqrt{n_4}\left(n_4 a_0^3 + \frac{3}{4} n_3 a_0^2 + \frac{1}{2} n_2 a_0 + \frac{1}{4} n_1\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

definiert. Da die Wurzeln von (9) als voneinander verschieden vorausgesetzt wurden, ist $\wp' t_0 \neq 0$.

Die Parameterdarstellung unserer Flächen berechnen wir nun mit Hilfe der Gl. (2.14). Mit (4) und (6) erhält man zunächst

$$\log A_i = \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{a_1 \Gamma^2 + 2 a_2 \Gamma + a_4 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - a_1 \Gamma - a_2 \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2} \log(\Gamma - 4\alpha_i) + \frac{1}{4} \int \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i)\Gamma + 4 a_2 \alpha_i + a_4}{\Gamma - 4\alpha_i} dt.$$

Das rechter Hand verbleibende Integral kann z. B. durch Partialbruchzerlegung der den Integranden bildenden elliptischen Funktion 2. Grades berechnet werden. Definieren wir die Konstanten t_i durch die nach (2.11), (2.8_3) und (6) zusammenstimmenden Formeln

$$\Gamma(t_i) = 4\alpha_i, \qquad 2\Gamma'(t_i) = 16\alpha_i^2 a_1 + 8\alpha_i a_2 + a_4,$$

so ist, wie aus dem Verhalten des Integranden bei $t = t_i$, $t = -t_i$ sofort zu erkennen,

$$(*) \qquad \frac{1}{4} \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i)\Gamma + a_4 + 4 a_2 \alpha_i}{\Gamma - 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \zeta(t - t_i) - \frac{1}{2} \zeta(t + t_i) + b_i.$$

Setzt man noch $t = 0$ in die Gleichung ein, so folgt

$$b_i = \zeta t_i + \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i) a_0 + a_4 + 4 a_2 \alpha_i}{4(a_0 - 4\alpha_i)}. \tag{4.12}$$

[16]) Wir benutzen im folgenden den Formelapparat der Theorie der elliptischen Funktionen. Man vgl. dazu die Lehrbücher, insbesondere Tricomi und Krafft [14], deren Bezeichnungen wir uns hier anschließen. Die Herleitung von (10) aus (8) z. B. findet man in Kap. 2, § 2.

(Ist für ein i etwa $\Gamma'(t_i)=0$, so erhält man für das betreffende b_i den Wert $b_i=\frac{1}{2}a_2+a_1\alpha_i$.) Damit ergibt sich mit Benutzung der integrierten Gl. (*)

$$\log A_i=\frac{1}{2}\log(\Gamma-4\alpha_i)+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_i)}+b_it+\text{const}$$

$$=\log\frac{\sigma t_0}{\sigma t_i}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t+t_i)\,\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_0)\,\sigma(t-t_0)}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_i)}+b_it+\text{const}.$$

Faßt man zusammen, so bekommt man schließlich aus (2.15) die Parameterdarstellung

$$(4.13)\qquad x_i=\varrho\cdot\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma t_i}e^{b_it+\alpha_i s}\quad\text{mit}\quad\varrho=\frac{\sigma t_0}{\sqrt{\sigma(t+t_0)\,\sigma(t-t_0)}}.$$

Auf die Abänderungen, die sich ergeben, wenn mindestens eine der beiden algebraischen Gleichungen 4. Grades (2.11) und (9) mehrfache Wurzeln besitzt, können wir aus Raumgründen nicht eingehen[17]). Wir formulieren das Ergebnis jedoch als

Satz 4. *Die projektiv abwickelbaren Π-Flächen lassen sich in folgende drei Klassen einteilen:*

1. *Die APR-Flächen, die sämtlich projektiv abwickelbar sind.*

2. *Diejenigen Π-Flächen mit $\Gamma\neq k$, die auf Π-Flächen projektiv abwickelbar sind. Sie sind durch* (4) *und* (8) *gekennzeichnet. Ihre Parameterdarstellung kann unter Zuhilfenahme der Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen explizit angegeben werden — im „Hauptfalle"* (vgl. S. 422) *beispielsweise hat sie die einfache Form* (13).

3. *Diejenigen Π-Flächen, die nur auf solche Flächen projektiv abwickelbar sind, die eine eingliedrige Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich gestatten. Ihre Parameterdarstellungen können nach* § 2 *aus den bei* FUBINI, ČECH [*11*], *Kap. 8 bzw.* ČECH [*9*] *angegebenen Funktionenpaaren β, γ berechnet werden, soweit* (2.8_3) *Genüge geleistet werden kann.*

§ 5. Isotherm-asymptotische Π-Flächen

1. Wir beweisen zunächst:

Satz 5. *Die isotherm-asymptotischen Π-Flächen sind sämtlich projektiv abwickelbar.*

Aus der für diese Flächen kennzeichnenden Bedingung $p=q$ — vgl. BOL [*3*], z.B. § 121 — folgt nämlich nach (1.5)

$$\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'=\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'$$

und hieraus nach zweimaliger Integration

$$\beta=e^{2bt+2d}\cdot\gamma\qquad(b,d\text{ konstant}).$$

[17]) Man vgl. jedoch die §§ 8, 9, wo ähnliche Fallunterscheidungen ausführlicher diskutiert werden.

Diese Gleichung ist äquivalent den beiden Gleichungen

$$\beta = e^{bt+d} \cdot T(t), \qquad \gamma = e^{-(bt+d)} \cdot T(t), \tag{5.1}$$

wobei nun $T(t)$ durch Einsetzen von β und γ in (2.8_3) bestimmt werden muß[18]). Umgekehrt erhält man so auch alle isotherm-asymptotischen Π-Flächen. Trägt man (1) in (4.2) ein, so sieht man, daß es offenbar genügt,

$$f(u) = a \cdot e^{2bu+d}, \qquad g(v) = a \cdot e^{-(2bv+d)}$$

zu wählen, um die Gleichung mit $\varphi = 0$ identisch zu befriedigen. Für $b \neq 0$ liegt der Fall B aus § 4 vor. Der Wert $a = 0$ entspricht der Ausgangsfläche, für $a \neq 0$ hat man die Abwicklungen — hier speziell Flächen des Typs 6 bei ČECH [9]. Für $b = 0$ sind dagegen die Abwicklungen wieder Π-Flächen und bei $d \neq 0$ nach § 4, 3 die Parameterdarstellung berechenbar. Auf die Flächen mit $b = d = 0$ werden wir in § 6ff. noch zurückkommen.

2. Unter den isotherm-asymptotischen Π-Flächen sind als wichtiger Spezialfall projektiv-transformierte eigentliche Affinsphären, d.h. Π-Flächen, für die

$$l = m = 0, \qquad p = q \neq 0 \tag{5.2}$$

gilt, enthalten[19]). Aus den Integrabilitätsbedingungen (1.6) folgt mit (2) $p_1 = p_2 = 0$, und hieraus durch Integration, da p das Gewicht (1,1) hat (k_2, k_3 seien Konstante)

$$p\gamma = k_2, \qquad p\beta = k_3.$$

Wegen $p \neq 0$ müssen $k_2, k_3 \neq 0$ sein ($\beta\gamma = 0$ gilt nur für Regelflächen). Damit folgt

$$\beta = \frac{k_3}{k_2}\gamma = A\gamma. \tag{5.3}$$

Die gesuchten Flächen gehören also zum Fall A aus § 4. Es kann $A \neq 1$ angenommen werden, da wir auf die in die Flächenklasse (2) gehörenden APR-Flächen mit $A = 1$ in § 9 zurückkommen werden. Aus (3) folgt dann

$$\mathsf{B} = \frac{A+1}{A-1}\Gamma, \tag{5.4}$$

und das entspricht der Relation (4) aus § 4. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$a_1 = \frac{A+1}{A-1}, \qquad a_2 = 0.$$

---

[18]) Mit diesem Ansatz können auch die Lösungen des Differentialgleichungssystems $p = q = 0$ und damit die zweifachen Komplexflächen, die Π-Flächen sind, bestimmt werden. Die Rechnung zeigt, daß für die Parameterdarstellung nur elementare Funktionen benötigt werden.

[19]) Vgl. BOL [3] § 121, über Affinsphären allgemein auch BLASCHKE [1], S. 209ff.

Ferner lauten die Bedingungen $l=m=0$ nach (1.5), (2.1) und (2.8) explizit

$$(5.5)\quad \begin{cases} \frac{1}{8}(\mathsf{B}\Gamma-\Phi_1)+\frac{1}{2}c_1+\frac{3}{16}(\mathsf{B}^2-\Gamma^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2=0, \\ -\frac{1}{8}(\mathsf{B}\Gamma-\Phi_1)+\frac{1}{2}c_1+\frac{3}{16}(\mathsf{B}^2-\Gamma^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2=0. \end{cases}$$

Aus (3) folgt $\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}$, und daher liefert die Subtraktion der beiden Gln. (5)

$$(5.6)\qquad \Phi_1=\mathsf{B}\Gamma.$$

Aus (4.6) liest man nun wegen $\mathsf{B}=a_1\Gamma$ ab, daß $a_4=0$. Jetzt bleibt nur noch eine, etwa die erste, der beiden Gln. (5) zu befriedigen. Multiplizieren wir sie mit $4\gamma'$ und integrieren nach t, so folgt mit (6)

$$2c_1\gamma+A\gamma^3-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma}=k_0$$

(hier muß $k_0\neq 0$ sein, da anderenfalls nach Division durch γ und nachfolgende Differentiation auf $\dot{p}=0$ geschlossen werden könnte). Einsetzen von $\Gamma=(A-1)\gamma$ liefert dann

$$\Gamma'^2=\frac{A}{(A-1)^2}\Gamma^4+2c_1\Gamma^2-k_0(A-1)\Gamma.$$

Diese Gleichung ist mit (4.8) nur dann äquivalent, wenn

$$2c_2=-k_0(A-1),\qquad c_3=0$$

gilt. Hiernach ist also $c_2\neq 0$. Es kann daher auch a_1 nicht Null sein, da dann $\mathsf{B}=0$ und damit nach § 2,3 und (6) $\Phi_1=-4c_2=0$ wäre. Insgesamt gilt somit für die gesuchten Flächen

$$a_1=\frac{A+1}{A-1},\qquad a_2=a_4=0,\qquad c_2\neq 0,\qquad c_3=0,\qquad A^2\neq 1.$$

Die Parameterdarstellung (4.13) des „allgemeinen" Falles vereinfacht sich hiermit noch etwas. Man kann wegen $n_0=0$ auch $a_0=0$ annehmen, so daß nach (4.12) $b_i=\zeta t_i$ wird. Wegen $c_3=0$ wird nach (2.11) eines der α_i, z.B. α_4 gleich Null. Damit ist $a_0=4\alpha_4=0$, also $\Gamma''(t_4)=0$ und nach S. 424f. ist $t_4=b_4=0$ zu setzen. Damit wird aus (4.13)

$$(5.7)\qquad \begin{cases} x_i=\varrho\,\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma t_i}\,e^{t\zeta t_i+\alpha_i s}, \\ x_4=\varrho\,\sigma t. \end{cases} \qquad (i=1,2,3).$$

Hierzu bemerken wir noch folgendes: Bei den Affinsphären fallen die WILCZYNSKIschen ersten Normalen mit den Affinnormalen zusammen — vgl. BOL [3] Bd. 2, S. 110. Daher gehen bei diesen Flächen die WILCZYNSKI-Normalen durch einen festen Punkt $\mathfrak{a}$. Bei uns kann $\mathfrak{a}$ aber nur ein Fixpunkt der zugehörigen eingliedrigen Gruppe, speziell also bei den Flächen (7) eine Ecke des Koordinatentetraeders sein, so daß drei der Komponenten von $\mathfrak{a}$ Null sein müssen. Da $\mathfrak{a}$ als Linearkombination von $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}$ darstellbar

sein muß und in der Darstellung (7) die drei ersten Koordinaten x_i von $\mathfrak{x}$ völlig gleich zusammengesetzt sind, kommt aus Symmetriegründen nur der Fall in Frage, daß $\mathfrak{a}$ die Komponenten (0, 0, 0, 1) hat. Führt man also durch

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{x_4}$$

affine Koordinaten $\bar{x}_i$ ein, so sieht man, daß bei den Affinsphären

$$\bar{x}_i = \frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma t \sigma t_i} e^{\zeta t + \alpha_i s} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5.7'}$$

die Normalen alle durch den Nullpunkt (0, 0, 0) gehen. Übrigens sind wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$ die Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppen im Koordinatensystem der $\bar{x}_i$ raumtreue Affinitäten.

3. Bei den in unsere Flächenklasse fallenden APR-Flächen, für die $A = 1$ galt, werden wir in § 9 zu einer ganz entsprechenden Darstellung kommen. Ferner sei ergänzend bemerkt, daß man für die Parameterdarstellung der projektivtransformierten uneigentlichen Affinsphären, für die außer $l = m = 0$ auch $p = q = 0$ gilt, nur elementare Funktionen benötigt. Die Rechnungen, die zu diesem Ergebnis führen, sind einfacher als die vorgeführten[20]), andererseits kann für die uneigentlichen Affinsphären allgemein eine Parameterdarstellung in geschlossener Form angegeben werden — vgl. BLASCHKE [1] S. 216 — so daß hier auf diese Flächen nicht eingegangen zu werden brauchte.

§ 6. Einige allgemeine Eigenschaften der APR-Flächen

1. Wir hatten schon mehrfach Gelegenheit, auf die ausgezeichnete Stellung hinzuweisen, die innerhalb der Klasse der Π-Flächen den Flächen zukommt, für die $\Gamma = \text{const}$ erreicht werden kann. Sie sind nach § 3, **3** genau die Π-Flächen mit ebenen Bahnkurven. Die Ebenen, in denen diese Bahnkurven liegen, bilden ein Büschel. Dual dazu existiert eine lineare Punktreihe, also eine „Achse", die bei den Transformationen der zur Fläche gehörigen eingliedrigen Gruppe punktweise festbleibt. Wegen dieser Eigenschaften, die zu denen der gewöhnlichen Rotationsflächen analog sind, bezeichnen wir diese Flächen als *Allgemeine Projektivrotationsflächen* (Abkürzung: APR-Flächen).

In § 2 bemerkten wir, daß die APR-Flächen bei der Integration der Ableitungsgleichungen (2.2) eine gesonderte Behandlung beanspruchten. Wir wollen nun die in § 2, **5** gewonnenen Parameterdarstellungen der APR-Flächen noch auf inhomogene Koordinaten spezialisieren. Bei den Flächen (2.22) z. B. setzen wir

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2x_4}, \quad y = \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{\varepsilon}\, x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

und führen gleichzeitig durch

$$\sqrt{\frac{1}{8}\varepsilon(4c_1 - k^2)} \cdot s = \varphi, \quad w_2(t) = \frac{1}{r}, \quad \frac{w_1(t)}{w_2(t)} = f(r)$$

[20]) Vgl. dazu Anmerkung 18.

neue Parameter r, φ ein — wegen $c \neq 0$ ist $w_2(t)$ nie eine Konstante. Ferner setzen wir noch

$$a = \frac{-2k}{\sqrt{2\varepsilon(4c_1 - k^2)}} \quad \text{mit } \varepsilon = -1 \text{ bei } 4c_1 - k^2 < 0,\ \varepsilon = +1 \text{ bei } 4c_1 - k^2 > 0.$$

Damit ergeben sich statt (2.22) die Parameterdarstellungen

$$\text{(A)} \begin{cases} x = r e^{a\varphi} \cos\varphi, \\ y = r e^{a\varphi} \sin\varphi, \quad \text{bei } \varepsilon = -1, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} x = r e^{a\varphi} \mathfrak{Cof}\,\varphi, \\ y = r e^{a\varphi} \mathfrak{Sin}\,\varphi, \quad \text{bei } \varepsilon = +1. \\ z = f(r), \end{cases}$$

Entsprechend sieht man, daß sich die Flächen (2.23) bis (2.25) durch geeignete Wahl der Parameter in der Form

$$\text{(C)} \begin{cases} x = r e^{\varphi}, \\ y = r\varphi e^{\varphi}, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(D)} \begin{cases} x = r + \varphi, \\ y = e^{-k^2\varphi} - 1, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(E)} \begin{cases} x = r + \varphi^2, \\ y = \varphi, \\ z = f(r), \end{cases}$$

darstellen lassen. [Bei den Flächen (D) und (E) wurde unter anderem $w_3(t) = r$ gesetzt.] Aus (A) ergibt sich nun für $a = 0$ die bekannte Darstellung der gewöhnlichen Rotationsflächen. Ferner bilden die Flächen (A), (B) mit $a = 0$ und die Flächen (E) die Klasse der von SÜSS in [*19*] definierten *Affinrotationsflächen* [Abkürzung: AR-Flächen][21] [22]), denn die in den Ebenen $z = \text{const}$ gelegenen Kurven $r = \text{const}$ sind beim Typ (A) für $a = 0$ Kreise mit dem Mittelpunkt auf der Achse $x = y = 0$, beim Typ (B) für $a = 0$ eine Schar ähnlich gelegener (gleichseitiger) Hyperbeln und beim Typ (E) ähnlich gelegene kongruente Parabeln[23]).

In Verallgemeinerung der bei SÜSS [*19*] für die AR-Flächen gebrauchten Bezeichnungen nennen wir die Schnittkurve einer der Flächen (A) bis (E) mit der Ebene $y = 0$ *Meridiankurve* der Fläche. Sie kann auch durch $\varphi = 0$ definiert werden und hat in der x, z-Ebene die Gleichung $z = f(x)$. Die Kurven $r = \text{const}$ sind die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe *(Breitenkurven)* in den Ebenen des Büschels $z = \text{const}$, welches bei den Transformationen der Gruppe elementweise festbleibt. Bei den Flächen (A), (B) und (C) bleibt ferner die z-Achse als „Rotationsachse" punktweise fest. Bei den Flächen (D) und (E) dagegen bleibt kein Punkt im Endlichen fest, da diese Flächen Schiebflächen sind, hier bleibt die Schnittgerade der Ebene $y = 0$ mit der uneigentlichen Ebene punktweise fest und ist daher Achse der Flächen. Wir können diese Flächen dann auch „uneigentliche" APR-Flächen nennen, weil die Achse in einer Ebene des invarianten Büschels liegt, zum Unterschied von den „eigentlichen" APR-Flächen der Typen (A), (B) und (C), bei denen

[21]) Vgl. dazu auch SU [*17a*].

[22]) Man beachte auch Anmerkung 27.

[23]) Hierzu beachte man, daß bei uns Regelflächen ausgeschlossen waren, also insbesondere die Flächen 2. Ordnung, die man sinngemäß auch zu den AR-Flächen rechnen wird.

die „Rotationsachse" nicht in einer Ebene des invarianten Büschels $z = \text{const}$ liegt — vgl. auch BOL [3] § 102, Aufgabe 11.

2. Das Büschel der Ebenen durch die „Rotationsachse" schneidet aus der Fläche die Kurven $\varphi = \text{const}$ aus, ebenso wie die Ebenen des Büschels $z = \text{const}$ die Kurven $r = \text{const}$ definieren. Da das Netz der Parameterkurven $\varphi = \text{const}$, $r = \text{const}$ ein konjugiertes Netz ist, besitzen also die APR-Flächen die Eigenschaften, die SEGRE [16] (s. dort S. 23) zur Kennzeichnung einer Klasse von projektiv abwickelbaren Flächen, der S-Flächen, benutzt. Es gelten daher die Sätze von SEGRE über Erzeugung, projektive Abwicklung und Eigenschaften der S-Flächen in sinngemäßer Spezialisierung auch für die APR-Flächen. Bezüglich der projektiven Abwicklung der APR-Flächen vgl. man auch unsere Bemerkungen in § 4,3 und § 8,3. Für ein genaueres Studium verweisen wir auf die eleganten Resultate bei SEGRE [16].

Daß insbesondere das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ bei den APR-Flächen ein Netz bildet, dessen LAPLACEsche Invarianten gleich sind, kann zur Kennzeichnung dieser Flächen innerhalb der Klasse der Π-Flächen benutzt werden, denn diese Bedingung besagt, daß für die Koeffizienten B, Γ der zugehörigen LAPLACEschen Gl. (2.2_2)

$$-\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial s} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

gilt, was bei uns mit $\Gamma = \text{const}$ äquivalent ist. Hieraus folgt weiter

Satz 6. *Die APR-Flächen sind genau die Π-Flächen, für die das Netz der Bahnkurven und der zu diesen konjugierten, also das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ LAPLACE-Transformierte besitzt, die in beiden Richtungen entarten.*

Die Behauptung besagt nämlich, daß die beiden Invarianten des Netzes Null, also gleich sind, was nur bei APR-Flächen möglich ist und umgekehrt ist bei den APR-Flächen das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ mit dem Netz der Kurven $\varphi = \text{const}$, $r = \text{const}$ identisch, für das die Behauptung des Satzes trivialerweise erfüllt ist[24]).

3. Wir schließen jetzt noch einige Bemerkungen über die AR-Flächen und ihre Projektivtransformierten, für die von SÜSS in [20] der Name *„Projektivrotationsflächen"* (Abkürzung: PR-Flächen) vorgeschlagen worden ist, an[25]). In unserem System ist für die PR-Flächen $\Gamma = 0$ kennzeichnend, da bei den Typen (A), (B) $k = 0$ mit $a = 0$ äquivalent ist und für die Flächen (E) nach § 2,5 ebenfalls $k = 0$ gilt. Analog zur Süssschen Kennzeichnung der AR-Flächen läßt sich eine Kennzeichnung der PR-Flächen aus Eigenschaften

[24]) Man kann den Satz 6 auch so einsehen, daß man sich zunächst überlegt, daß die LAPLACE-Transformierte in der t-Richtung aus einer bei den Transformationen der eingliedrigen Gruppe punktweise fest bleibenden Kurve bestehen muß, die sich nicht auf einen Punkt reduzieren kann. Da Regelflächen ausgeschlossen waren, folgert man weiter, daß diese Kurve eine Gerade sein muß. Nach dem Dualitätsprinzip läßt die zugehörige eingliedrige Gruppe dann auch ein Ebenenbüschel elementweise fest, so daß die Bahnkurven dieser Gruppe eben sein müssen, q.e.d.

[25]) Vgl. Anmerkung 27.

der Normalenkongruenzen herleiten. Wir werden darauf im nächsten Paragraphen zurückkommen.

Ferner besteht die eingliedrige Gruppe einer APR-Fläche in sich, wie man sofort an den Darstellungen (A) bis (E) nachprüft, nur dann aus raumtreuen Affinitäten, wenn die Fläche eine AR-Fläche ist. Es gilt also

Satz 7. *Von Regelflächen*[26]) *abgesehen, sind die AR-Flächen die einzigen Flächen, die eine eingliedrige Gruppe von raumtreuen Affinitäten in sich mit ebenen Bahnkurven gestatten.*

Auch hierin sind also die AR-Flächen die Analoga der Rotationsflächen in der metrischen Differentialgeometrie. Ebenso gilt natürlich

Satz 8. *Die PR-Flächen sind, abgesehen von Regelflächen, die einzigen Flächen, die eine eingliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten, deren Bahnkurven Kegelschnitte sind.*

Von den zahlreichen weiteren Kennzeichnungen, die für die PR-Flächen angegeben worden sind, nennen wir hier nur die von SU [*18*] und SÜSS [*20*] stammende Kennzeichnung als einzige Flächen mit einer Schar ebener DARBOUX-Kurven in den Ebenen eines Büschels oder ebener konischer SEGRE-Kurven in den Ebenen eines Büschels, die wir im nächsten Paragraphen mit benutzen werden.

§ 7. Flächen, deren kanonische Normalen durch zwei feste Geraden laufen

1. Die AR-Flächen sind von SÜSS [*19*] und SU [*17a*] als die Flächen gekennzeichnet worden, deren Affinnormalen alle durch eine feste Gerade *(Achse)* laufen, wobei die Zusatzvoraussetzung gemacht wird, daß die von den Ebenen durch jene Achse ausgeschnittenen Kurven *(Meridiane)* gleichzeitig Schattengrenzen der Fläche bei Parallelbeleuchtung sein sollen. Die Meridiane haben also, projektiv gesehen, die zueinander dualen Eigenschaften, daß jeder von ihnen als Punktmannigfaltigkeit mit einer Ebene durch die Achse inzidiert und gleichzeitig die Berührungskurve einer einparametrigen Schar von Tangentialebenen der Fläche ist, die mit einem Punkt einer zweiten festen Achse in der uneigentlichen Ebene inzidieren. Um die Bezeichnung „Projektivrotationsflächen" (PR-Flächen) für die Projektivtransformierten dieser Flächen neu zu rechtfertigen, wollen wir nun einen Satz beweisen, der die PR-Flächen durch entsprechende Eigenschaften von gewissen, projektiv invariant mit der Fläche verbundenen Normalenkongruenzen kennzeichnet, wobei die Voraussetzungen dual zueinander sind. Wir behaupten

Satz 9. *Gehen bei einer Fläche sämtliche kanonischen Normalen erster und zweiter Art durch je eine feste Gerade, so ist sie eine PR-Fläche und umgekehrt haben alle PR-Flächen diese Eigenschaft. Von Regelflächen wird dabei abgesehen.*

Dieser Satz enthält nicht den Süssschen über die Affinnormalen einer Fläche, da diese nicht in den Ebenen des kanonischen Büschels zu liegen

[26]) Also insbesondere von Zylindern und Kegeln.

brauchen[27]). Wir formulieren unsere Aufgabe zunächst noch etwas anders. In einem festen Flächenpunkt liegen nämlich die Normalen des ersten kanonischen Büschels stets in einer Ebene $\mathfrak{R}$ durch den Flächenpunkt — vgl. Bol [3] § 82. Man nennt diese die kanonische Ebene des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$. Dual dazu gehen die zweiten kanonischen Normalen eines Flächenpunktes alle durch einen Punkt $\mathfrak{k}$, den kanonischen Punkt. Kanonische Ebene und kanonischer Punkt entsprechen sich hinsichtlich der Polarität an der Lie-F_2. Nur bei den Koinzidenzflächen fallen alle kanonischen Normalen zusammen, so daß hier kanonische Ebene und kanonischer Punkt unbestimmt sind. Schließen wir diesen Fall aus, so können wir dem Satz 9 folgende Fassung geben:

Satz 9*. *Bei den PR-Flächen und nur bei diesen bilden, wenn sie eindeutig bestimmt sind, die kanonischen Ebenen ein Büschel und die kanonischen Punkte eine lineare Punktreihe.*

2. Dem Beweis dieser Sätze schicken wir folgende Überlegung voraus. Nach Bol [3] § 82 liegt der Punkt

$$\tilde{\mathfrak{k}} = A_2 \mathfrak{x}_1 - B_1 \mathfrak{x}_2 \tag{7.1}$$

mit

$$A_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma}, \qquad B_1 = \frac{\beta_1}{\beta} \tag{7.2}$$

auf jeder der zweiten kanonischen Normalen, stellt also den kanonischen Punkt dar[28]). Dual dazu stellt in Ebenenkoordinaten[29])

$$\tilde{\mathfrak{R}} = A_2 \mathfrak{X}_1 - B_1 \mathfrak{X}_2 \tag{7.3}$$

die kanonische Ebene dar. Da wir Koinzidenzflächen zunächst ausgeschlossen hatten, die durch $A_2 = B_1 = 0$ gekennzeichnet sind, kann weder $A_2 = 0$ noch $B_1 = 0$ sein. Wäre z.B. $A_2 = 0$, so liest man aus (1) ab, daß der Punkt $\mathfrak{x}_2$, der auf der Tangente der Asymptotenlinien $u = \text{const}$ liegt, mit $\tilde{\mathfrak{k}}$ zusammenfällt. Liegen dann die Punkte $\tilde{\mathfrak{k}}$ auf einer Geraden, so erkennt man durch Differentiation, daß auch alle weiteren Ableitungen $\mathfrak{x}_{222}, \mathfrak{x}_{2222}, \ldots$ auf dieser Geraden liegen, so daß die eine Schar von Asymptotenlinien ebene Kurven sein müßten, was nicht geht, da sonst die Fläche eine Regelfläche wäre. Aus dem gleichen Grunde kann natürlich auch B_1 nicht identisch Null sein. Wir können daher den kanonischen Punkt bzw. die kanonische Ebene durch

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 - \alpha \mathfrak{x}_2, \tag{7.4}$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{X}_1 - \alpha \mathfrak{X}_2, \tag{7.5}$$

[27]) Satz 9 macht wiederum deutlich, daß es nicht zweckmäßig sein würde, die projektivtransformierten Affinsphären allgemein zu den PR-Flächen zu rechnen, da manche der für die PR-Flächen gültigen Sätze dann eingeschränkt werden müßten, so z.B. außer unseren Sätzen 6—9 auch der Satz von Su über die Darboux-Kurven.

[28]) Die Formeln dortselbst müssen allerdings noch vom Fubinischen System $\lambda = \mu = (\beta\gamma)^{-1}$ auf das Wilczynskische System $\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$ umgerechnet werden. Dabei wird $\varphi = B_1$, $\psi = A_2$ und aus (82.9) folgt (1).

[29]) $\mathfrak{X}$ bezeichne die Ebene durch die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ — vgl. Bol [3] § 77.

mit

$$\alpha = \frac{B_1}{A_2} \tag{7.6}$$

darstellen.

3. Der eigentliche Beweis von Satz 9* ist einfach. Sollen zunächst die kanonischen Punkte $\mathfrak{k}(u; v)$ einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ eine lineare Punktreihe darstellen, so muß sicher identisch in u, v gelten

$$f\mathfrak{k} + g\mathfrak{k}_1 + h\mathfrak{k}_2 = 0, \tag{7.7}$$

wobei f, g, h nicht gleichzeitig identisch Null sein dürfen. Mit Benutzung der Ableitungsgleichungen (1.4) folgt

$$(gl - g\alpha q + hp - h\alpha m)\,\mathfrak{x} + (f - \alpha\gamma h)\,\mathfrak{x}_1 + \\ + (-\alpha f + \beta g - \alpha_1 g - \alpha_2 h)\,\mathfrak{x}_2 + (-\alpha g + h)\,\mathfrak{y} = 0.$$

Da $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten dieser Gleichung einzeln verschwinden. Es ist also

$$\left\{\begin{array}{rr} (l - \alpha q)\,g + (p - \alpha m)\,h = 0, \\ f \qquad\qquad - \alpha\gamma h = 0, \\ -\alpha f + (\beta - \alpha_1)\,g \qquad - \alpha_2 h = 0, \\ -\alpha g \qquad + h = 0. \end{array}\right. \tag{7.8}$$

Diese vier Gleichungen zur Bestimmung von f, g, h haben nur dann von der Nullösung verschiedene Lösungen, wenn

$$l + \alpha(p - q) - \alpha^2 m = 0, \tag{7.9}$$

$$\beta - \alpha^3\gamma - (\alpha_1 + \alpha\alpha_2) = 0 \tag{7.10}$$

gilt. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann man (8) nach f, g, h auflösen und dann f, g, h aus (7) eliminieren. Man erhält

$$\alpha^2\gamma\mathfrak{k} + \mathfrak{k}_1 + \alpha\mathfrak{k}_2 = 0. \tag{7.11}$$

Aus (9) liest man ab, daß

$$\frac{dv}{du} = \alpha \tag{*}$$

eine Schar von Krümmungslinien der zweiten WILCZYNSKI-Normalen definiert — vgl. BOL [3] § 81 — und zwar sind diese Krümmungslinien Berührungskurven von der Fläche umschriebenen Kegeln, denn die Tangentialebenen der Fläche gehen durch den Punkt $\mathfrak{k}$, dieser aber bleibt beim Fortschreiten längs einer Kurve der Schar fest, wie man aus (11) und (*) erkennt.

4. Für die kanonischen Ebenen $\mathfrak{R}(u, v)$ von $\mathfrak{x}$ muß nun in dualer Weise

$$F\mathfrak{R} + G\mathfrak{R}_1 + H\mathfrak{R}_2 = 0 \tag{7.12}$$

identisch in u, v gelten, wenn sie ein Büschel darstellen sollen. Da für $\mathfrak{x}$ entsprechende Ableitungsgleichungen gelten wie für $\mathfrak{x}$ (man hat nach Bol [3], Formelgruppen (118.11) und (118.12) nur in (1.4) die Größen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{22}, \mathfrak{Y}$ sowie β und γ durch $-\beta$ und $-\gamma$ zu ersetzen) erhält man durch eine formal gleiche Schlußkette wie unter **3** drei weitere Gleichungen, und zwar

$$l + \alpha(p - q) - \alpha^2 m = 0, \tag{7.9}$$

$$-\beta + \alpha^3\gamma - (\alpha_1 + \alpha\alpha_2) = 0, \tag{7.13}$$

$$-\alpha^2\gamma\,\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_1 + \alpha\,\mathfrak{R}_2 = 0. \tag{7.14}$$

Die durch (*) definierte Kurvenschar ist auch eine Schar von Krümmungslinien der ersten Wilczynski-Normalen, da im Wilczynskischen System die Krümmungslinien beider Normalenkongruenzen zusammenfallen (Bol [3] §92), und zwar müssen diese Kurven ebene Kurven durch die Achse des Büschels der Ebenen $\mathfrak{R}$ sein, denn $\mathfrak{R}$ enthält den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ und bleibt, wie man aus (14) erkennt, beim Fortschreiten längs dieser Kurven fest. Ferner folgt nun aus (10) und (13), daß

$$\beta - \alpha^3\gamma = 0$$

gilt, d.h. aber, die genannte Schar von Krümmungslinien ist überdies eine Schar von Segre-Kurven. Da diese Schar aus ebenen Kurven in den Ebenen eines Büschels besteht, die gleichzeitig von Kegeln, die der Fläche umschrieben werden können, berührt werden, folgt nach dem obengenannten Satz von Süss [20] und Su [18], daß die gesuchten Flächen PR-Flächen sein müssen[30]).

Umgekehrt kann bei den PR-Flächen $\beta = \gamma = \psi(u + v)$ und $l = m$ erreicht werden, so daß nach (2) und (6) $\alpha = 1$ wird und (9), (10) und (13) erfüllt sind. Ferner kann man nun $\mathfrak{k}$ explizit berechnen. Es ist bei den PR-Flächen

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_{11} - \mathfrak{x}_{22} = \mathfrak{x}_{uu} - \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\,\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_{vv} + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{uu} - \mathfrak{x}_{vv} = 2\mathfrak{x}_{ss}.$$

Aus unseren Darstellungen (2.22) und (2.25) ist aber abzulesen, daß (es ist ja $k = 0$), $\frac{\partial x_3}{\partial s} = \frac{\partial x_4}{\partial s} = 0$ gilt, so daß $\mathfrak{k}$ stets auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ liegt. Dual dazu ist bei den PR-Flächen auch $\mathfrak{R} = 2\mathfrak{X}_s$. Da man die Komponenten von $\mathfrak{X}$ als dreireihige Determinanten der Matrix $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2)$ erhält, von denen nach (2.22) und (2.25) ebenfalls zwei nur von t abhängen, ist auch $\mathfrak{R}$ Teil einer Geraden. Damit ist Satz 9* bewiesen.

5. Es bleibt nun noch der oben ausgeschlossene Fall der Koinzidenzflächen zu betrachten, bei denen man $\beta = \gamma = 1$ annehmen kann. Die Normalen des kanonischen Büschels fallen alle mit den Wilczynski-Normalen zusammen. Ferner ist die halbinvariante Differentiation mit der gewöhnlichen

[30]) Die Anwendung des Satzes von Süss und Su erübrigt sich, wenn man auch die Bedingungen für die 3. Ableitungen des Ortsvektors heranzieht.

Differentiation identisch. Die Integrabilitätsbedingungen (1.6) lehren, daß

$$l = au + b, \qquad m = av + c \quad (a, b, c \text{ konstant}) \tag{7.15}$$

sein muß. Wir zeigen, daß die Behauptung von Satz 9 nur gilt, wenn $a = 0$, $b = c$ oder, anders ausgedrückt, wenn $l = m$ ist.

Falls die ersten Normalen alle durch einen festen Punkt laufen, liegen die zweiten Normalen alle in einer festen Ebene und umgekehrt[31]).

Dann ist $l = m = 0$ und unsere Behauptung trivial.

Anderenfalls betrachten wir wie unter **2** den Punkt

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_u - \alpha \mathfrak{x}_v. \tag{7.16}$$

$\mathfrak{k}$ liegt auf der zweiten WILCZYNSKI-Normalen durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$. Die Punkte $\mathfrak{x}_u$ oder $\mathfrak{x}_v$ können, wie unter **2** gezeigt, keine Punktreihe beschreiben. Demnach können wir $\alpha \neq 0$ annehmen. Soll für ein geeignetes $\alpha = \alpha(u, v)$ der Punkt $\mathfrak{k}$ eine Gerade beschreiben, so muß wieder eine Gleichung von der Form (7) gelten. Man kann dann genau wie unter **3** weiterschließen und erhält wegen $\alpha \neq 0$ und $p = q$

$$l - \alpha^2 m = 0, \tag{7.17}$$

$$1 - \alpha^3 - (\alpha_u + \alpha \alpha_v) = 0. \tag{7.18}$$

Für $a \neq 0$ sind aber (17) und (18) nicht miteinander verträglich, wie man durch Differentiation von (17) sofort erkennt. Ist dagegen $a = 0$, so folgt nach (17) und (18) $\alpha^3 = 1$. Durch geeignete Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien kann man $\alpha = 1$ erreichen. Dann folgt aus (17) $l = m$, q.e.d.

Umgekehrt sind mit $\alpha = 1$, $l = m$ die Bedingungen, daß die zweiten und auch die ersten Normalen durch je eine feste Gerade laufen, entsprechend wie oben realisierbar. Damit ist gezeigt, daß nur solche Koinzidenzflächen, die gleichzeitig PR-Flächen sind, Lösungen unseres Problems darstellen. Wegen Satz 9* ist damit dann auch Satz 9 vollständig bewiesen.

§ 8. Integration einer speziellen Picardschen Differentialgleichung

1. Als Einschaltung wollen wir in diesem Paragraphen eine spezielle lineare Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Koeffizienten integrieren, deren Lösungen im nächsten Paragraphen gebraucht werden. Es sei — die Bezeichnungen sind im Hinblick auf die Anwendung im nächsten Paragraphen gewählt — $\gamma(t)$ durch die Gleichung

$$t = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_1\gamma^2 + a_2\gamma + 4a_3}} \tag{8.1}$$

[31]) Dieser Fall konnte oben nicht eintreten, da ja sonst für jeden Flächenpunkt die sämtlichen kanonischen Normalen zusammengefallen wären, und das kann nur bei Koinzidenzflächen vorkommen.

definiert[32]) (k, a_1, a_2, a_3 bedeuten Konstante) und

$$\mathsf{B}(t) \equiv \beta(t) + \gamma(t) = 2\gamma(t) + k. \tag{8.2}$$

Zur Bestimmung der Parameterdarstellung der APR-Flächen, für die β, γ (1) und (2) befriedigen, ist nach § 2,5 bei $c \neq 0$ die Differentialgleichung (2.20), bei $c = 0$ die Gl. (2.26) zu integrieren.

Wir werden zeigen

Lemma: *Ist* $\mathsf{B}(t)$ *durch* (2) *und* (1) *bestimmt, so lassen sich die Differentialgleichungen* (2.20) *und* (2.26) *in geschlossener Form integrieren, und zwar mit den Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen oder mit elementaren Funktionen, je nachdem, ob die Wurzeln* h_i *der algebraischen Gleichung 4. Grades*

$$x^4 + 2k\,x^3 + 4a_1\,x^2 + a_2\,x + 4a_3 = 0 \tag{8.3}$$

voneinander verschieden sind oder nicht.

Sind dann k_1, k_2 *zwei Integrationskonstanten, so hat das allgemeine Integral von* (2.20) *die Form*

$$A(t) = k_1 w_1(t) + k_2 w_2(t)$$

und dasjenige von (2.26) *die Form*

$$A(t) = k_1 + k_2 \lim_{c \to 0} \{w_2(t, c)\} + w_3(t).$$

Für die verschiedenen möglichen Fälle gilt dann folgendes: Tabelle 1 enthält mit den Bezeichnungen aus Tabelle 2 die Funktionen $\mathsf{B}(t)$, *die sich durch Auflösung von* (1), (2) *je nach der Vielfachheit der Wurzeln von* (3) *ergeben. Tabelle 3 gibt dann die Funktionen* w_1, w_2, w_3 *für die verschiedenen zugehörigen Fälle, je nach der speziellen Wahl der Konstanten* k, a_1, a_2, a_3.

Wir werden den Beweis für das Lemma aus Raumgründen nicht mit allen Sonderfällen vorführen, da man sich durch Eliminationen und Differentiationen leicht davon überzeugt, daß die in Tabelle 1 angegebenen Funktionen $\mathsf{B}(t)$ die Auflösung von (1), (2) darstellen und daß die Funktionen w_1, w_2 bzw. w_2, w_3 aus Tabelle 3 die entsprechend spezialisierten Differentialgleichungen (2.20) bzw. (2.26) befriedigen und überdies linear unabhängig sind. Ebenso leicht sieht man ein, daß die angegebenen Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen.

Um aber zu zeigen, wie man zu den Lösungen aus Tabelle 3 kommt, werden wir den „Hauptfall" diskutieren, bei dem die Wurzeln h_i von (3) alle voneinander verschieden sind. Hierbei kann man sich auf den Fall $c \neq 0$ beschränken, da zur Integration der Differentialgleichung (2.26)

$$A'' - \mathsf{B}(t)\,A' + 1 = 0 \tag{8.4}$$

[32]) Die additive Integrationskonstante bei t ist für alles Folgende unwesentlich. Man kann sich das zunutze machen, um bei gegebenen reellen k, a_i durch geeignete Verfügung über diese Konstante die unten angegebenen Lösungen so zu schreiben, daß sie in einem gewissen Intervall der reellen Achse reelle Funktionswerte liefern.

nur Quadraturen erforderlich sind und insbesondere ein nicht konstantes partikuläres Integral der zugehörigen homogenen Gleichung (die aus (2.20) bzw. (5) mit $c=0$ entsteht) durch den Grenzübergang $c\to 0$ aus einem geeigneten partikulären Integral $w_2(t, c)$ dieser Gleichung

$$A'' - \mathsf{B}(t)\,A' + cA = 0, \tag{8.5}$$

erhalten werden kann. Ein partikuläres Integral w_3 der inhomogenen Gl. (4) findet man dann mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2. Zunächst läßt sich allgemein durch die Substitution

$$A(t) = Z(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int \mathsf{B}(t)dt} \tag{8.6}$$

aus (5) das Glied mit der ersten Ableitung entfernen. Zur Bestimmung von $Z(t)$ erhält man die Gleichung

$$Z'' - (\tfrac{1}{4}\mathsf{B}^2 - \tfrac{1}{2}\mathsf{B}' - c)\,Z = 0. \tag{8.7}$$

Sind die Wurzeln h_i von (3) alle voneinander verschieden, so kann man nach einer bekannten Formel — vgl. TRICOMI [*14*] S. 118[33]) — die Auflösung von (1) nach γ in der Form

$$\gamma = -\frac{1}{2}\,k + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0} \tag{8.8}$$

schreiben, falls die Wurzel in (1) positiv ausgezogen wird. Die Invarianten g_2, g_3 der in dieser Gleichung auftretenden WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion mit den Perioden $2\omega_1, 2\omega_2$ haben dabei die Werte

$$g_2 = 4a_3 - \tfrac{1}{2}a_2 k + \tfrac{4}{3}a_1^2,\quad g_3 = \tfrac{8}{3}a_1 a_3 - k^2 a_3 - \tfrac{1}{16}a_2^2 + \tfrac{1}{6}k a_1 a_2 - \tfrac{8}{27}a_1^3. \tag{8.9}$$

Ferner sei t_0 durch die zusammenstimmenden Formeln

$$\wp t_0 = \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{8}{3}a_1,\qquad \wp' t_0 = \tfrac{1}{4}k^3 - k a_1 + \tfrac{1}{4}a_2 \tag{8.10}$$

definiert und im Periodenparallelogramm mit den Ecken $\pm\omega_1 \pm\omega_2$ gelegen. Nach (8) und (2) gilt

$$\mathsf{B}(t) = \frac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}. \tag{8.11}$$

Hieraus ergibt sich für den Koeffizienten von $Z(t)$ in (7)

$$\begin{aligned} I \equiv \frac{1}{4}\mathsf{B}^2 - \frac{1}{2}\mathsf{B}' - c &= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}\right) - c \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}\right)^2 + \wp(t + t_0) - \wp t - c = 2\wp(t + t_0) + \wp t_0 - c. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen noch mit t_1 eine der beiden wie t_0 normierten Lösungen der Gleichung

$$\wp t_1 = \wp t_0 - c. \tag{8.12}$$

[33]) Es ist dort in Formel (2.61) ein Fehler bei $\wp' v$ zu korrigieren.

Setzen wir nun unser Resultat in (7) ein, so ergibt sich die LAMÉsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - [2\wp(t+t_0) + \wp t_1] Z = 0. \tag{8.13}$$

Diese hat — vgl. KAMKE [15] S. 409 — die beiden partikulären Lösungen

$$Z_{1,2} = e^{\mp t\zeta t_1} \frac{\sigma(t+t_0 \pm t_1)}{\sigma(t+t_0)},$$

die linear unabhängig sind, solange $2t_1$ keine Periode der $\wp$-Funktion ist. Da nach (11) noch

$$\frac{1}{2}\int \mathsf{B}(t)\,dt = \log\frac{\sigma(t+t_0)}{\sigma t} - t\zeta t_0 + C$$

Tabelle 1

	h_i	$\mathsf{B}(t)$
1a	Alle voneinander verschieden	$\dfrac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}$
1b	Alle voneinander verschieden	$-\dfrac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}$
2	$h_1 = h_2,\ h_1 \neq h_3 \neq h_4 \neq h_1$	$2\varrho\left(\operatorname{ctg} 2\bar{t}_0 - \dfrac{2\sin 2\bar{t}_0}{\cos 2\bar{t} - \cos 2\bar{t}_0}\right)$
3a	$h_1 = h_2,\ h_3 = h_4,\ h_1 \neq h_3$	$-2r\,\mathfrak{Ctg}\, rt$
3b	$h_1 = h_2,\ h_3 = h_4,\ h_1 \neq h_3$	$+2r\,\mathfrak{Ctg}\, rt$
4	$h_1 = h_2 = h_3,\ h_1 \neq h_4$	$b + \dfrac{4b}{b^2t^2 - 1}$
5a	$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \left(= -\dfrac{k}{2}\right)$	$-\dfrac{2}{t}$
5b	$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \left(= -\dfrac{k}{2}\right)$	$+\dfrac{2}{t}$

Tabelle 2. Bezeichnungen

Zu Fall **1**	Elementare Perioden der $\wp$-Funktion: $2\omega_1, 2\omega_2$. Ferner sei $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ und g_2, g_3 durch (9), t_0 durch (10), t_1 durch (12) definiert, wobei t_0, t_1 im Periodenparallelogramm mit den Ecken $E_i = (\pm\omega_1 \pm \omega_2)$ liegen sollen. Bei Fall 1b) ist in (10) t_0 durch $-t_0$ zu ersetzen.
Zu Fall **2**	$\bar{t} = \varrho t,\ \bar{t}_0 = \varrho t_0,\ \bar{t}_1 = \varrho t_1$ mit $(-\pi < 2\bar{t}_0,\ 2\bar{t}_1 \leq +\pi)$ und $2\varrho = \pm\sqrt{(h_1 - h_3)(h_4 - h_1)}$. Es sei $\bar{t}_0$ durch die Gleichungen $(h_3 - h_4)\cos 2\bar{t}_0 = 2h_1 - h_3 - h_4,\ (h_3 - h_4)\sin 2\bar{t}_0 = 4\varrho$ und $\bar{t}_1$ durch $\varrho^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{t}_1 = \varrho^2 \operatorname{ctg}^2 2\bar{t}_0 - c$ definiert.
Zu Fall **3**	$r = \dfrac{1}{2}(h_1 - h_3) = +\dfrac{1}{2}\sqrt{3k^2 - 8a_1} \neq 0,\quad r_1 = +\sqrt{r^2 - c}.$
Zu Fall **4**	$b = \dfrac{1}{2}(h_1 - h_4) = \pm\sqrt{k^2 - \dfrac{8}{3}a_1} \neq 0,\quad b_1 = +\sqrt{1 - \dfrac{4c}{b^2}}.$

Tabelle 3

Fall	w_1	w_2	w_3
1a $t_1 \neq \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_0-t_1)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta t_1)}$	$\frac{\sigma(t+t_0+t_1)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0+\zeta t_1)}$	$\frac{1}{\wp' t_0}\,[\zeta t + t\wp t_0]$
1a $t_1 = \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_0-\omega_i)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$[\zeta(t+t_0-\omega_i)+t\wp\omega_i]\,\frac{\sigma(t+t_0-\omega_i)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$\frac{1}{\wp''\omega_i}\,[\wp t-(\zeta t+t\wp\omega_i)^2]$
1b $t_1 \neq \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_1)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta t_1)}$	$\frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0+\zeta t_1)}$	$-\frac{1}{\wp' t_0}\,[\zeta(t+t_0)+t\wp t_0]$
1b $t_1 = \omega_i$	$\frac{\sigma(t+\omega_i)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$[\zeta(t+\omega_i)+t\wp\omega_i]\,\frac{\sigma(t+\omega_i)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$\frac{1}{\wp''\omega_i}\,[\wp(t+\omega_i)-\{\zeta(t+\omega_i)+t\wp\omega_i\}^2]$
2 $2\bar{t}_1 \neq \pi$	$\frac{\sin(\bar{t}-\bar{t}_0+\bar{t}_1)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}(\operatorname{ctg}2\bar{t}_0-\operatorname{ctg}\bar{t}_1)}$	$\frac{\sin(\bar{t}-\bar{t}_0-\bar{t}_1)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}(\operatorname{ctg}2\bar{t}_0+\operatorname{ctg}\bar{t}_1)}$	$\frac{1}{2\varrho^2}\,\frac{\sin^3 2\bar{t}_0}{\cos 2\bar{t}_0}\left[\operatorname{ctg}(\bar{t}+\bar{t}_0)+\frac{\bar{t}}{\sin^2 2\bar{t}_0}\right]$
2 $2\bar{t}_1 = \pi$	$\frac{\cos(\bar{t}-\bar{t}_0)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}\operatorname{ctg}2\bar{t}_0}$	$[\operatorname{tg}(\bar{t}-\bar{t}_0)-\bar{t}]\,\frac{\cos(\bar{t}-\bar{t}_0)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}\operatorname{ctg}2\bar{t}_0}$	$-\frac{1}{\varrho^2}\left[\bar{t}\operatorname{ctg}\left(\bar{t}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\bar{t}^2\right]$
3a $r_1 \neq 0$	$\frac{\mathfrak{Sin}\, r_1 t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$\frac{\mathfrak{Cof}\, r_1 t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$-\frac{t}{2r}\,\mathfrak{Ctg}\, r t$
3a $r_1 = 0$	$\frac{1}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$\frac{r t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$-$
3b $r_1 \neq 0$	$\mathfrak{Cof}\, r t\,\mathfrak{Cof}\, r_1 t - \frac{r_1}{r}\,\mathfrak{Sin}\, r t\,\mathfrak{Sin}\, r_1 t$	$\frac{1}{c}\left[\mathfrak{Sin}\, r t\,\mathfrak{Cof}\, r_1 t - \frac{r}{r_1}\,\mathfrak{Cof}\, r t\,\mathfrak{Sin}\, r_1 t\right]$	$+\frac{1}{2r^2}\,\mathfrak{Cof}^2 r t$
3b $r_1 = 0$	$\mathfrak{Cof}\, r t$	$\mathfrak{Sin}\, r t - r t\,\mathfrak{Cof}\, r t$	$-$
4 $b_1 \neq 0$	$\left[\frac{1-b_1}{1+bt}+\frac{1}{2}b_1\right] e^{\frac{1}{2}(1-b_1)bt}$	$\left[\frac{1+b_1}{1+bt}-\frac{1}{2}b_1\right] e^{\frac{1}{2}(1+b_1)bt}$	$\frac{1}{b^2}\left[bt+\frac{4}{1+bt}\right]$
4 $b_1 = 0$	$\frac{1}{1+bt}\, e^{\frac{1}{2}bt}$	$\frac{(1-bt)^3}{1+bt}\, e^{\frac{1}{2}bt}$	$-$
5a	$\frac{1}{t}\sin t\sqrt{c}$	$\frac{1}{t}\cos t\sqrt{c}$	$-\frac{1}{6}t^2$
5b	$\cos t\sqrt{c} + t\sqrt{c}\sin t\sqrt{c}$	$\frac{1}{c\sqrt{c}}\,[\sin t\sqrt{c} - t\sqrt{c}\cos t\sqrt{c}\,]$	$\frac{1}{2}t^2$

gilt, bilden dann

$$(8.14)\qquad \begin{cases} w_1 = e^{-t(\zeta t_0 - \zeta t_1)} \dfrac{\sigma(t + t_0 - t_1)}{\sigma t}, \\ w_2 = e^{-t(\zeta t_0 + \zeta t_1)} \dfrac{\sigma(t + t_0 + t_1)}{\sigma t} \end{cases}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen für die aus (5) mit dem Koeffizienten $\mathsf{B}(t)$ aus (11) gebildete Differentialgleichung. Ist dagegen c so gewählt, daß $t_1 = \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, also $2t_1$ eine Periode der $\wp$-Funktion ist, so hat man in

$$(8.15)\qquad w_2^* = [\zeta(t + t_0 - \omega_i) + t\wp\omega_i] \frac{\sigma(t + t_0 - \omega_i)}{\sigma t} e^{-t(\zeta t_0 - \zeta\omega_i)}$$

— vgl. KAMKE l. c. — ein von w_1 linear unabhängiges Integral der Differentialgleichung. Wird in (1) die Wurzel negativ ausgezogen, so hat man in (11) t durch $-t$ zu ersetzen. Ersetzt man auch t_0 durch $-t_0$, so ist in (10) bei $\wp' t_0$ die rechte Seite mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen. Man erhält dann nach analogen Rechnungen wie soeben die in Tabelle 3 unter Fall 1b) angegebenen Lösungen[34]). Für den Fall $c = 0$ verweisen wir auf die Bemerkungen unter **1.**

3. Besitzt die algebraische Gl. (3) mehrfache Wurzeln h_i, so benötigt man zur Darstellung von $\mathsf{B}(t)$ und zur Integration von (5) und (4) nur elementare Funktionen. Wir übergehen daher die rechnerische Durchführung und fassen nur die Resultate in Tabellenform zusammen.

§ 9. Auf Projektivminimalflächen abwickelbare APR-Flächen

Ziel dieses Paragraphen ist die Bestimmung der Parameterdarstellung der APR-Flächen, die auf Projektivminimalflächen projektiv abwickelbar sind. Diese Flächenklasse enthält die APR-Flächen der meisten von BOL in [*3*], § 121 angegebenen projektiv wichtigen Flächenklassen, die sich durch Eigenschaften der DEMOULINschen Kongruenzen kennzeichnen lassen, insbesondere die APR-Flächen, die Flächen von DEMOULIN, projektiv-transformierte Affinsphären oder ein- bzw. zweifache Komplexflächen sind. Nachdem aus den kennzeichnenden halbinvarianten Bedingungsgleichungen β, γ durch Integration bestimmt sind, ist nach § 3,5 noch die Integration einer linearen Differentialgleichung vom Typus

$$(9.1)\qquad \frac{d^2A}{dt^2} - \mathsf{B}(t)\frac{dA}{dt} + cA = a \qquad (a, c = \text{const})$$

zu leisten. Da sich zeigen wird, daß in dem von uns zu betrachtenden Fall $\mathsf{B}(t)$ durch die Gln. (1) und (2) des vorigen Paragraphen definiert werden kann, erhält man auf Grund des dort abgeleiteten Lemmas explizite Parameter-

[34]) Man kann dieses Ergebnis auch aus einem allgemeineren Satz von SEGRE [*16*] S. 44 ff. über den Zusammenhang der Integrale von (5) und der aus (5) durch Ersetzung von $\mathsf{B}(t)$ durch $-\mathsf{B}(t)$ entstehenden Differentialgleichung herleiten.

darstellungen der gesuchten Flächen aus Tabelle 3, die demnach außer elementaren Funktionen höchstens die Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen enthalten.

1. Wir beginnen damit, l, m explizit als Funktionen von β, γ auszudrücken. Aus (2.8) erhält man durch Addition und Subtraktion der beiden ersten Gleichungen mit Benutzung von (2.1) und der Gleichung $\Gamma = k$:

$$\text{(9.2)} \qquad \begin{cases} \varkappa = \frac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma - \frac{1}{2}\gamma' + \frac{1}{2}(c_1 + \frac{1}{4}k^2), \\ \chi = \frac{3}{4}\beta^2 - k\beta - \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{2}(c_1 + \frac{1}{4}k^2). \end{cases}$$

Verwendet man die Abkürzung

$$\text{(9.3)} \qquad a_0 = \tfrac{1}{2}(c_1 + \tfrac{1}{4}k^2) = \tfrac{1}{2}k^2 - c,$$

so erhält man durch Einsetzen in die in § 1 für l, m angegebenen Ausdrücke (1.5)

$$\text{(9.4)} \qquad \begin{cases} l = \frac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma + a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2, \\ m = \frac{3}{4}\beta^2 - k\beta + a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2. \end{cases}$$

2. Als nächstes sind nun die Größen β und γ für unsere gesuchten Flächen zu bestimmen. Da sich bei einer projektiven Abwicklung β und γ nicht ändern — vgl. dazu auch § 4 — werden wir keine Lösungen unseres Problems verlieren, wenn wir β und γ als Funktionen von t nur für die Projektivminimalflächen unter den APR-Flächen selbst berechnen und die Abwicklungen zunächst nicht mit berücksichtigen, da ja zu gegebenen Funktionen $\beta(u+v)$, $\gamma(u+v)$ mit $\beta - \gamma = k = \text{const}$ nach § 4,**1** und 4,**2** stets auch Funktionenpaare $l(u+v)$, $m(u+v)$ gefunden werden können, die die Integrabilitätsbedingungen (1.6) erfüllen. Soll eine Fläche Projektivminimalfläche sein, so gilt $l_1 = 0$ — vgl. BOL [3] § 121 — und hieraus folgt nach § 1 durch Integration, da l das Gewicht (2,0) hat

$$\text{(9.5)} \qquad l\gamma^2 = a_3 \qquad (a_3 = \text{const}).$$

Setzt man aus (4) den Wert für l ein, so entsteht zur Bestimmung von $\gamma(t)$ die Differentialgleichung

$$\text{(9.6)} \qquad \frac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma + a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = \frac{a_3}{\gamma^2}.$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung ergibt sich aus der Annahme, daß γ' identisch verschwindet, denn dann liefert (6) eine algebraische Gleichung 4. Grades zur Bestimmung von γ; wegen $\beta - \gamma = k$ ist dann auch β konstant und die zugehörigen Flächen müssen Koinzidenzflächen sein — vgl. hierzu **4** auf S. 443. — Anderenfalls läßt sich die mit $4\gamma'$ multiplizierte Gl. (6) unmittelbar nach t integrieren und liefert

$$\text{(9.7)} \qquad \gamma^3 + 2k\gamma^2 + 4a_0\gamma - \frac{\gamma'^2}{\gamma} + 4\frac{a_3}{\gamma} + a_2 = 0 \qquad (a_2 = \text{const}).$$

Jetzt lassen sich die Veränderlichen trennen. Es folgt

$$t = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_0\gamma^2 + a_2\gamma + 4a_3}}. \tag{9.8}$$

Durch diese Gleichung ist nun γ als Funktion von t festgelegt.

3. Nach § 4,**3** und § 4,**1** erhält man Abwicklungen einer gegebenen APR-Fläche, indem man β, γ beibehält und l, m durch $\bar{l} = l + a$, $\bar{m} = m + a$ mit beliebiger Konstante a ersetzt. Für die abgewickelten Flächen hat man dann nach (4) $\bar{a}_0 = a_0 + a$. Diese Beziehung kann man so auffassen, daß für die Abwicklungen einer gegebenen APR-Fläche die Konstante a_0 nicht mehr durch (3) an c_1 bzw. c gebunden, sondern frei variabel ist. Die Gl. (8) bleibt also für die Abwicklungen der Projektivminimalflächen unter den APR-Flächen gültig, wir wollen aber der Deutlichkeit halber a_0 durch eine neue, freie Konstante a_1 ersetzen und für a_0 die Definitionsgleichung (3) beibehalten. Damit geht aber die Gl. (8) in die Gl. (8.1) über, und unsere Aufgabe ist auf das in § 8 gelöste Problem zurückgeführt, da wegen $\beta - \gamma = k$ auch (8.2) erfüllt ist.

Wir brauchen also nur noch die in Tabelle 3 zusammengefaßten Lösungen in die allgemeinen in § 2,**5** gefundenen Darstellungen einzusetzen, um die gesuchten Parameterdarstellungen für unsere Flächen zu erhalten[35]). Diese verteilen sich daher auf verschiedene Klassen, je nach dem Wert der Konstanten k, a_i, die die Vielfachheit der Wurzeln von (8.3) bestimmen und dem Wert von c, bzw. a_0, der bei gleichen k, a_i $(i = 2, 3)$ die Fläche aus einer Schar aufeinander projektiv abwickelbarer heraushebt. Falls $c \neq 0$, hat man w_1, w_2 in (2.22) und (2.23) einzusetzen, falls $c = 0$ dagegen w_2, w_3 in (2.24) und (2.25).

4. Wir wollen zum Schluß noch die APR-Flächen, die in die am Anfang des Paragraphen erwähnten, (hier) spezielleren Flächenklassen gehören, herausheben. Durch $l_1 = 0$ oder $a_1 = a_0$ wurden Projektivminimalflächen definiert, gilt aber nicht nur $l_1 = 0$, sondern schon $l = 0$, so erhält man Flächen mit entartetem Viereck von DEMOULIN. Aus (5) liest man ab, daß dazu bei uns $a_3 = 0$, $a_1 = a_0$ notwendig und hinreichend ist. Ist dann auch noch $a_2 = 0$, so gilt außer $l = 0$ auch $p = 0$, wie man durch Vergleich von (7) mit der aus der Bedingung $p = 0$ unter **5** abgeleiteten Gl. (14) feststellt, so daß durch $a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = a_0$ Komplexflächen mit entartetem Viereck von DEMOULIN gekennzeichnet werden.

Ist außer $l = 0$ auch $m = 0$, so werden wir auf Flächen von DEMOULIN geführt. Es gilt dann (7) mit $a_3 = 0$ und eine entsprechend wie oben aus der Bedingung $m = 0$ zu erhaltende Gleichung für β. Wir können diesen beiden Gleichungen die Form

$$\gamma'^2 = \gamma^2(\gamma + k)^2 + (4a_0 - k^2)\gamma^2 + a_2\gamma, \tag{9.9}$$

$$\beta'^2 = \beta^2(\beta - k)^2 + (4a_0 - k^2)\beta^2 + \bar{a}_2\beta, \tag{9.9'}$$

[35]) Eine Diskussion der Realitätsverhältnisse dieser Darstellungen würde uns hier zu weit führen.

geben. Subtrahiert man sie voneinander, so folgt wegen $\beta' = \gamma'$:

$$0 = (4a_0 - k^2)(\gamma^2 - \beta^2) + a_2\gamma - \bar{a}_2\beta$$

und hieraus

$$\gamma[-2k(4a_0 - k^2) - \bar{a}_2 + a_2] - k[k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2] = 0.$$

Lassen wir nun Koinzidenzflächen unberücksichtigt, so muß, da dann γ nicht konstant sein kann,

$$2k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2 - a_2 = 0,$$

$$k[k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2] = 0$$

gelten. Wir haben dann die beiden wesentlich verschiedenen Fälle

$$(9.10) \quad \begin{cases} \text{I)} & k \neq 0 & \text{also} & a_2 + \bar{a}_2 = 0 & \text{und} & \bar{a}_2 = k(k^2 - 4a_0) \\ \text{II)} & k = 0 & \text{also} & a_2 - \bar{a}_2 = 0 \end{cases}$$

zu unterscheiden.

Die Flächen I) bestehen, entsprechend den Fällen $a_2 = 0$ und $a_2 \neq 0$ aus

a) den Projektivtransformierten von uneigentlichen Affinsphären, welche APR- aber keine PR-Flächen sind, und

b) den Flächen von DEMOULIN, welche APR-Flächen, aber keine Projektivtransformierten von eigentlichen oder uneigentlichen Affinsphären sind, da $a_2 = 0$ gleichbedeutend mit $4a_0 - k^2 = 0$ ist, woraus wie oben $p = q = l = m = 0$ folgt[36]).

Die Flächen II), die wegen $k = 0$ PR-Flächen sind, bestehen entsprechend den Fällen $a_2 = 0$ und $a_2 \neq 0$ aus

a) Projektivtransformierten von uneigentlichen Affinsphären, und

b) Projektivtransformierten von eigentlichen Affinsphären.

Bei den letzteren, den projektivtransformierten eigentlich-affinsphärischen PR-Flächen[37]), schreiben wir als Ergänzung zu § 5 für den zu (5.7) analogen Fall die Parameterdarstellung ausführlich hin. Es gilt dann $k = 0$, $a_1 = a_0$ und $a_3 = 0$. Als Lösung der transzendenten Gl. (8.12) haben wir für $c \neq 0$: $2t_1 = t_0$, für $c = 0$: $t_1 = t_0$. Durch Einsetzen von w_1, w_2 aus Tabelle 3, Fall 1a mit $t_1 \neq \omega_i$ ($t = \omega_i$ ist nicht möglich) in (2.22) bzw. von w_1, w_3 in (2.25) ergeben

[36]) Unter den Flächen 1b) kommen also keine vom Typ (2.23) vor, da für diese stets $4a_0 = k^2$ ist.

[37]) In der Literatur sind für diese Flächen bzw. deren Meridiankurven schon mehrfach Parameterdarstellungen angegeben worden. Man vgl. z.B. TZITZÉICA [*21*] S. 214, CALUGAREANU [*8*] und JONAS, Math. Nachr. **10**, 331—352 (1953) (insbesondere S. 345 bis 347). Die genannten Autoren gehen von der Tatsache aus, daß für die Affinsphären der Quotient aus Gaussscher Krümmung und 4. Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom „Mittelpunkt" der Fläche für alle regulären Flächenpunkte konstant ist. Man vgl. auch die Kennzeichnung unserer Flächen, die sich aus Theorem 34 und 35 bei SU [*17e*] ergibt.

sich die Darstellungen

$$(9.11)\qquad \begin{cases} x_1 = \varrho\, e^{s\sqrt{-c}}, \\ x_2 = \varrho\, e^{-s\sqrt{-c}}, \\ x_3 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+\frac{1}{2}t_0)}{\sigma t}\cdot e^{-t\zeta(\frac{1}{2}t_0)}, \\ x_4 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+\frac{3}{2}t_0)}{\sigma t}\cdot e^{-3t\zeta(\frac{1}{2}t_0)}, \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} x_1 = \varrho\left(\dfrac{1}{2}s^2 + \dfrac{4}{a_2}\zeta t\right), \\ x_2 = \varrho\, s, \\ x_3 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+2t_0)}{\sigma t}\, e^{-2t\zeta t_0}, \\ x_4 = \varrho. \end{cases}$$

(Diese Darstellungen sind reell, falls $c \leqq 0$ gewählt wird.) Man erkennt die Analogie zur Darstellung (5.7)[38]).

Unter unseren Flächen mit $l_1 = 0$ sind auch als projektive Abwicklungen von eigentlich-affinsphärischen PR-Flächen die speziellen *Koinzidenzflächen*, bei denen β, γ, l, m zu Konstanten gemacht werden können, enthalten. Diese sind sehr oft untersucht worden[39]). Sie gestatten eine zweigliedrige Gruppe von Projektivitäten in sich, die nur dann aus raumtreuen Affinitäten besteht, wenn die Fläche durch eine affine Transformation aus den beiden Affinsphären

$$(9.12)\qquad z(x^2 + \varepsilon y^2) = 1 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

hervorgeht (x, y, z bedeuten hier affine Koordinaten) — vgl. BLASCHKE [*1*], S. 243. Die Meridiankurven dieser Koinzidenzflächen sind ebene W-Kurven. Dies alles läßt sich auch mit unseren Hilfsmitteln ohne Schwierigkeit nachweisen.

5. Daß auch die (einfachen) Komplexflächen unter den APR-Flächen zu den von uns betrachteten Flächen gehören, kann man einerseits leicht aus den Integrabilitätsbedingungen (1.6) ablesen, denn für die Komplexflächen gilt identisch $\mathfrak{p} = 0$, und damit folgt aus (1.6) $l(t) = \text{const}$. Die Flächen mit $l = \text{const}$ sind aber als Abwicklungen der Flächen mit $l = 0$ sicher unter den oben betrachteten Flächen enthalten. Andererseits läßt sich unsere Behauptung auch durch direkte Integration der Differentialgleichung $\mathfrak{p} = 0$ beweisen. Es ist nach (1.5)

$$(9.13)\qquad \mathfrak{p} = \frac{1}{2}\left[\beta\gamma - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'\right] = 0$$

oder wegen $\beta - \gamma = k$

$$\gamma(\gamma + k) - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' = 0.$$

[38]) Die Flächen hängen von den beiden willkürlichen Konstanten a_2, c ab. In unserer speziellen Darstellung (11) gehen alle WILCZYNSKI-Normalen durch den Punkt (0, 0, 0, 1) des Koordinatentetraeders und die vom Punkt $\mathfrak{y}$ — s. § 1 — beschriebene Fläche ist spiegelbildlich bezüglich des Nullpunktes (0, 0, 0, 1) — in affiner Sprechweise — zur Ausgangsfläche gelegen.

[39]) Vgl. z.B. SEGRE [*16*] S. 54—57, BOL [*2*] S. 148, BOL [*3*] und die bei FUBINI und ČECH [*12*] S. 104 zitierten Arbeiten.

Multipliziert man diese Gleichung mit $2\frac{\gamma'}{\gamma}$ (γ' kann nicht identisch Null sein, da sonst nach (13) $\beta\gamma = 0$ wäre und die Fläche eine Regelfläche sein müßte) und integriert nach t, so hat man

$$\gamma^2 + 2k\gamma - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = -4a_1 \qquad (a_1 = \text{const}),$$

was auch in der Form

$$\gamma'^2 = \gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_1\gamma^2 \tag{9.14}$$

geschrieben werden kann. Damit ist der Anschluß an unsere obigen Formeln gewonnen, denn diese Gleichung geht durch Trennen der Veränderlichen und Integration in einen Spezialfall der Gl. (8) über. Die zugehörige Gl. (8.3) hat mindestens $h_1 = 0$ als mehrfache Wurzel und daher gehen bei den hierher gehörenden Flächen nur elementare Funktionen in unsere Parameterdarstellung ein.

Soll eine Fläche zweifache Komplexfläche sein, so muß neben $p = 0$ auch noch $q = 0$ gelten. Da (14) in der Form

$$\beta^2\gamma^2 - \gamma'^2 = (k^2 - 4a_1)\gamma^2 \tag{9.15}$$

Tabelle 4

	k	a_1	a_2	a_3	c
Projektivminimalflächen ($l_1 = 0$)		$a_1 = a_0$			
Flächen mit entartetem Viereck von DEMOULIN (Flächen von GODEAUX-ROZET) ($l = 0$)		$a_1 = a_0$		0	
Flächen von DEMOULIN ($l = m = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = a_0$	$a_2 = -\bar{a}_2 = k(4a_0 - k^2)$	0	
	0	$a_1 = a_0$	$a_2 = \bar{a}_2$		
Einfache Komplexflächen ($p = 0$)			0	0	
Zweifache Komplexflächen ($p = q = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{4}k^2$	0	0	
	0	$a_1 = \bar{a}_1$			
Projektivtransformierte eigentliche Affinsphären ($l = m = 0$, $p = q \neq 0$)	0	$a_1 = a_0$	$a_2 \neq 0$	0	
Projektivtransformierte uneigentliche Affinsphären ($l = m = p = q = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = a_0$	$a_2 = \bar{a}_2 = 0$	0	$c = a_0 = \frac{1}{4}k^2$
	0	$a_1 = a_0$	0	0	

geschrieben werden kann, wozu nun noch die aus $q=0$ entsprechend herzuleitende Gleichung

$$\beta^2\gamma^2 - \beta'^2 = (k^2 - 4\bar{a}_1)\beta^2 \tag{9.16}$$

tritt, erkennt man durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen sofort, daß wegen $\beta', \gamma' \neq 0$: $4a_1 = 4\bar{a}_1$ sein muß. Ist $k \neq 0$, so gilt $4a_1 = 4\bar{a}_1 = k^2$; dann besitzt die Gl. (8.3) zwei Doppelwurzeln und die Parameterdarstellung dieser Flächen ergibt sich durch Einsetzen von w_1, w_2 aus Tabelle 3, Fall 3 in (2.22) und (2.23) bzw. von w_2, w_3 in (2.24). Von diesen Flächen gehören die an zweiter Stelle genannten zu den oben bereits erwähnten projektivtransformierten uneigentlichen Affinsphären. Der andere Fall $k=0$ liefert natürlich die PR-Flächen mit $p=q=0$.

6. Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen

Satz 10. *Die auf Projektivminimalflächen abwickelbaren APR-Flächen gestatten eine Parameterdarstellung, die außer elementaren Funktionen höchstens noch die* WEIERSTRASSsche *σ-Funktion enthält. Explizit erhält man diese Darstellungen, indem man die in Tabelle 3 angegebenen Funktionen w_1, w_2 in die allgemeinen Parameterdarstellungen* (2.22) *oder* (2.23) *und w_2, w_3 in* (2.24) *oder* (2.25) *einsetzt. Indem man dann die Konstanten k, c, a_i wie in der folgenden Tabelle 4 angegeben spezialisiert, erhält man die APR-Flächen, die in die angegebenen spezielleren Flächenklassen gehören.*

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Berlin 1923. (Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst. 7.) — [2] BOL, G.: Über einen neuen Aufbau der projektiven Flächentheorie. Commentarii Math. Helv. **18**, 129—153 (1945/46). — [3] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Teil 1 u. 2. Göttingen 1950—1954. (Studia mathem. 4.9.) [Bd. 1 enthält die §§ 1—73, Bd. 2 die §§ 74—129.] — [4] BOL, G.: Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie. Math. Ann. **122**, 279—295 (1950/51). — [5] BORŮVKA, O.: Sur certaines Types de surfaces, qui sont projectivement applicables sur elles mêmes. Brünn 1924. (Publications de la Fac. Sci. Univ. Masaryk. 43.) [Tschech., mit franz. Zus.fass.] — [6] BORŮVKA, O.: Sur les Surfaces projectivement déformables qui admettent un groupe de ∞^1 transformations projectives en elles-mêmes. C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 964—966 (1929). — [7] BORŮVKA, O.: Sur les Surfaces, dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux. Bull. Sci. Math., Sér. 2 **53**, P. 1, 307—320, 324—328 (1929). — [8] CALUGAREANU, G.: Sur les Surfaces de Tzitzéica, qui sont des surfaces de révolution. Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine **20**, Nr. 7, 31—33 (1938). — [9] ČECH, E.: Sur les Surfaces, qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes. Brünn 1924. (Publications de la Fac. Sci. Univ. Masaryk. 40.) — [10] FUBINI, G.: Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale. Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 1—46 (1919). — [11] FUBINI, G., e E. ČECH: Geometria proiettiva differenziale, Bd. 1 u. 2. Bologna 1927. [Bisweilen kurz als „G.P.D." zitiert.] — [12] FUBINI, G., et E. ČECH: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Paris 1931. — [13] LIE, S.: Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten. Ber. ü. d. Verh. K. sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. **47**, 209—260 (1895). (Abgedr. in LIE: Ges. Abh. Bd. 6, S. 494—538. Leipzig 1927.) — [14] TRICOMI, F.: Elliptische Funktionen [Funzioni

ellittiche, dt.]. Übers. u. bearb. v. M. KRAFFT. Leipzig 1948. (Math. und ihre Anwendungen in Phys. u. Technik. Reihe A, 20.) — [*15*] KAMKE, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Teil 1. Leipzig 1942. (Math. und ihre Anwendungen in Monogr. und Lehrb. 18.) — [*16*] SEGRE, B.: Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni differenziali ad esse collegate. Roma 1931. (Memorie delle R. Acad. Italia. Classe sci. fis., mat. e nat. 2, mat. 3.) — [*17a, b, e*] SU, B.: On the Theory of surfaces in the affine space. 1.2.5. Jap. J. Math. **5** (1928). 1. Affine moulding surfaces and aff. surf. of revolution, S. 185—210. 2. Generalized aff. mould. surf. and aff. surf. of revolution, S. 211—224. 5. Studies on aff. mould. surfaces, S. 337—343. — [*18*] SU, B.: On a certain Class of surfaces, whose Darboux curves of one system are conics. Tohoku Math. J. **36**, 241—252 (1933). — [*19*] SÜSS, W.: Ein affingeometrisches Gegenstück zu den Rotationsflächen. Math. Ann. **98**, 684—696 (1928). — [*20*] SÜSS, W.: Projektivverwandte der Drehflächen und ihre Segre-Kurven. Tohoku Math. J. **41**, 308—310 (1935/36). — [*21*] TZITZÉICA, G.: Sur une nouvelle Classe de surfaces, P. 2. Rend. Circ. Mat. Palermo **28**, 210—216 (1909).

Göttingen, Rohnsweg 13a

(Eingegangen am 8. August 1956)

CARLESON, L.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 447—451 (1957)

Representations of continuous functions

By
LENNART CARLESON

1. The problem which will be treated in this paper, can quite generally be stated as follows. Let C be a linear class of continuous functions defined on a set S. Let E be a closed subset of S. Under which conditions on E is *every* continuous function on E the restriction to E of some function belonging to the original class C? We shall in section 3 solve this problem in the case when S is the circle $|z|=1$ and C is the class of uniformly continuous analytic functions in $|z|<1$ and in section 4 we shall consider FOURIER-STIELTJES transforms. First, however, we shall in section 2 prove a lemma on BANACH spaces to which our theorems can be reduced.

2. Lemma 1. *Let B be a separable* BANACH *space with norm $\|x\|$. Let $B_1 \subset B$ be a* BANACH *space with the norm $\|x\|_1 \geq \|x\|$. If there exists a sequence of elements x_ν such that for every linear functional $L(x)$ on B*

$$\|L\| \leq M \sup_\nu |L(x_\nu)|, \qquad x_\nu \in B_1, \qquad \|x_\nu\|_1 \leq 1, \tag{1}$$

then

$$B = B_1 \quad \text{and} \quad \|x\|_1 \leq M\|x\|, \qquad x \in B_1. \tag{2}$$

It is obvious that the constant M in (2) cannot in general be improved.

For the proof, we observe that (1) implies that B_1 is dense in B. Since B is separable (see [1], p. 124), there exists a sequence of linear functionals $\{L_\mu\}_1^\infty$ on B, $\|L_\mu\|=1$, such that every linear functional is the weak limit of linear combinations $\sum c_\mu L_\mu$ *).

We now consider the infinite system of equations

$$L_\mu(x) = \sum_1^\infty \xi_\nu L_\mu(x_\nu), \qquad \sum_1^\infty |\xi_\nu| \leq M', \tag{3}$$

for a fixed element $x \in B$, $\|x\|=1$. By a theorem of F. RIESZ, (3) has a solution if for every sequence $\{c_\mu\}$

$$\left|\sum c_\mu L_\mu(x)\right| \leq M' \sup_\nu \frac{1}{A_\nu} \left|\sum c_\mu L_\mu(x_\nu)\right|, \tag{4}$$

where $A_\nu \geq 1$ and $\lim A_\nu = \infty$. We shall prove that (4) holds provided that $M' > M$. The opposite assumption implies that for every $n \geq 1$ there exists a linear functional L_n^* such that

$$1 = |L_n^*(x)| \geq M' |L_n^*(x_\nu)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$|L_n^*(x_\nu)| < \text{const}, \qquad 1 \leq \nu < \infty. \tag{6}$$

*) For the following, compare [2], p. 343.

(6) together with (1) implies that $\|L_n^*\|$ is uniformly bounded. Suppose that $L_{n_i}^*$ converges weakly and let $L(x)$ be the limit. Then, by (5),

$$\|L\| \geq |L(x)| \geq M' |L(x_\nu)|, \qquad 1 \leq \nu < \infty,$$

which implies

$$\|L\| \geq \frac{M'}{M} \|L\|.$$

Hence $L \equiv 0$ which contradicts $L(x) = 1$.

We have thus proved that (3) has a solution if $M' > M$. For such a solution $\{\xi_\nu\}$ we have

$$L_\mu\Big(x - \sum_1^\infty \xi_\nu x_\nu\Big) = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots,$$

and, since L_μ is weakly fundamental, $x = \sum_1^\infty \xi_\nu x_\nu$. Hence

$$\|x\|_1 \leq \sum_1^\infty |\xi_\nu| \|x_\nu\|_1 \leq \sum_1^\infty |\xi_\nu| \leq M',$$

and the proof is complete.

Let us finally note the following well-known converse of the lemma (see [6], p. 30):

If in the lemma we replace (1) *by the assumption* $B = B_1$, *then* (2) *holds for some constant* M.

3. Let C denote the class of functions $f(z)$ analytic and uniformly continuous in $|z| < 1$. Under the norm $\sup_{|z|<1} |f(z)|$, C is a separable BANACH space. An example of a basis is given by the powers z^n. If E is a closed set on $|z| = 1$, then there exists a non-trivial function $f(z) \in C$, which vanishes on E, if and only if $mE = 0$ (compare below, lemma 2). We shall now prove that this is also the solution of the problem, stated in the introduction.

Theorem 1. *Let* E *be a closed set on* $|z| = 1$ *of measure zero and let* $\varphi(z)$ *be continuous on* E. *Then there exists a function* $f \in C$ *with* $f(z) = \varphi(z)$ *on* E. *If* $mE > 0$, *this is not true for every choice of* $\varphi(z)$.

The last statement of the theorem is trivial. If $mE > 0$, we choose $\varphi_1(z)$ and $\varphi_2(z)$ so that $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ on a set of positive measure but not everywhere. If $f_1(z)$ and $f_2(z)$, corresponding to φ_1 and φ_2 existed, $f_1 - f_2$ would vanish on a set of positive measure and hence everywhere, contradicting our assumption $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$.

In the proof, we shall use the following lemma.

Lemma 2. *Let* E_1 *and* E_2 *be two disjoint closed sets on* $|z| = 1$ *of measure zero. Then there exists a function* $f(z) \in C$ *with the properties*

$$f(z) = 1, \qquad z \in E_1, \tag{7}$$

$$f(z) = 0, \qquad z \in E_2, \tag{8}$$

$$|f(z)| \leq 2, \qquad |z| \leq 1. \tag{9}$$

Let $h(\vartheta)$ be a continuous function with period 2π satisfying the following conditions: (a) $0 \leq h(\vartheta) \leq 1$; (b) $h(\vartheta) = 0$, $e^{i\vartheta} \in E_1$; (c) $h(\vartheta) = 1$, $e^{i\vartheta} \in E_2$; (d) $h''(\vartheta)$ is continuous; (e) $\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$. It is obvious that such a function exists. If then

$$\log g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \log h(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{10}$$

it follows that $|g(e^{i\vartheta})| = h(\vartheta)$ and that g belongs to C. This is a consequence of (b) and (d). Furthermore, by (b), $g(z) = 0$ on E_1, by (d) $|g(z)| = 1$ on E_2 and by (a) $|g(z)| < 1$, $|z| < 1$. Under the mapping $w = g(z)$, the set E_2 is mapped on a set E_2' of measure zero, since $g'(z)$, by the regularity (d) of $h(\vartheta)$, is continuous on E_2. In the same way as above we construct a function $q(z) \in C$ such that $q(0) = 1$, $q(z) = 0$ on E_2' and $|q(z)| \leq 2$, $|z| \leq 1$. The function $q(g(z)) = f(z)$ belongs to C and has the desired properties (7), (8), (9).

Let E be the given closed set of measure zero and divide E in all possible ways into two disjoint closed subsets E_1 and E_2. As is easily seen, this is possible only in a countable number of different ways. For each choice, we construct by lemma 2 a function $f(z)$. We obtain a sequence of elements $\{f_\nu(z)\}_1^\infty$ of C, $|f_\nu| \leq 2$.

In order to be able to apply lemma 1, we introduce as BANACH space B the set of continuous functions φ on E under uniform norm $\|\varphi\|$ and as B_1 the restriction to E of functions $f(z) \in C$ with norm

$$\|\varphi\|_1 = \inf_f \sup_z |f(z)|, \qquad f(z) = \varphi(z) \text{ on } E$$

It is obvious that B_1 is complete under this norm. If $\|\varphi\|_1 \leq M\|\varphi\|$, theorem 1 follows if we observe that the set of polynomials is dense in B.

In lemma 1 we now choose $x_\nu = \frac{1}{2} f_\nu(z)$ and want to prove that for every μ of bounded variation on E

$$m \int_E |d\mu| \leq \sup_\nu \left| \int_E f_\nu(z)\, d\mu(z) \right| \tag{11}$$

with $m > 0$ independant of μ. Since f_ν is real on E we may assume that μ is real and we also assume that the right hand side of (11) $= 1$. Let $A \subset E$ be a BOREL measurable set. Then there is a sequence $\{f_{\nu_i}(z)\}$ such that

$$\lim_{i=\infty} f_{\nu_i}(z) = \begin{cases} 1 \text{ on } A \\ 0 \text{ on } E - A \end{cases}$$

except on sets of variation zero for μ. Hence

$$|\mu(A)| = \left| \lim_{i=\infty} \int_E f_{\nu_i}(z)\, d\mu(z) \right| \leq 1$$

and since ([7], p. 32)

$$\int_E |d\mu| = \sup_{A \subset E} \mu(A) - \inf_{A \subset E} \mu(A) \leq 2,$$

the proof is complete.

It is interesting to observe that theorem 1 contains the following well-known theorem of F. and M. RIESZ:

If

$$\int_{|z|=1} z^n \, d\mu(z) = 0, \qquad n \geq 0,$$

then μ is absolutely continuous.

The proof obtained in this way can be considered as more "natural" than the classical proofs, since it is a direct proof of absolute continuity. Compare also [5].

Let E be a closed set of measure zero and assume $m = \int_E |d\mu| > 0$. By the remark at the end of section 2 and theorem 1, every continuous $\varphi(z)$, $|\varphi| \leq 1$, on E can be represented by $f \in C$, $|f| \leq M$. Let $O \supset E$ be an open set such that $\int_{O-E} |d\mu| < \varepsilon$ and construct by the formula (10) $g(z) \in C$ so that $|g(z)| = 1$ on E; $|g(z)| \leq 1$, $|z| \leq 1$; $|g(z)| < \varepsilon$, $|z| = 1$ and z outside O. Then

$$\int_{|z|=1} z^n g(z) \, d\mu(z) = 0$$

and

$$m = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_E \varphi(z) g(z) \, d\mu(z) \leq M \int_{O-E} |d\mu| + M \varepsilon \int_{|z|=1} |d\mu| \leq \tfrac{1}{2} m$$

for ε sufficiently small. This contradiction proves the theorem.

4. We now assume that E is a compact set on $(-\infty, \infty)$ and we consider the problem of representing continuous function $\varphi(x)$ on E by FOURIER-STIELTJES transforms

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \, d\sigma(t), \qquad x \in E. \tag{12}$$

Lemma 1 here gives the following criterion on E.

Theorem 2. *A necessary and sufficient condition on E that every continuous $\varphi(x)$ has a representation (12) is that*

$$\sup_t \left| \int_E e^{ixt} \, d\mu(x) \right| \geq m \int_E |d\mu|, \tag{13}$$

where $m > 0$ is independent of μ.

Let B_1 be the set of functions of the form (12) and

$$\|\varphi\|_1 = \inf_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma| \quad \text{for such } \sigma.$$

If (12) holds for every φ, then $\|\varphi\|_1 \leq M \|\varphi\|$, and

$$\int_E |d\mu| = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_E \varphi \, d\mu \leq \sup_\sigma \int_E d\mu(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \, d\sigma(t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma| \leq M,$$

whence

$$\int_E |d\mu| \leq \sup_t \left| \int_E e^{ixt} \, d\mu(x) \right| \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma|,$$

and (13) holds with $m = \frac{1}{M}$.

To prove the converse, choose in lemma 1 $x_\nu = e^{i r_\nu x}$, where r_ν is dense on $(-\infty, \infty)$. Assumptions (1) and (13) are identical, and $B = B_1$ is the desired result.

Finally we note that we may, if (13) holds, choose σ in (12) in very special ways.

Theorem 3. *If every $\varphi(x)$ has a representation* (12) *and E is a subset of $(-\pi, \pi)$, then $\varphi(x)$ can also be represented in the form*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt, \qquad f \text{ summable}, \tag{14}$$

or

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{15}$$

Consider the subspace B_1 of functions of the form (14) under the norm

$$\|\varphi\|_1 = \inf_f \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

We choose in lemma 1 as the set $\{x_\nu\}$ the functions

$$\varphi_{\nu k} = e^{i r_\nu x} \cdot \frac{k}{x} \cdot \sin \frac{x}{k}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots,$$

where, as before, $\{r_\nu\}$ denotes a dense set on $(-\infty, \infty)$. Since (13) holds, by assumption, it follows that

$$\sup_{\nu, k} \left| \int_E \varphi_{\nu k}(x)\, d\mu(x) \right| \geq m \int_E |d\mu|,$$

whence, by lemma 1, $B = B_1$.—The result can naturally easily be proved directly.

To prove (15), we introduce in an obvious way $\|\varphi\|_1$ and assume that there exists a function μ such that

$$\int_E |d\mu| = 1 \qquad \text{while} \qquad \left| \int_E e^{inx} d\mu(x) \right| \leq \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

By a theorem of M. CARTWRIGHT [3], there is a constant C, depending only on E, such that

$$\left| \int_E e^{itx} d\mu(x) \right| \leq C\varepsilon, \qquad -\infty < t < \infty,$$

which is impossible if $\varepsilon < \frac{m}{C}$. We can thus again apply lemma 1 and the proof is complete.

References

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa-Lwow 1932. — [2] CARLESON, L.: Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta math. **87**, 325—345 (1952). — [3] CARTWRIGHT, M.: On certain integral functions of order 1. Quart. J. of Math. **7**, 46—55 (1936). — [4] HELSON, H.: Fourier transforms on perfect sets. Studia math. **14**, 209—213 (1954). — [5] HELSON, H.: On a theorem of F. and M. RIESZ. Colloquium math. **3**, 113—117 (1955). — [6] HILLE, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. New York 1948. — [7] SAKS, S.: Theory of the integral. Warszawa-Lwow 1937.

Uppsala (Schweden), Uppsala Universitets Matematiska Institution

(Eingegangen am 24. April 1956)

FOSTER, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 452—469 (1957)

The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras; subdirect factorization

By
ALFRED L. FOSTER

1. Introduction

In a recent phase of a series of studies dedicated to a broad-scale extension of classical Boolean theory to more general domains (FOSTER [*1*] to [*4*] [1]), see also §§ *7* and 8 below), particular attention has been focused on certain classes $\mathfrak{P} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ — called "primal clusters" — of functionally complete universal algebras, $\mathfrak{P}_i$ (of preassigned species). Each such cluster, $\mathfrak{P}$, equationally defines — in terms of the identities jointly satisfied by the various finite subsets of $\mathfrak{P}_i \in \mathfrak{P}$ — a class of "$\mathfrak{P}$-algebras". For $\mathfrak{P}$-algebras an ideal- (or equivalently a subdirect-) structure theory was established, a theory which, in particular, embraces familiar results of the theory of (i) Boolean rings, (ii) p-rings, (iii) Post algebras, etc., for appropriately chosen single-algebra clusters $\mathfrak{P}$. The subdirectly irreducible factors of a $\mathfrak{P}$-algebra are certain $\mathfrak{P}_i \in \mathfrak{P}$, and these factors were moreover shown to be unique within $\mathfrak{P}$. Thus each enlargement of a given cluster $\mathfrak{P}$ carries with it an enlargement of the range of the above unicity.

The horizon of application of this extended "Boolean" theory depends in considerable measure on the discovery of comprehensive clusters of universal algebras, preferably as embrasive as possible. In [*3*] the existence of a rather large primal cluster, K', was established — one which, in particular, subsumes all of the familiar systems (i) to (iii) above. In the present communication we propose to enlarge this aspect of the theory. As a principal result, we shall, in particular, establish the existence of a primal cluster $K > K'$, where K will consist of the totality of non-isomorphic functionally complete algebras of a given (arbitrary) species, subject to a single restrictive condition.

2. Some fundamentals; Chinese residue condition

Let $Sp = (n_1, n_2, \ldots)$ be a given (finitary) species, — the n_i being positive integers, and let $o_1(\xi, \ldots), o_2(\xi, \ldots), \ldots$ denote the primitive operation symbols of this species, where o_i is n_i-ary,

$$o_i = o_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_i}).$$

An *expression* $\Phi(\xi, \ldots)$ of species Sp is one or more indeterminate symbols $\xi, \ldots$ composed via the operation symbols o_i.

[1]) Here and throughout, [*1*] to [*4*] refer to the Bibliography.

9254 — 66
A 30

In the various universal algebras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ of species Sp we shall usually employ the same symbols $o_i, \ldots$ to denote the respective primitive operations, e.g.,

$$\mathfrak{A} = (A, o_1, o_2, \ldots), \quad \mathfrak{B} = (B, o_1, o_2, \ldots), \quad \text{etc.}$$

Thus in each $\mathfrak{A}$ the primitive expressions $o_i(\xi, \ldots)$, and more generally each expression $\Phi(\xi, \ldots)$, "becomes" a particular $\mathfrak{A}$-function, which we denote by

$$\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}}, \quad \text{or} \quad \Phi(\xi, \ldots) \quad (\mathfrak{A}).$$

For distinct algebras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, a given expression $\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}}$ will in general designate an entirely different function from $\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{B}}$.

In a similar way the notation

$$(2.1) \qquad \Phi = \Psi \pmod{\mathfrak{A}}, \quad \text{also written } \Phi \equiv \Psi \pmod{\mathfrak{A}}$$

denotes that (2.1) is an identity of the algebra $\mathfrak{A}$, when the expressions Φ, Ψ are conceived mod $\mathfrak{A}$[2]).

Unless otherwise specified the species Sp will hereafter be arbitrary but fixed. Whenever we speak of expressions or algebras we shall automatically mean: of species Sp.

Let $\{\mathfrak{A}_i\} = \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ be a finite set (sequence) of algebras. We shall say that $\{\mathfrak{A}_i\}$ satisfies the *Chinese residue condition* or, more briefly, that $\{\mathfrak{A}_i\}$ is an *independent* class of algebras if, corresponding to each set (sequence) of expressions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ there exists (at least one) expression Ξ such that

$$\Xi = \Phi_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, r).$$

From [3] we recall the readily established

Theorem 2.1. *A necessary and sufficient condition for algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ to be independent is that there exist an expression $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ such that*

$$K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \xi_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, r).$$

3. *Identities*

Let $\mathfrak{A}$ be any algebra and $\mathring{1}$ the one-element algebra (of species Sp). Let $|\mathfrak{A}|$ denote the class of (strict) identities[3]) satisfied by $\mathfrak{A}$. For $\mathring{1}$ we also abbreviate

$$|\mathring{1}| = \bar{1}.$$

Thus $\bar{1}$ consists of the class of all possible equations of species Sp: $\Phi = \Psi \in \bar{1}$ for all expressions Φ, Ψ.

---

[2]) Such an identity $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$ is also called a *strict* identity of $\mathfrak{A}$, — indicating that indeterminates alone (i.e., no constants, = fixed elements of $\mathfrak{A}$) occur (see [3]). In the present paper "identity" always means strict identity.

[3]) See previous footnote.

We establish slight contact with $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(Sp)$, the lattice of all logically closed subsets of $\overline{1}$; here, for $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \in \mathfrak{E}$,

$glb(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2 =$ ordinary intersection of the classes $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$.

$lub(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2 =$ logical closure of the union of the classes $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$.

Of course

$$\overline{1} \cap \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1, \quad \overline{1} \cup \mathfrak{E}_1 = \overline{1}.$$

Since $|\mathfrak{A}|$ is automatically logically closed we have

$$|\mathfrak{A}| \in \mathfrak{E}.$$

If $\times$ denotes direct product, it is readily seen that

$$|\mathfrak{A}_1| \cap |\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2|, \tag{3.1}$$

with a similar formula holding for arbitrarily many algebras $\mathfrak{A}_i$. However there is no counterpart of (3.1) for $|\mathfrak{A}_1| \cup |\mathfrak{A}_2|$.

Definition. We say that $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \in \mathfrak{E}$ are *e(quationally)-relatively prime* if $\mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2 = \overline{1}$.

Theorem 3. *If $\{\mathfrak{A}_i\}$ is an independent class of algebras then*

(3.2) *any subset of the $\mathfrak{A}_i$ are independent,*

(3.3) *the $\mathfrak{A}_i$ are pairwise e-relatively prime.*

Proof. (3.2) is a trivial consequence of the definition of independence. As for (3.3), let $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}$ be any distinct $\in \{\mathfrak{A}_i\}$. By (3.2), $\mathfrak{A}_{i_1}$ and $\mathfrak{A}_{i_2}$ are independent, whence, for arbitrary expressions Φ_1, Φ_2 there exists a corresponding expression Ξ such that

$$\Xi = \Phi_1 \ (\mathfrak{A}_{i_1}), \quad \Xi = \Phi_2 \ (\mathfrak{A}_{i_2}).$$

Both of these identities then belong to the union of $|\mathfrak{A}_{i_1}|$ and $|\mathfrak{A}_{i_2}|$ and therefore also to the logical closure of this union,

$$\Xi = \Phi_1, \quad \Xi = \Phi_2 \quad \in |\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|.$$

Because of the logical closure of $|\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|$ it then further follows that $\Phi_1 = \Phi_2 \in |\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|$. Since Φ_1, Φ_2 are perfectly arbitrary expressions, the desired conclusion follows, namely,

$$|\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}| = \overline{1}.$$

4. Chinese residue theorem

The relation of §§ 2, 3 to the classical Chinese residue theorem is seen as follows. Let us say that $\{a_i\} = a_1, a_2, \ldots, a_r$, a set of rational integers $(a_i \neq 0, \neq 1)$ satisfies the Chinese residue condition — or is independent — if, corresponding to each set $\{s_i\} = s_1, s_2, \ldots, s_r$ of integers there exists an integer x such that

$$x \equiv s_i (a_i) \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, n).$$

This "elementary" independence is here equivalent to the independence of the algebras $\mathfrak{W}_{a_i}$, the residue class ring mod a_i. One may readily establish

Theorem 4.1. *The following conditions are pairwise equivalent.*

(i) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *are independent.*

(ii) $\mathfrak{W}_{a_1}, \mathfrak{W}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ *are independent.*

(iii) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *are pairwise relatively prime.*

(iv) $\mathfrak{W}_{a_1}, \mathfrak{W}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ *are pairwise e-relatively prime.*

A similar theorem may indeed be established for classes of proper homomorphic images of any principal ideal domain. However in more general rings- and *a-fortiori* in arbitrary universal algebras — the general notion of independence of algebras no longer possesses such a simple elementary counterpart.

In theorem 4.1 one half of the equivalence of (ii) and (iv) — namely (ii) implies (iv) — is valid for arbitrary universal algebras (theorem 3); the converse implication, however, is generally false as is seen from the following two algebras $\mathfrak{F}=(F, \times, ^\frown)$ and $\mathfrak{G}=(G, \times, ^\frown)$, of species (2.1), where $F=\{0, 1, 2\}$, $\xi\times\eta =$ product mod 3, $\xi^\frown = 1+\xi$, mod 3; $\mathfrak{G}=$ free algebra of one generator defined by the identities

$$\begin{cases} x\times(y\times z)=(x\times y)\times z \\ x^5 = x^2. \end{cases} \tag{4.1}$$

We show that $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ are e-relatively prime but not independent. $\mathfrak{F}$ is a primal algebra (functionally strictly complete) and $|\mathfrak{F}|$ is maximal in $\bar{1}$ (see [3], also § 8). From this together with the observation that the last of the equations (4.1) is not an identity of $\mathfrak{F}$, it follows that $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ are e-relatively prime,

$$|\mathfrak{F}| \cup |\mathfrak{G}| = \bar{1}.$$

On the other hand there exists no expression Ξ such that

$$\Xi = \xi^2(\mathfrak{F}),$$
$$\Xi = \xi(\mathfrak{G}),$$

whence $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{G}$ are not independent. This is evident since the only expression Ξ' such that $\Xi'=\xi(\mathfrak{G})$ is the expression ξ itself; but $\xi \neq \xi^2(\mathfrak{F})$. The proof is thus complete.

5. *Frames; co-framal algebras*

By a *frame* (or frame algebra) $\mathfrak{S}=(S, \times, ^\frown; 0, 1)$ we mean an algebra of species (2,1) possessing distinguished elements 0, 1 such that

(1) $$0\times\xi = \xi\times 0 = 0, \quad 1\times\xi = \xi\times 1 = \xi \qquad (\xi \in S),$$

(2) $\xi^\frown$ is a cyclic permutation of the set S (whose inverse we denote by $\xi^\smile$),

(3) $$0^\frown = 1.$$

If we delete the restriction "cyclic" in (2) we speak of a *weak* frame. In a frame (but not necessarily in a weak frame), S must be denumerable.

Lemma 5.1. *Let* $\mathfrak{S}_1=(S_1, \times, {}^{\cap}; 0_1, 1_1)$, $\mathfrak{S}_2=(S_2, \times, {}^{\cap}; 0_2, 1_2)$ *be two weak frames. If there exists an expression* $|'(\xi)$ *such that*

$$|'(\xi) \begin{cases} \equiv 1_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \equiv 0_2 \pmod{\mathfrak{S}_2}, \end{cases} \tag{5.1}$$

then there also exists an expression $|''(\xi)$ *such that*

$$|''(\xi) \begin{cases} \equiv 0_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{S}_2}, \end{cases} \tag{5.2}$$

and $\mathfrak{S}_1$ *and* $\mathfrak{S}_2$ *are independent.*

Proof. Let

$$|''(\xi) = \text{def} = [|'(\xi) \times \{|'(\xi)\}^{\cup_1}]^{\cap}. \tag{5.3}$$

Using (5.1) it is easily verified that (5.3) has the desired property (5.2). Let now $\Phi_1(\xi, \ldots)$, Φ_2 be any expressions [of species (2.1)]. Then corresponding to these let the expression $\Xi(\xi, \ldots)$ be defined by:

$$\Xi(\xi, \ldots) = \text{def} = \{|'(\xi) \times \Phi_1(\xi, \ldots)\} \times_{\cap} \{|''(\xi) \times \Phi_2(\xi, \ldots)\}, \tag{5.4}$$

where

$$\xi \times_{\cap} \eta = \text{def} = (\xi^{\cap} \times \eta^{\cap})^{\cup}. \tag{5.5}$$

It is then readily verified that

$$\Xi(\xi, \ldots) = \begin{cases} \Phi_1(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}_1} \\ \Phi_2(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}_2}. \end{cases}$$

Thus $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ are independent and the lemma is complete.

For the residue class rings $\mathfrak{W}_{a_i}$ (§ 4) the independence of the algebras $\mathfrak{W}_{a_1}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ is a consequence of their pairwise independence. While no corresponding result for arbitrary universal algebras is at hand, we have the

Theorem 5.2. *Let* $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_r$ *be a set (sequence) of weak frames*

$$\mathfrak{S}_i = (S_i, \times, {}^{\cap}; 0_i, 1_i).$$

If there exist $\left(\frac{r(r-1)}{2}\right)$ *expressions* $|_{ij}(\xi)$ *such that*

$$|_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j) \end{cases} \quad (1 \leq i < j \leq r), \tag{5.6}$$

then there also exist r *expressions* $|_i(\xi)$ *such that*

$$|_i(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j), \quad \textit{for all } j \neq i; \end{cases} \tag{5.7}$$

and the algebras $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_r$ *are independent.*

Proof. By lemma 5.1 the $\mathfrak{S}_i$ are pairwise independent and there exist expressions $|_{ij}(\xi)$ such that

$$|_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j) \end{cases} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.8}$$

Let r expressions $|_i(\xi)$ be defined by

$$|_i(\xi) = \text{def} = |_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi) \times \cdots \times |_{ir}(\xi) \quad (\text{no } |_{ii} \text{ term}), \tag{5.9}$$

and where we understand the $\times$ factors in (5.9) to be associated from the left. These $|_i(\xi)$ are easily verified to possess the desired property (5.7). To prove the independence of $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_r$ let $\times_\frown$ again be defined as the $\frown$-transform of $\times$, by (5.5). Let now $\Phi_1(\xi, \ldots), \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ be arbitrary expressions and let $\Xi(\xi, \ldots)$ correspondingly be defined by

$$\Xi(\xi, \ldots) = \{\Phi_1(\xi, \ldots) \times |_1(\xi)\} \times_\frown \{\Phi_2(\xi, \ldots) \times |_2(\xi)\} \times_\frown \cdots \times_\frown \{\Phi_r \times |_r(\xi)\}$$

where the $\times_\frown$ factors, $\{\ \}$, are also associated from the left. It is now readily seen that

$$\Xi(\xi, \ldots) \begin{cases} \equiv \Phi_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \quad \vdots \\ \equiv \Phi_r \pmod{\mathfrak{S}_r}, \end{cases}$$

whence the $\mathfrak{S}_i$ are independent and the theorem is complete.

Definition. A class $\{\mathfrak{A}_i\}$ of universal algebras, of species Sp, is called *coframal* if there exist: two expressions $\times, \frown$ (of species Sp) and, in each $\mathfrak{A}_i$, distinguished elements $0_i, 1_i$, such that

$$(A_i, \times, \frown; 0_i, 1_i) \quad \text{is a frame for each index } i. \tag{5.10}$$

Here A_i is the class of elements of $\mathfrak{A}_i$. The algebras (5.10) are then called a class of *coframes* of the $\{\mathfrak{A}_i\}$. The concept *weakly*-coframal is similarly defined. A class of algebras is *naturally* coframal if two expressions, $\times$, $\frown$, satisfying (5.10), already exist among the primitive operations; in particular all frame algebras are of course naturally coframal.

The results of this section may now be translated to yield

Theorem 5.3. *Let $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ be a set (sequence) of weakly coframa algebras, of species Sp, and let (5.10) be a set of weak coframes. If there exist $\frac{r(r-1)}{2}$ expressions $|_{ij}(\xi)$ satisfying*

$$|_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j} \end{cases} \quad (\text{for } 1 \leq i < j \leq r),$$

then the algebras $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ are independent.

6. Co-constant elements

For subsequent use we further require a certain relation between elements of algebras. Let $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$, $\mathfrak{B} = (B, o, \ldots)$ be universal algebras of the

same species, Sp. Elements $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$ are said to be *co-constant*, in symbols

$$\alpha \sim \beta \tag{6.1}$$

if there exists a unary expression $\Phi(\xi)$ such that

$$\begin{cases} \Phi(\xi) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{A}} \\ \Phi(\xi) \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}}. \end{cases} \tag{6.2}$$

We also write (6.2) in the form

$$\alpha \sim \beta \ (\Phi).$$

Lemma 6. *Let* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathfrak{A}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ *be such that*

$$\alpha_1 \sim \beta_1, \qquad \alpha_2 \sim \beta_2, \ldots$$

and let $\Psi(\xi, \eta, \ldots)$ *be any expression. Then*

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \sim \Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots).$$

Proof. By hypothesis there exist expressions $\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi), \ldots$ such that

$$\Phi_1(\xi) \begin{cases} \equiv \alpha_1 (\mathfrak{A}) \\ \equiv \beta_1 (\mathfrak{B}), \end{cases} \qquad \Phi_2(\xi) \begin{cases} \equiv \alpha_2 (\mathfrak{A}) \\ \equiv \beta_2 (\mathfrak{B}), \ldots. \end{cases}$$

Given an expression $\Psi(\xi, \eta, \ldots)$, define

$$\Phi(\xi) = \text{def} = \Psi\big(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi), \ldots\big).$$

Then clearly

$$\Phi(\xi) \begin{cases} \equiv \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}} \\ \equiv \Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots) \pmod{\mathfrak{B}}, \end{cases}$$

and the lemma is proved.

7. *Primal algebras: $\mathfrak{P}$-algebras and their structure*

In this and the following section we abstract a number of pertinent notions and results taken from [1] to [4].

A universal algebra $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$, of species Sp, is *functionally strictly complete* (f.s.c.) if each mapping from $A \times A \times \cdots$ to A may be expressed in the algebra, i.e., if: for each positive integer k and for each mapping $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ of the set $A^{(k)}$ $(= A \times A \times \cdots = k^{\text{th}}$ Cartesian power) into the set A, there exists at least one expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ of species Sp, such that

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Trivially $\mathring{1}$, the one-element algebra (of species Sp), is always f.s.c. An algebra $\mathfrak{P} = (P, o, \ldots)$ is called *primal* if it is f.s.c. and $\neq \mathring{1}$. The profusion of known primal algebras includes the following:

(i) The two-element Boolean algebra, $(F_2, \times, \bar{\ })$ ($\times$ = intersection, $\bar{\ }$ = complement).

More generally

(ii) The prime-field $(F_p, \times, ^\frown)$, p = prime. Here $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, $\times$ = ordinary product, $\xi^\frown = 1 + \xi \pmod p$.

(iii) The basic Post algebra $(P_n, \times, ^\frown)$, n arbitrary. Here

$$P_n = \{0, \varrho_{n-2}, \varrho_{n-1}, \ldots, \varrho_1, 1\},$$

$\xi \times \eta = \min(\xi, \eta)$ — where "min" refers to the above ordering — and

$$\xi^\frown = \text{def}: \; 0^\frown = 1, \; 1^\frown = \varrho_1, \varrho_1^\frown = \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-2}^\frown = 0.$$

(iv) The "n-field" $(\mathfrak{F}_n, \times, ^\frown)$, n-arbitrary. Here $\mathfrak{F}_n = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-2}\}$, $\mathfrak{F}_n' = \mathfrak{F}_n$ less 0, $(\mathfrak{F}_n', \times)$ = cyclic group of order $n-1$, $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ $(\xi \in \mathfrak{F})$, and $\xi^\frown = \text{def}: \; 0^\frown = 1, \; 1^\frown = \alpha, \; \alpha^\frown = \alpha^2, \ldots, (\alpha^{n-2})^\frown = 0$. More generally

(v) $(G_n, \times, ^\frown)$, n arbitrary. Here $G_n = \{0, 1, \alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$, $G_n' = G_n$ less 0, $(G_n', \times)$ = arbitrary (finite) group, $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0 (\xi \in G)$, and $\xi^\frown = \text{def}: 0^\frown = 1$, $1^\frown = \alpha, \alpha^\frown = \beta, \ldots, \gamma^\frown = 0$. More generally

(vi) $(L_n, \times, ^\frown)$, n arbitrary. Here $L_n = \{0, 1, \alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$, $L' = L$ less 0, $(L', \times)$ = arbitrary closed multiplicative system (neither necessarily associative nur commutative) with identity, $1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi$ $(\xi \in L')$ and such that the product of all elements of L' — in some order and association — is $= 1$; $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0 (\xi \in L)$, and $\xi^\frown = \text{def}: 0^\frown = 1, 1^\frown = \alpha, \alpha^\frown = \beta, \ldots, \gamma^\frown = 0$.

A further extension of (vi) is given by the following unpublished result, the proof of which we shall however not here present. A *binary algebra* $(B, \times)$ is simply an algebra of species (2) with a zero and an identity.

Theorem 7.1. *Let $(B, \times)$ be a finite binary algebra. Then there exists a cyclic permutation $\xi^\frown$ of the class B such that the algebra $(B, \times, ^\frown)$ [of species (2,1)] is a primal algebra. Moreover with the single exception of the four-element binary algebra*

$\times$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	α	0
β	0	β	0	β

there exists a cyclic permutation ξ of B, further satisfying the normalizing condition

$$0^\frown = 1,$$

such that $(B, \times, ^\frown)$ is primal.

Definition. Let $\mathfrak{P}$ be a primal algebra (of species Sp). By a $\mathfrak{P}$-*algebra* — or an algebra with *kernel* $\mathfrak{P}$ — we mean an algebra $\mathfrak{A}$ (of species Sp) satisfying all identities of $\mathfrak{P}$, i.e.,

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}|.$$

Since $|\mathfrak{P}|$ is maximal in $\bar{1}$ (§ 8; also [3]), an equivalent definition is:

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}| \quad \text{or} \quad \mathfrak{A} \cong \mathring{1} \quad (= \text{one-element algebra}).$$

From [2] we further have

Theorem 7.2. *Let $\mathfrak{P}$ be a primal algebra. Then the following classes of algebras are pairwise equivalent (up to isomorphisms):*

(1°) *The class of all $\mathfrak{P}$ algebras.*

(2°) *The class of all subdirect powers of $\mathfrak{P}$.*

(3°) *The class of all subalgebras of direct powers of $\mathfrak{P}$.*

A finite $\mathfrak{P}$-algebra is furthermore isomorphic with a direct power of $\mathfrak{P}$.

The familiar structure of Boolean algebras, p-rings and Post algebras are special instances of theorem 7.2, for $\mathfrak{P} = (F_2, \times, ')$, $\mathfrak{P} = (F_p, \times, ')$ and $\mathfrak{P} = (P_n, \times, ')$ respectively (§ 7).

8. *Primal clusters; $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebras and their structure*

Definition. A *primal cluster* of species Sp is a class $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ of primal algebras, of species Sp, any finite subset of which is independent.

Obviously a single primal algebra and more generally each finite class of independent primal algebras is a primal cluster. Moreover, with $\tilde{\mathfrak{P}}$, each subset of $\tilde{\mathfrak{P}}$ is a primal cluster. It was further shown in [3] that each of the following is a primal cluster:

(a) the class of all prime-fields $\{F_2, F_3, \ldots, F_p, \ldots\}$, $F_p = (F_p, \times, ')$,

(b) the class of all n-fields $\{\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots\}$, $\mathfrak{F}_n = (\mathfrak{F}_n, \times, ')$.

(c) the class of all basic Post algebras $\{P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots\}$, $P_n = (P_n, \times, ')$.

Also

(d) $\{\mathfrak{F}_2, F_3, \mathfrak{F}_3, F_4, \ldots, F_n, \mathfrak{F}_n, \ldots\}$, the union of the primal clusters (b), (c) above.

Anticipating, it will further follow from theorem 10.7 that the following class is a primal cluster [which subsumes all of the above (a) to (d)],

(e) the class of all (non-isomorphic) primal algebras furnished by theorem 7.1.

Let $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ be a primal cluster (species Sp), and $\mathfrak{A}$ an algebra (species Sp).

Definitions.

(I) $\mathfrak{A}$ is said to be a *$\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra* if for some finite subset $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ satisfies all identities common to $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$, i.e.,

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}|. \tag{8.1}$$

If we write

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r} \quad (\times = \text{direct product}),$$

an equivalent condition is:

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}^*|. \tag{8.2}$$

We further note that if $\tilde{\mathfrak{P}}$ is a finite cluster, $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n\}$, $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}_c$ algebra if and only if

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}_1| \cap |\mathfrak{P}_2| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_n| = |\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n| . \tag{8.3}$$

(II) 1. $\mathfrak{A}$ is said to be *(subdirectly) representable* in $\tilde{\mathfrak{P}}$ if for some finite subset $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ is isomorphic with a suitable subdirect product of suitable subdirect powers of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$, respectively.

2. If for some $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ is isomorphic with the direct product of suitable subdirect (respectively of suitable direct) powers of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$, then $\mathfrak{A}$ is said to be *semi-directly* (respectively *directly*) representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.

(III) 1. $\mathfrak{A}$ is said to possess $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r} \in \tilde{\mathfrak{P}}$ as a minimal set of *eq-factors* (= equationally defined factors) in $\tilde{\mathfrak{P}}$, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ satisfy (8.1) — or equivalently, (8.2) — and if for each proper subset $\mathfrak{P}_{i_1'}, \mathfrak{P}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_k'}$ of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$: $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_k'}$ fail to satisfy (8.1).

2. $\mathfrak{A}$ is said to possess $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$ as a minimal set of *sd-factors* (= subdirect factors) in $\tilde{\mathfrak{P}}$, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$ satisfy (II, 1) and if for each proper subset $\mathfrak{P}_{j_1'}, \mathfrak{P}_{j_2'}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_k'}$ of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$: $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{j_1'}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_k'}$ fail to satisfy (II, 1)

The fundamental theorem of primal clusters then asserts (see [3]).

Theorem 8.1.

(1°) *Let $\tilde{\mathfrak{P}}$ be a primal cluster. Then the following classes of algebras are pairwise co-extensive, up to isomorphisms:*

(i) *The class of all $\tilde{\mathfrak{P}}$ algebras.*

(ii) *The class of all algebras subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(iii) *The class of all algebras semi-directly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(iv) *The class of all subalgebras of algebras which are subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(v) *The class of all homomorphic images of algebras which are subdirectly represented in $\tilde{\mathfrak{P}}$*[4]).

Moreover a finite $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra is directly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.

(2°) *If $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra and $\mathfrak{A} \neq \mathring{1}$ (= one-element algebra), then $\mathfrak{A}$ possesses a unique set of minimal eq-factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, and a unique set of minimal sd-factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, and these two sets of factors are identical.*

The scope of application of the fundamental structure theorem 8.1 will be broadened by the comprehensive classes of primal clusters whose existence we shall establish.

We further list the following consequences of the fundamental theorem:

Corollary 8.2. *If $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra and $\mathfrak{A} \neq \mathring{1}$, then its (unique) set $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ of (eq-minimal, or equivalently, subdirectly minimal) factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$ satisfy*

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}| .$$

[4]) The class (v) was not explicitly mentioned in [1] to [4]. However its equivalence with each of the other classes follows from the previously established equivalence of (i) to (iv), together with the observation: in any homomorphism $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}| \leqq |\mathfrak{B}|$.

Corollary 8.3. *If* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *are any distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$, *if* $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$ *are any distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ *and if*

$$|\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}| = |\mathfrak{P}_{j_1}| \cap |\mathfrak{P}_{j_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{j_s}|,$$

then: $r = s$ *and, in some order, the* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *are respectively identical with the* $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots$.

For algebras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ of the same species Sp, we say $\mathfrak{A}$ is "equationally maximal in $\mathfrak{B}$", in symbols

$$|\mathfrak{A}| \underset{\max}{\subset} |\mathfrak{B}|,$$

if for each identity $E\colon \Phi_1 = \Phi_2$ of $\mathfrak{B}$, the logical closure of $\{|\mathfrak{A}|$ augmented by $E\}$ is either $|\mathfrak{A}|$ or $|\mathfrak{B}|$. If $|\mathfrak{A}| \underset{\max}{\subset} \bar{1}$ we simply say $\mathfrak{A}$ is "equationally maximal".

Corollary 8.4. *If* $\mathfrak{P} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, *then* $\mathfrak{P}$ *is equationally maximal. More generally, if* $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *are distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$, *and if* $\times$ *denotes direct product, then in the sequence*

$$\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathfrak{P}_{i_2} \times \mathfrak{P}_{i_3} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathfrak{P}_{i_3} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathring{1},$$

each algebra is equationally maximal in its successor.

The scope of application of the fundamental structure theorem 8.1 and such corollaries as the above will be substantially broadened by the comprehensive classes of primal clusters whose existence we shall establish.

9. A basic Lemma

Hereafter we shall be principally concerned with the proof of the main result on primal clusters, theorem 10.6. The terminology below is that of §§ 3 to 6.

Lemma 9. *Let* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ *be two primal algebras (of the same species, Sp) and non isomorphic*

$$\mathfrak{P}_1 \ncong \mathfrak{P}_2. \tag{9.1}$$

Then corresponding to each preassigned pair of elements $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ *there exists at least one element* $\alpha_1 \in \mathfrak{P}_1$, *such that*

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2''.$$

Proof. We first observe that

$$|\mathfrak{P}_1| \neq |\mathfrak{P}_2|. \tag{9.2}$$

For from $|\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{P}_2|$ together with the last portion of theorem 7.2, follows

$$\mathfrak{P}_2 \cong \mathfrak{P}_1^{(k)} \quad (= k^{\text{th}} \text{ direct power})$$

for some positive integer k. From (9.1) $k \neq 1$. But neither is $k > 1$, for if so $\mathfrak{P}_2$ would have a proper ideal (corresponding to a homomorphism $\mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_1$), which is impossible since a primal algebra is simple (see [3]). This contradiction proves (9.2).

So there exist expressions $\Psi_1(\xi, \eta, \ldots)$ and $\Psi_2(\xi, \eta, \ldots)$ of species Sp such that

$$\Psi_1 = \Psi_2(\mathfrak{P}_1),$$
$$\Psi_1 \neq \Psi_2(\mathfrak{P}_2).$$

For suitable $\xi_2, \eta_2, \ldots \in \mathfrak{P}_2$, then,

$$\Psi_1(\xi_2, \eta_2, \ldots) = \varkappa_2', \quad \Psi_2(\xi_2, \eta_2, \ldots) = \varkappa_2'',$$
$$\varkappa_2', \varkappa_2'' \in \mathfrak{P}_2; \quad \varkappa_2' \neq \varkappa_2''.$$

Since $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ are functionally strictly complete there exist unary expressions $\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots$ of species Sp, such that

$$\lambda(\xi) \equiv \xi_2, \quad \omega(\xi) \equiv \eta_2, \ldots \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

If we write

$$\Psi'(\xi) = \text{def} = \Psi_1(\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots),$$
$$\Psi''(\xi) = \text{def} = \Psi_2(\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots)$$

we have

$$\Psi'(\xi) = \Psi''(\xi) \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\Psi'(\xi) \equiv \varkappa_2', \quad \Psi''(\xi) \equiv \varkappa_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2},$$
$$\varkappa_2' \neq \varkappa_2''.$$

The strict functional completeness of $\mathfrak{P}_2$ then insures: for arbitrary preassigned $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ there exists at least one unary expression $\sigma(\xi)$ such that, in $\mathfrak{P}_2$

$$\sigma(\varkappa_2') = \beta_2', \quad \sigma(\varkappa_2'') = \beta_2''.$$

Writing

$$\mu'(\xi) = \text{def} = \sigma(\Psi'(\xi)),$$
$$\mu''(\xi) = \text{def} = \sigma(\Psi''(\xi))$$

we have

$$\mu'(\xi) = \mu''(\xi) \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\mu'(\xi) \equiv \beta_2', \quad \mu''(\xi) \equiv \beta_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

Let now α_1 be any element in the range of $\mu'(\xi)$, mod $\mathfrak{P}_1$, — say

$$\mu'(\tau_1) = \alpha_1 \qquad (\alpha_1, \tau_1 \in \mathfrak{P}_1).$$

From the strict functional completeness of $\mathfrak{P}_1$, it follows that there exists an expression $\Pi(\xi)$ such that

$$\Pi(\xi) \equiv \tau_1 \pmod{\mathfrak{P}_1}.$$

Finally, writing

$$\Phi'(\xi) = \text{def} = \mu'(\Pi(\xi)),$$
$$\Phi''(\xi) = \text{def} = \mu''(\Pi(\xi))$$

we have

$$\Phi'(\xi) = \Phi''(\xi) \equiv \alpha_1 \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\Phi'(\xi) \equiv \beta_2', \quad \Phi''(\xi) \equiv \beta_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

That is

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2''$$

and the proof of lemma 9 is complete.

10. Coframal primals; principal theorem

If in lemma 9 we further assume $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ to be coframal (§ 5), the roles of α_1, and of β_2', β_2'' may be reversed according to:

Theorem 10.1. *Let $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (of the same species, Sp) which are coframal. Then corresponding to each $\alpha \in \mathfrak{P}_1$, there exist at least two distinct $\beta', \beta'' \in \mathfrak{P}_2$ such that*

$$\alpha \sim \beta', \quad \alpha \sim \beta'' \qquad (\beta' \neq \beta'').$$

Proof. Since $\mathfrak{P}_1 = (P_1, o, \ldots)$, $\mathfrak{P}_2 = (P_2, o, \ldots)$ are coframal there exists, in particular, an expression $\cap(\xi), = \xi^{\frown}$, of species Sp such that: $\xi^{\frown}$ is a cyclic permutation of the class $P_1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$, and simultaneously $\xi^{\frown}$ is a cyclic permutation of $P_2 \pmod{\mathfrak{P}_2}$. If now α_1, α are any given elements of $\mathfrak{P}_1$, then (lemma 9) there exist distinct $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ such that

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2'' \qquad (\beta_2' \neq \beta_2'').$$

Select the integer k such that, mod $\mathfrak{P}_1$,

$$\alpha = \alpha_2^{\frown k}.$$

Theorem 10.1 then follows from lemma 6 if β', β'' are taken as

$$\beta' = \text{def} = (\beta_2')^{\frown k}, \quad \beta'' = \text{def} = (\beta_2'')^{\frown k}.$$

Definition. Let $\mathfrak{A}$, with elements $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ and $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ be finite universal algebras of orders m, n respectively. Let

$$\bar{\alpha} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n})$$

be an "n-vector" over $\mathfrak{A}$, i.e., an ordered n-tuple of elements of $\mathfrak{A}$; the components $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$ need not be distinct, and equality has its usual vector meaning,

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \bar{\alpha}^{(2)} \leftrightarrow \alpha_{i_1}^{(1)} = \alpha_{i_1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{i_n}^{(1)} = \alpha_{i_n}^{(2)}.$$

Let now

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

be an arbitrary but fixed arrangement of the elements of $\mathfrak{B}$. An n-vector $\bar{\alpha}$ over $\mathfrak{A}$ is said to "cover" $\mathfrak{B}$ if

$$\alpha_{i_1} \sim \beta_1, \ \alpha_{i_2} \sim \beta_2, \ldots, \alpha_{i_n} \sim \beta_n.$$

Lemma 10.2. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ be algebras as in theorem 10.1, and let m, n be the orders of $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ respectively. Then there exist at least n distinct (i.e. pairwise non-equal) n-vectors over $\mathfrak{P}_1$, each of which covers $\mathfrak{P}_2$.*

Proof. Let $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ be the elements of $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ respectively. By theorem 10.1 — with the (symmetric) roles of $\mathfrak{P}_1$, and $\mathfrak{P}_2$ interchanged — corresponding to each $\beta \in \mathfrak{P}_2$ there exist at least two distinct $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{P}_1$, such that

$$\alpha' \sim \beta, \qquad \alpha'' \sim \beta \qquad (\alpha' \neq \alpha'').$$

Let then

$$(10.1) \qquad \begin{cases} \alpha_{i_1} \sim \beta_1, & \alpha_{j_1} \sim \beta_1 \quad (\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}), \\ \alpha_{i_2} \sim \beta_2, & \alpha_{j_2} \sim \beta_2 \quad (\alpha_{i_2} \neq \alpha_{j_2}), \\ \quad\vdots & \\ \alpha_{i_n} \sim \beta_n, & \alpha_{j_n} \sim \beta_n \quad (\alpha_{i_n} \neq \alpha_{j_n}). \end{cases}$$

Consider now the class of n-vectors over $\mathfrak{P}_1$ in which the first component is chosen either as α_{i_1} or as α_{j_1}, in which the second component is chosen either as α_{i_2} or as α_{j_2} etc., and where these choices are made independently. By (10.1) each of these 2^n distinct vectors covers $\mathfrak{P}_2$. Since $n \geq 2$ (part of the definition of primal algebra) we have

$$2^n > n$$

and lemma 10.2 is proved.

Theorem 10.3. *Let $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (species Sp) which are coframal. Then there exists an $\alpha^* \in \mathfrak{P}_1$ which is co-constant with all elements of $\mathfrak{P}_2$,*

$$\alpha^* \sim \beta \quad \textit{for all} \quad \beta \in \mathfrak{P}_2.$$

Proof. As before let $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ denote the elements of $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ respectively. Let

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_{r_1}'\}, \\ B_2 &= \{\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{r_2}''\}, \\ &\vdots \\ B_m &= \{\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \ldots, \beta_{r_m}^{(m)}\} \end{aligned}$$

denote the "co-constant classes" of $\mathfrak{P}_2$ relative to $\mathfrak{P}_1$, i.e.,

(10.2) $B_i =$ class of all elements of $\mathfrak{P}_2$ which are co-constant with α_i $(1 \leq i \leq m)$.

The m classes B_i will of course not be disjoint, because of theorem 10.1. From theorem 10.1 the integers r_i satisfy

$$2 \leq r_i \leq n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Theorem 10.3 is now equivalent to the assertion:

$$(10.3) \qquad r_i = n \quad \text{for at least one } i \ (1 \leq i \leq m).$$

We shall prove theorem 10.3 indirectly. Assume the theorem to be false, i.e., assume

$$(10.4) \qquad 2 \leq r_i < n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

The assumed falsity of the theorem further implies: (A) For each $\beta \in \mathfrak{P}_2$ there exists at least one co-constant class B_i [(10.2) above] which does not

contain β. This is seen since if (A) were false there would exist a $\beta^* \in \mathfrak{P}_2$ co-constant with each $\alpha \in \mathfrak{P}_1$, which in turn says that theorem 10.3 is true — with $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ interchanged. Since the hypotheses on $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ in theorem 10.3 are symmetrical, the assertion (A) follows.

Let

$$h = \min(m, n). \tag{10.5}$$

Further let

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^{(h)} = (\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \ldots, \alpha_n^{(h)}) \end{cases} \tag{10.6}$$

be h n-vectors over $\mathfrak{P}_1$ which are pairwise non-equal and each of which covers $\mathfrak{P}_2$. The existence of such n-vectors follows from (10.5) and lemma 10.2. We now select a class

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_h} \tag{10.7}$$

of h (not necessarily distinct — see case 2 below) elements of $\mathfrak{P}_1$ as follows:

Case 1, $m \leq n$. Here $h = m$, and we select (10.7) as:

$$\alpha_{i_1} = \alpha_1, \ \alpha_{i_2} = \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_{i_h} = \alpha_h = \alpha_m. \tag{10.8}$$

Case 2, $n < m$. Here $h = n$, and we select the elements of (10.7) subject to the condition (10.9), but otherwise arbitrarily in $\mathfrak{P}_1$:

$$\beta_1 \notin B_{i_1}, \ \beta_2 \notin B_{i_2}, \ \ldots, \ \beta_h (= \beta_n) \notin B_{i_n}. \tag{10.9}$$

Here [see (10.2)] B_{i_μ} is the class of all elements of $\mathfrak{P}_2$ which are co-constant with α_{i_μ} $(\mu = 1, 2, \ldots, h(=n))$. The possibility of satisfying (10.9), and hence the existence of the corresponding elements $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h}$ follows from (A) following (10.4).

In case 1, above, the h elements (10.6) are of course all distinct elements of $\mathfrak{P}_1$; in case 2 this is generally not so. In either case, however, it follows from lemma 9, (A) — following (10.4) — and (10.9) that: the classes $B_{i_1}, \ldots, B_{i_h}$ have an empty intersection,

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_h} = 0. \tag{10.10}$$

Now from the (strict) functional completeness of the algebra $\mathfrak{P}_1$, from the fact that the h n-vectors $\bar{\alpha}^{(1)}, \ldots, \bar{\alpha}^{(h)}$ over $\mathfrak{P}_1$ specified by (10.6) are pairwise non-equal, and from the fact that $h = \min(m, n) \leq n$, it follows that: there exists an expression $\sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ of species Sp such that, mod $\mathfrak{P}_1$, σ satisfies

$$\begin{cases} \sigma(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) = \alpha_{i_1}, \\ \sigma(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}) = \alpha_{i_2} \pmod{\mathfrak{P}_1}, \\ \vdots \\ \sigma(\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \ldots, \alpha_n^{(h)}) = \alpha_{i_h}, \end{cases} \tag{10.11}$$

where $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h}$ are elements (10.7) of $\mathfrak{P}_1$, determined by case 1 or by case 2 according as $h = m$ or $h = n$.

We recall that

$$(10.12)\qquad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(1)} \sim \beta_2 \ \ldots \ \alpha_n^{(1)} \sim \beta_n \\ \alpha_1^{(2)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(2)} \sim \beta_2 \qquad \alpha_n^{(2)} \sim \beta_n \\ \vdots & \\ \alpha_1^{(h)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(h)} \sim \beta_2 \qquad \alpha_n^{(h)} \sim \beta_n . \end{cases}$$

From (10.11), (10.12) and lemma 6 it follows that, mod $\mathfrak{P}_2$, the element $\sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ satisfies:

$$(10.13)\qquad \begin{cases} \sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \sim \alpha_{i_1}, \\ \sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \sim \alpha_{i_2}, \\ \vdots \\ \sigma(\beta_1, \ldots \qquad \beta_n) \sim \alpha_{i_h}. \end{cases}$$

Thus $\sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ is an element of $\mathfrak{P}_2$ which is co-constant with each of the elements $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h} \in \mathfrak{P}_1$. But this is impossible by (10.10), which expressly asserts that no element of $\mathfrak{P}_2$ is co-constant with each of the elements $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_h}$. This contradiction, resulting from the assumption (10.4), then completes the proof of theorem 10.3.

Theorem 10.4. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (species Sp) which are coframal. Then each element of $\mathfrak{P}_1$ is co-constant with all elements of $\mathfrak{P}_2$.*

Proof. Let $\alpha \in \mathfrak{P}_1$. We must show that

$$\alpha \sim \beta \quad \text{for all} \quad \beta \in \mathfrak{P}_2 .$$

If α is the α^* of theorem 10.3 we are through. If not let $\xi^\cap$ be a unary expression which is simultaneously a cyclic permutation of P_1 mod $\mathfrak{P}_1$, and a cyclic permutation of P_2, mod $\mathfrak{P}_2$; such $\xi^\cap$ exists because of our assumption of coframality. Then of course for each t, $\xi^{\cap t}$ is again such a simultaneous cyclic permutation. Choose t so that

$$(\alpha^*)^{\cap t} = \alpha .$$

Then from

$$\alpha^* \sim \beta_1, \ \alpha^* \sim \beta_2, \ \ldots, \ \alpha^* \sim \beta_n$$

together with lemma 6, we have

$$\alpha \sim \beta_1^{\cap t}, \alpha \sim \beta_2^{\cap t}, \ \ldots, \ \alpha \sim \beta_n^{\cap t}.$$

Since $\beta_1^{\cap t}, \ldots, \beta_n^{\cap t}$ is now merely some arrangement of the elements $\beta_1, \ldots, \beta_n$ of $\mathfrak{P}_2$, the theorem follows.

Theorem 10.5. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ be a finite class of primal algebras, all of the same species Sp,*

$$\mathfrak{P}_i = (P_i, o, \ldots),$$

where the class is coframal, and the $\mathfrak{P}_i$ are pairwise non-isomorphic. Then $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ are independent.

Proof. Let

$$(P_i, \times, \hat{}\,; 0_i, 1_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

be a class of coframes. Applying theorem 10.4 we have

$$1_i \sim 0_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Theorem 10.5 then follows at once from theorem 5.3.

From the definition of primal cluster theorem 10.5 at once yields

Theorem 10.6, Principal theorem. *Let $\mathfrak{P} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ be a class of primal algebras $\mathfrak{P}_i$, all of the same species Sp, in which each finite subset of the $\mathfrak{P}_i$ are coframal, and the $\mathfrak{P}_i$ are pairwise non-isomorphic. Then $\mathfrak{P}$ is a primal cluster*:

A *primal frame* is now defined as a frame $\mathfrak{B} = (B, \times, \hat{}\,)$ — see § 5 — which is a primal algebra, i.e., which is functionally strictly complete. The examples (i) to (vi) of § 7 are of this category, and these examples are further subsumed in the profusion of primal frames whose existence is asserted by theorem 7.1. Since all frames are (naturally) coframal algebras, theorem 10.6 has the corollary:

Theorem 10.7. *$\mathfrak{B} = \{\ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots\}$, the class of all non-isomorphic primal frames $\mathfrak{B}_i = (B_i, \times, \hat{}\,)$, form a primal cluster.*

The fundamental structure theorem, theorem 8, then applies to each $\mathfrak{P}$, and in particular to $\mathfrak{B}$, of theorems 10.6, 10.7.

11. Projected further extension

The concept of coframality has served as a useful tool for determining independence among universal algebras, and it is basically this circumstance which underlies the appearance of this concept in the primal clusters established by theorem 10.6. If coframality is thus conceived as a tool, and not as an intrinsic property of independence, it is plausible to suppose that the cluster property of a class $\{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ of primal algebras, $\mathfrak{P}_i$, may well follow from a weaker restriction than coframality. Indeed incomplete work currently in progress makes even the extreme situation highly probable, that no restriction at all (other than non-isomorphism) is necessary, that is, that: for a class of primal algebras, coframality — and with it independence — already follows from their mere non-isomorphism. This extreme projected result we state as the following

Conjecture C 11. *$\tilde{\mathfrak{P}}(Sp) = \tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$, the class of all (pairwise non-isomorphic) primal algebras of preassigned species Sp, form a primal cluster.*

The truth of C 11 would of course imply

$$\mathfrak{P} \leqq \tilde{\mathfrak{P}}$$

for all primal clusters $\mathfrak{P}$ (of species Sp) and this in turn carries with it an *absolute* extension of theorem 8.1 — where the (relative) $\mathfrak{P}$ is replaced by $\tilde{\mathfrak{P}}$.

Such absolute results would be particularly significant for the unicity of (equational — as well as subdirect —) factorization. For instance, from § 8 we should have

C 11.1. *If* $\mathfrak{A}$ *is a* $\tilde{\tilde{\mathfrak{P}}}$*-algebra and if* $\mathfrak{A} \ncong \mathring{1}$, *then there exists one and only one set of primal algebras* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *(of species Sp) such that*

(1°) *the* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *are all distinct (i.e., pairwise non-isomorphic).*

(2°) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}|$.

For these $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *it then further follows that*

(3°) $\mathfrak{A}$ *is isomorphic with the direct product of suitable subdirect powers of* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$.

In a similar way the whole theory may immediately be cast in absolute form.

References

[1] Foster, A. L.: Generalized „Boolean" theory of universal algebras, Part I: Subdirect sums and normal representation theorem. Math. Z. **58**, 306—336 (1953). — [2] Foster, A. L.: Generalized „Boolean" theory of universal algebras, Part II: Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. Math. Z. **59**, 191—199 (1953). — [3] Foster, A. L.: The identities of—and unique subdirect factorization within—classes of universal algebras. Math. Z. **62**, 171—188 (1955). — [4] Foster, A. L.: Ideals and their structure in classes of operational algebras. Math. Z. **65**, 70—75 (1956). — Additional references may be found in the bibliographies of the above papers.

University of California, Berkeley

(Eingegangen am 5. Mai 1956)

KRICKEBERG, K.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 470—486 (1957)

Stochastische Konvergenz von Semimartingalen

Von
KLAUS KRICKEBERG

Die DOOBschen Sätze über die Konvergenz fast überall von Martingalen beschränkter Variation[1]), deren Index-(Parameter-)bereich eine Menge reeller Zahlen und daher eine linear geordnete Menge darstellt, wurden in [8] auf den Fall von Martingalen mit filtrierenden (gerichteten) Indexbereichen übertragen, und zwar unter einer „Vitalischen" Hypothese V_0, die sich nur auf die Martingalbasis[1]) bezieht. Es erscheint jedoch in vielen Fällen wünschenswert, auch dann noch über eine geeignete Grenzfunktion zu verfügen, wenn V_0 nicht erfüllt ist. Da man Konvergenz im Sinne eines Raumes L^p nur bei gleichmäßig integrierbaren Martingalen erwarten kann (cf. [6]), so liegt es nahe, nach stochastischer Konvergenz zu fragen. Das Hauptergebnis dieser Arbeit bildet denn auch der Satz 6.5, daß jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder unten stochastisch gegen eine integrierbare Funktion konvergiert, und dasselbe gilt für jedes Semimartingal beschränkter Variation.

Da der Begriff der stochastischen Konvergenz ohnehin invariant ist gegenüber Änderungen der beteiligten Funktionen in einer Nullmenge, so betrachten wir von vornherein die modulo der Nullmengen reduzierte Maßalgebra. Es spielt sich also alles in einer abstrakten Booleschen sigma-Algebra $\mathfrak{B}$ mit einer Einheit E und einem strikt positiven sigma-endlichen Maß μ ab, wodurch sich unsere Überlegungen sehr vereinfachen. Eine $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion (zufällige Variable) ist etwa im Sinne CARATHÉODORYs als „Ortsfunktion" aufzufassen, wobei unendliche Werte stets zugelassen werden. Neben der stochastischen Konvergenz von Moore-Smithschen Folgen $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen haben wir die übliche Ordnungskonvergenz (wesentliche Konvergenz), die die stochastische Konvergenz impliziert und im Fall abzählbarer Folgen mit der Konvergenz „fast überall" identisch ist.

Das siebente, letzte Kapitel enthält, als eine Art Ergänzung zu [8], den Beweis der Ordnungskonvergenz von Semimartingalen beschränkter Variation unter einer Vitalischen Bedingung V', die V_0 nach sich zieht und im Fall eines linear geordneten Indexbereichs immer erfüllt ist. Hieraus folgt zwar die stochastische Konvergenz von Semimartingalen beschränkter Variation, wenn jede konfinale Menge von Indizes eine linear geordnete konfinale Teilmenge enthält, doch gibt es wichtige Indexbereiche, die diese Eigenschaft nicht haben, so daß der direkte Beweis der stochastischen Konvergenz nicht überflüssig ist. Als Beispiel sei das System aller Zerlegungen des Einheitsintervalls $\langle 0, 1 \rangle$ in endlich viele Teilintervalle, mit der „Verfeinerung" als Ordnungsrelation, erwähnt.

[1]) Zur Definition vgl. § 6.

Anwendungen auf additive und semiadditive Zellenfunktionen (verallgemeinerte Intervallfunktionen) ergeben sich ganz analog den Betrachtungen in [8], § 10, und sind daher hier nicht besonders behandelt worden. Es besitzt also z.B. jede semiadditive Funktion beschränkter Variation eine „stochastische" Ableitung, die als Ersatz der üblichen Ableitung dienen mag, wenn kein Vitalisches Axiom vorliegt.

Der Beweis des Hauptsatzes 6.5 stützt sich auf stochastische obere und untere Limites beliebiger Moore-Smithscher Folgen $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen f_σ, die in den Kapiteln 2—5 definiert und untersucht werden. § 2 enthält die grundlegenden Eigenschaften, z.B. $s\lim\inf_\sigma f_\sigma \leq s\lim\sup_\sigma f_\sigma$, und das Gleichheitszeichen ist für die stochastische Konvergenz charakteristisch. In § 3 findet sich die Invarianz der stochastischen Limites gegenüber Einschränkungen des Definitionsbereichs E oder des Systems $\mathfrak{B}$ der meßbaren Elemente. § 4 bringt einen Vergleich der stochastischen mit den üblichen Ordnungslimites. In § 5 wird das Analogon des FATOUschen Lemmas mit den stochastischen Limites, nämlich (5.2) und (5.3), unter einer geeigneten Bedingung **S** sehr einfach bewiesen. Zum Vergleich wird das FATOUsche Lemma mit den Ordnungslimites auf demselben Wege unter einer Annahme ***T*** abgeleitet, die aus **S** folgt und ebenso wie **S** strikt schwächer als die bisher benutzte Voraussetzung der gleichmäßigen oder terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit der unbestimmten Integrale der Folge ist. Zugleich zeigt sich, daß man für das FATOUsche Lemma mit stochastischen Limites eine Bedingung, nämlich eben **S**, benötigt, die eine Art partielle gleichmäßige *Totalstetigkeit* der unbestimmten Integrale ausdrückt, während für das FATOUsche Lemma mit Ordnungslimites eine Bedingung, etwa ***T***, ausreicht, die eine Art partielle gleichmäßige *Additivität* darstellt. Im Fall der gewöhnlichen abzählbaren Folgen summierbarer Funktionen trat dieser Unterschied nie zutage, weil dort beide Bedingungen äquivalent sind.

Angesichts der Tatsache, daß sich die stochastische Konvergenz ebenso wie die Ordnungskonvergenz durch das Zusammenfallen geeigneter oberer und unterer Limites definieren läßt, erhebt sich die Frage, welche der bekannten Konvergenzbegriffe für gewöhnliche oder Moore-Smithsche Folgen im Raum $\mathfrak{F}$ aller $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen außerdem noch diese Eigenschaft haben. Stellt man an die fraglichen Limites die natürliche Forderung, daß ihre Bildung mit der Einschränkung auf ein festes Element aus $\mathfrak{B}$ vertauschbar sei, so zeigt sich leicht, daß die Konvergenz im Sinne der Räume L^p und die gleichmäßige Konvergenz im allgemeinen sofort ausscheiden. Ohne Beweis sei hier jedoch bemerkt, daß sich in jedem vollständigen Verband obere und untere Limites Moore-Smithscher Folgen sinnvoll definieren lassen, die die Konvergenz im Sinne der sog. „Intervalltopologie" erzeugen. Diese Limites liegen im Fall des vollständigen Verbandes $\mathfrak{F}$ zwischen den stochastischen, so daß die stochastische Konvergenz die Intervallkonvergenz impliziert. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht, denn bekanntlich ist $\mathfrak{F}$ hinsichtlich der Intervalltopologie, aber nicht hinsichtlich der stochastischen Topologie kompakt.

§ 1. Grundlagen

$\mathfrak{B}$ sei eine *Boolesche sigma-Algebra* mit dem Einselement E und dem Nullelement O, auf der sich ein strikt positives sigma-endliches Maß und daher auch ein *strikt positives endliches Maß* erklären läßt[2]). $\mathfrak{F}$ bedeute den Raum aller $\mathfrak{B}$-meßbaren *reellen*[3]) *Funktionen* über E, definiert als CARATHÉODORYsche Ortsfunktionen (cf. [2]) oder als Zerlegungen der Einheit (Spektralscharen, vgl. [11], S. 382). In $\mathfrak{B}$, in $\mathfrak{F}$ und in der Menge aller reellen Zahlen werde die *Ordnung*[4]) durch $\leq$, die Bildung des *Infimums* durch $\wedge$ und die Bildung des *Supremums* durch $\vee$ bezeichnet. Hingegen mögen $\subseteq$, $\cap$ und $\cup$ die mengentheoretischen Relationen und Operationen darstellen. Statt $A \wedge B$, wobei $A, B \in \mathfrak{B}$, schreiben wir auch AB und ebenso $\mathfrak{LM}$ statt $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$. Die *Differenz* $A - B$ in $\mathfrak{B}$ werde nur im Fall $B \leq A$ betrachtet; sie fällt dann mit der uneingeschränkt ausführbaren *symmetrischen Differenz* $A + B = (A \vee B) - AB$ zusammen.

Symbole wie $\{f < g\}$ oder $\{f = g\}$ oder $\{f \leq \lambda\}$, in denen f und g Funktionen aus $\mathfrak{F}$ und λ eine reelle Zahl bezeichnen, mögen die übliche Bedeutung haben (vgl. z. B. [7], S. 223). Man könnte etwa $\{f < g\}$ lesen als „das Element aus $\mathfrak{B}$, in dem $f < g$". Gleichungen oder Ungleichungen der Gestalt „$f = g\,[A]$" oder „$f < g\,[A]$" mit $f, g \in \mathfrak{F}$ und $A \in \mathfrak{B}$ sollen ausdrücken, daß die Einschränkungen von f und g auf A die fragliche Relation erfüllen. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir die konstante Funktion aus $\mathfrak{F}$, die überall den Wert λ hat, ebenfalls durch λ bezeichnen.

Bekanntlich bildet $\mathfrak{F}$ einen vollständigen Verband, und $\mathfrak{B}$ ist im verbandstheoretischen Sinne isomorph einem vollständigen Unterverband von $\mathfrak{F}$, nämlich dem der charakteristischen Funktionen. Jede Teilmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ enthält eine abzählbare[5]) Menge $\mathfrak{D}$ mit $\wedge\mathfrak{G} = \wedge\mathfrak{D}$ und $\vee\mathfrak{G} = \vee\mathfrak{D}$. Wir sagen, $\mathfrak{G}$ *filtriere nach rechts*, wenn es zu je zwei Funktionen f und g aus $\mathfrak{G}$ eine Funktion h aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $f, g \leq h$.

Wir wollen von einer hinsichtlich eines Maßes μ auf $\mathfrak{B}$ integrierbaren Funktion f aus $\mathfrak{F}$ nicht verlangen, daß $\int_E f\,d\mu$ endlich sei, nennen also f schon dann *integrierbar*, wenn das über E erstreckte Integral von $f^+ = f \vee 0$ oder $f^- = (-f) \vee 0$ endlich ist. Sind beide endlich, d. h. ist $\int_E f\,d\mu$ endlich, so heiße f *summierbar*. Der folgende Satz ist wohlbekannt (cf. z. B. [7], S. 223).

Satz 1.1. *Es sei μ ein strikt positives sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ eine nach rechts filtrierende Menge hinsichtlich μ integrierbarer Funktionen. Ist nun $-\infty < \int_E f_0\,d\mu$ für wenigstens ein f_0 aus $\mathfrak{G}$, so wird auch $\vee\mathfrak{G}$ integrierbar und*

$$\int_E (\vee\mathfrak{G})\,d\mu = \bigvee_{f \in \mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu .$$

---

[2]) Vgl. [11], S. 379; weitere Hinweise und ausführlichere Diskussion der Bezeichnungen in [7], S. 222—223.

[3]) Wir betrachten auch $-\infty$ und $+\infty$ als reelle Zahlen.

[4]) In anderer Terminologie: teilweise Ordnung.

[5]) „Abzählbar" soll stets „endlich oder abzählbar" bedeuten.

§ 2. Stochastischer limes inferior und superior

Es sei Θ eine nicht leere und hinsichtlich einer transitiven Relation $\ll$ *nach rechts filtrierende* Menge, d.h. zu je zwei Elementen ϱ und τ von Θ gebe es ein Element σ von Θ mit $\varrho, \tau \ll \sigma$. Eine Teilmenge Γ von Θ heißt *terminal*, wenn ein Element τ von Θ existiert, so daß jedes σ mit $\tau \ll \sigma$ zu Γ gehört. Das Komplement in Θ einer nicht terminalen Menge wird *konfinal* genannt. Wir betrachten im folgenden Moore-Smithsche Folgen $(a_\sigma; \sigma \in \Theta)$ von reellen Zahlen, Funktionen aus $\mathfrak{F}$ oder anderen Objekten. Da der *Indexbereich* Θ und die Relation $\ll$ fast immer festgehalten werden, schreiben wir statt dessen meistens nur (a_σ) und sprechen kurz von einer *Folge*. Unter einer *Teilfolge* von $(a_\sigma; \sigma \in \Theta)$ verstehen wir eine Folge $(a_\sigma; \sigma \in \Gamma)$, wobei Γ konfinal in Θ und mit der auf Γ eingeschränkten Relation $\ll$ versehen ist. Eine Fréchetsche Folge ist eine Folge mit der Menge der natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung als Indexbereich.

Der Vorbereitung der Definition eines stochastischen limes inferior und superior einer Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$ dienen die folgenden Überlegungen. μ sei ein strikt positives endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Eine Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ heißt bekanntlich stochastisch konvergent gegen O oder konvergent dem Maße nach gegen O, wenn $\lim_\sigma \mu(A_\sigma) = 0$, d.h. wenn (A_σ) hinsichtlich der NIKODÝMschen Metrik $\mu(X+Y)$ gegen O strebt. Da jedes strikt positive endliche Maß auf $\mathfrak{B}$ totalstetig in bezug auf jedes andere ist, so hängt dieser Konvergenzbegriff nicht von μ ab. Im Fall eines sigma-endlichen Maßes haben wir die folgende Charakterisierung.

Satz 2.1. *Es sei ν ein strikt positives sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Dann und nur dann konvergiert die Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O, wenn für jedes H aus $\mathfrak{B}$ mit $\nu(H) < +\infty$ gilt*

$$\lim_\sigma \nu(HA_\sigma) = 0. \tag{2.1}$$

Beweis. Aus $\lim_\sigma \mu(A_\sigma) = 0$ folgt $\lim_\sigma \mu(HA_\sigma) = 0$ und damit (2.1), weil ν im Bereich der Teile von H endlich bleibt. Es sei andererseits (2.1) erfüllt und $\varepsilon > 0$. Infolge der sigma-Endlichkeit von ν gibt es ein H mit $\nu(H) < +\infty$ und $\mu(E-H) < \varepsilon$. Aus (2.1) folgt dann $\lim_\sigma \mu(HA_\sigma) = 0$, d.h. $\mu(HA_\sigma) < \varepsilon$ und daher $\mu(A_\sigma) < 2\varepsilon$ für terminal viele σ.

Eine Funktion h' aus $\mathfrak{F}$ heiße eine *Majorante* einer Funktion h aus $\mathfrak{F}$, wenn $h \leq h'$ und $\{h = h'\} = \{h = +\infty\}$. Analog werde g' als eine *Minorante* von g bezeichnet, wenn $g' \leq g$ und $\{g' = g\} = \{g = -\infty\}$. Der Einfachheit halber formulieren wir die folgenden Feststellungen nur für Majoranten.

2.2. *Ist $h_1 \leq h_2$, so bildet jede Majorante von h_2 auch eine Majorante von h_1.*

2.3. *Ist h' eine Majorante von $h_1 \wedge h_2$, so existieren Majoranten h_1' und h_2' von h_1 bzw. h_2 mit $h' = h_2' \wedge h_1'$.*

Beweis. Definieren wir $h_1 - h_2$ und $h_2 - h_1$ überall dort als Null, wo diese Differenzen ursprünglich keinen Sinn haben, und beachten wir, daß h' den Wert $-\infty$ nicht annimmt, so lassen sich die Funktionen $h_1' = h' + (h_1 - h_2)^+$ und $h_2' = h' + (h_2 - h_1)^+$ bilden, die die verlangten Eigenschaften haben.

Es sei nun (f_σ) eine Folge in $\mathfrak{F}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}$ die Menge aller Funktionen h aus $\mathfrak{F}$ derart, daß für jede Majorante h' von h die Folge $(\{h' < f_\sigma\})$ in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O konvergiert, und entsprechend mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller Funktionen g derart, daß für jede Minorante g' von g die Folge $(\{f_\sigma < g'\})$ stochastisch gegen O strebt. Offenbar gilt $+\infty \in \mathfrak{H}$ und $-\infty \in \mathfrak{G}$. Aus der Definition der stochastischen Konvergenz in $\mathfrak{B}$ und aus dem Satz 2.1 ergeben sich unmittelbar Beschreibungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ mit Hilfe eines strikt positiven, endlichen oder sigma-endlichen Maßes auf $\mathfrak{B}$.

Aus 2.2 folgt

2.4. *Ist* $h_1 \leq h_2$ *und* $h_1 \in \mathfrak{H}$, *so auch* $h_2 \in \mathfrak{H}$.

Aus 2.3 und $\{h_1' \wedge h_2' < f_\sigma\} = \{h_1' < f_\sigma\} \vee \{h_2' < f_\sigma\}$ resultiert

2.5. *Ist* $h_1 \in \mathfrak{H}$ *und* $h_2 \in \mathfrak{H}$, *so auch* $h_1 \wedge h_2 \in \mathfrak{H}$.

Entsprechende Feststellungen treffen natürlich auf $\mathfrak{G}$ zu.

2.6. *Ist* $g \in \mathfrak{G}$ *und* $h \in \mathfrak{H}$, *so* $g \leq h$.

Beweis. g' sei eine Minorante von g und h' eine Majorante von h. Aus $\{h' < g'\} \leq \{f_\sigma < g'\} \vee \{h' < f_\sigma\}$ folgt, da die rechte Seite stochastisch gegen O strebt, daß $\{h' < g'\} = O$, also $g' \leq h'$. Dies trifft auf jede Minorante g' von g und jede Majorante h' von h zu, und somit gilt in der Tat $g \leq h$.

Wir definieren nun den *stochastischen limes inferior* und *superior* von (f_σ) durch

$$s\lim\inf_\sigma f_\sigma = \vee\mathfrak{G}, \quad s\lim\sup_\sigma f_\sigma = \wedge\mathfrak{H}. \tag{2.2}$$

Aus 2.6 folgt unmittelbar der

Satz 2.7. *Es gilt* $s\lim\inf_\sigma f_\sigma \leq s\lim\sup_\sigma f_\sigma$.

Ferner haben wir die folgende Verallgemeinerung von 2.5:

Satz 2.8. *Es ist* $s\lim\inf_\sigma f_\sigma \in \mathfrak{G}$ *und* $s\lim\sup_\sigma f_\sigma \in \mathfrak{H}$.

Beweis. h' sei eine Majorante von $h^* = s\lim\sup_\sigma f_\sigma$. Wir wählen ein strikt positives endliches Maß μ auf $\mathfrak{B}$ und haben dann zu zeigen, daß

$$\lim_\sigma \mu(\{h' < f_\sigma\}) = 0. \tag{2.3}$$

Hierzu betrachten wir die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{B}$ der Form $\{h \geq h'\}$ mit $h \in \mathfrak{H}$. Diese Menge ist nicht leer, da $\mathfrak{H}$ nicht leer ist, sie filtriert wegen 2.5 und $\{h_1 \wedge h_2 \geq h'\} = \{h_1 \geq h'\} \wedge \{h_2 \geq h'\}$ nach links, und es gilt

$$\bigwedge_{h \in \mathfrak{H}} \{h \geq h'\} = \{h^* = +\infty\}.$$

Nach Satz 1.1, auf charakteristische Funktionen angewandt, und wegen der Endlichkeit von μ existiert also zu gegebenem positivem ε ein Element h_0 aus $\mathfrak{H}$ mit

$$\mu(\{h_0 \geq h'\} - \{h^* = +\infty\}) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Die folgende Funktion h'' ist eine Majorante von h_0:

$$h'' = +\infty \quad [\{h_0 \geq h'\}], \quad h'' = h' \quad [\{h_0 < h'\}].$$

Daher gibt es einen Index τ, so daß $\tau \ll \sigma$ impliziert

$$\mu(\{h'' < f_\sigma\}) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Nun ist

$$\{h' < f_\sigma\} \leq \{h'' < f_\sigma\} \vee (\{h_0 \geq h'\} - \{h^* = +\infty\}),$$

d.h. wegen (2.4) und (2.5) gilt $\mu(\{h' < f_\sigma\}) < 2\varepsilon$ für alle σ mit $\tau \ll \sigma$, womit (2.3) bewiesen ist.

Wir bezeichnen die Folge (f_σ) als *stochastisch konvergent* gegen die Funktion $f = s\lim_\sigma f_\sigma$, wenn $s\liminf_\sigma f_\sigma = s\limsup_\sigma f_\sigma = f$ ist. Dies ist auf Grund von (2.2) und der Sätze 2.7 und 2.8 gleichwertig damit, daß für jede Minorante g' und jede Majorante h' von f die Folge $(\{f_\sigma < g'\} \vee \{h' < f_\sigma\})$ in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O strebt. Dann und nur dann konvergiert (f_σ) stochastisch, wenn $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$ nicht leer ist, und in diesem Fall gilt $\mathfrak{G}\mathfrak{H} = \{s\lim_\sigma f_\sigma\}$. Die stochastische Konvergenz gegen O in $\mathfrak{B}$, von der wir ausgingen, reduziert sich auf die eben definierte stochastische Konvergenz, wenn wir charakteristische Funktionen betrachten.

Üblicherweise definiert man den Begriff der stochastischen Konvergenz nur für endlichwertige Funktionen. Daß dieser Begriff dann mit dem hier erklärten zusammenfällt, zeigt der folgende

Satz 2.9. *Dann und nur dann konvergiert eine Folge (f_σ) endlicher Funktionen gegen eine endliche Funktion f, wenn für jede positive Zahl η die Folge $(\{|f_\sigma - f| > \eta\})$ stochastisch gegen O strebt.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig, weil $f - \eta$ eine Minorante und $f + \eta$ eine Majorante von f darstellt. Wir nehmen andererseits an, die Bedingung sei erfüllt, und betrachten irgendeine Majorante h' von f, ein strikt positives endliches Maß μ auf $\mathfrak{B}$ und eine positive Zahl ε. Aus $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \left\{h' < f + \frac{1}{i}\right\} = O$ folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n mit $\mu\left(\left\{h' < f + \frac{1}{n}\right\}\right) < \varepsilon$. Voraussetzungsgemäß gilt dann $\mu\left(\left\{f + \frac{1}{n} < f_\sigma\right\}\right) < \varepsilon$ für terminal viele σ, d.h. wegen $\{h' < f_\sigma\} \leq \left\{h' < f + \frac{1}{n}\right\} \vee \left\{f + \frac{1}{n} < f_\sigma\right\}$ auch $\mu(\{h' < f_\sigma\}) < 2\varepsilon$, also $f \in \mathfrak{H}$ und ebenso $f \in \mathfrak{G}$.

Der stochastische limes inferior und superior und damit der Begriff der stochastischen Konvergenz beliebiger Folgen in $\mathfrak{F}$ lassen sich übrigens mittels einer der üblichen eineindeutigen ordnungstreuen Abbildungen der durch $-\infty$ und $+\infty$ abgeschlossenen Zahlengeraden auf das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ auf die entsprechenden Begriffe im Fall endlicher Funktionen zurückführen. Es sei z.B. $\boldsymbol{A}f = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} f$, wobei arc tg den Hauptwert bedeutet, mit den Werten $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ an der Stelle $-\infty$ bzw. $+\infty$. Wir bezeichnen die bisher betrachteten Mengen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ jetzt durch $\mathfrak{G}(f_\sigma)$ und $\mathfrak{H}(f_\sigma)$, um die Abhängigkeit von der Folge (f_σ) zum Ausdruck zu bringen. Aus der Eineindeutigkeit und

Ordnungstreue von A erhalten wir die folgende Erzeugung von $\mathfrak{H}(Af_\sigma)$ mit Hilfe von $A\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und umgekehrt.

2.10. *$\mathfrak{H}(Af_\sigma)$ besteht aus allen Funktionen h, zu denen es eine Funktion $\tilde{h}$ aus $A\mathfrak{H}(f_\sigma)$ mit $\tilde{h} \leq h$ gibt. $A\mathfrak{H}(f_\sigma)$ besteht aus allen Funktionen der Form $1 \wedge h$ mit $h \in \mathfrak{H}(Af_\sigma)$.*

Ein entsprechender Satz bezieht sich auf $\mathfrak{G}(Af_\sigma)$ und $A\mathfrak{G}(f_\sigma)$. Hieraus folgt, da die Operationen $\wedge$ und $\vee$ mit A vertauschbar sind:

Satz 2.11. *Es ist* $s\liminf_\sigma Af_\sigma = A(s\liminf_\sigma f_\sigma)$ *und* $s\limsup_\sigma Af_\sigma = A(s\limsup_\sigma f_\sigma)$.

Bekanntlich läßt sich die stochastische Konvergenz im Raum $\mathfrak{E}$ aller endlichen Funktionen aus $\mathfrak{F}$ mit Hilfe einer Metrik beschreiben (cf. z.B. [5], S. 82). Setzen wir nämlich $M(f) = \bigwedge_{\eta>0}(\mu(\{|f| \geq \eta\}) + \eta)$, wobei μ ein strikt positives endliches Maß auf $\mathfrak{B}$ bedeutet, so bildet $\mathfrak{E}$ mit der Metrik $M(f-g)$ einen vollständigen metrischen Raum, und $s\lim_\sigma f_\sigma = f$ ist gleichbedeutend mit $\lim_\sigma M(f_\sigma - f) = 0$. Nach Satz 2.11 stellt daher auch $\mathfrak{F}$ mit der Metrik $M(Af - Ag)$ einen vollständigen metrischen Raum dar, und $s\lim_\sigma f_\sigma = f$ ist äquivalent mit $\lim_\sigma M(Af_\sigma - Af) = 0$. Insbesondere bekommen wir den

Satz 2.12. *Gibt es eine Funktion f in $\mathfrak{F}$, so daß jede Teilfolge von (f_σ) eine stochastisch gegen f konvergente Teilfolge enthält, so konvergiert (f_σ) selbst stochastisch gegen f.*

§ 3. Invarianz der stochastischen Limites

$\mathfrak{A}$ sei eine Boolesche *sigma-Unteralgebra* von $\mathfrak{B}$ mit demselben Einselement E und demselben Nullelement O. Wir wollen zeigen, daß die in bezug auf $\mathfrak{A}$ gebildeten stochastischen Limites einer Folge (f_σ) mit denen in bezug auf $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, wenn jedes f_σ sogar $\mathfrak{A}$-meßbar ist. Zuvor die folgenden Bemerkungen.

Da das Infimum und das Supremum in $\mathfrak{B}$ jeder Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ gleich dem Infimum und Supremum einer abzählbaren Teilmenge von $\mathfrak{C}$ ist, so bildet $\mathfrak{A}$ nicht nur hinsichtlich der abzählbaren, sondern hinsichtlich aller verbandstheoretischen Operationen einen Unterverband von $\mathfrak{B}$, und zu jedem Element M von $\mathfrak{B}$ gibt es ein größtes in M enthaltenes und ein kleinstes M enthaltendes Element von $\mathfrak{A}$, den $\mathfrak{A}$-*Kern* KM und die $\mathfrak{A}$-*Hülle* HM. Ebenso stellt das System $\mathfrak{F}_\mathfrak{A}$ aller $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen über E einen vollständigen Unterverband von $\mathfrak{F}$ dar, und zu jeder Funktion f aus $\mathfrak{F}$ existiert eine größte $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion Kf unterhalb von f und eine kleinste $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion Hf oberhalb von f.

μ bedeute in diesem Kapitel ein festes strikt positives und endliches Maß.

Lemma 3.1. *Es sei $M \in \mathfrak{B}$ und $KM = O$. Dann gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, so daß aus $A \in \mathfrak{B}$ und $\mu(A) < \delta$ folgt $\mu(K(A \vee M)) < \varepsilon$.*

Beweis. Wäre das Lemma falsch, so existierte eine positive Zahl ε und eine Fréchetsche Folge (A_n) in $\mathfrak{B}$ mit $\lim_n \mu(A_n) = 0$ und

$$\mu(K(A_n \vee M)) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

Die Folge (A_n) enthielte (vgl. [5], S. 83) eine Teilfolge (A_{n_k}) mit $\lim_k A_{n_k}=O$. Daher hätte $B_l=\bigvee_{l\leq k} A_{n_k}$ die folgenden Eigenschaften:

$$A_{n_l}\leq B_l, \quad B_{l+1}\leq B_l, \quad \lim_l B_l=O. \tag{3.2}$$

Hieraus folgte

$$\boldsymbol{K}(A_{n_l}\vee M)\leq \boldsymbol{K}(B_l\vee M) \tag{3.3}$$

und $\boldsymbol{K}(B_{l+1}\vee M)\leq \boldsymbol{K}(B_l\vee M)$. Infolgedessen existierte der Grenzwert $C=\lim_l \boldsymbol{K}(B_l\vee M)$ und es wäre $C\leq B_l\vee M$ für jedes l, also auf Grund der letzten Ungleichung (3.2) sogar $C\leq M$ und daher $C=O$, weil $C\in\mathfrak{A}$ und $\boldsymbol{K}M=O$. Aus (3.3) ergäbe sich $\lim_l \boldsymbol{K}(A_{n_l}\vee M)=O$ im Widerspruch zu (3.1).

Es sei nun (f_σ) eine Folge $\mathfrak{A}$-meßbarer Funktionen. Wir bezeichnen die analog zu $\mathfrak{H}$ aber in bezug auf $\mathfrak{A}$ gebildete Menge durch $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$. Es gilt also $h\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ dann und nur dann, wenn $h\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ und wenn $\{h'<f_\sigma\}$ für jede $\mathfrak{A}$-meßbare Majorante h' von h stochastisch gegen O konvergiert. Entsprechend werde $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ definiert.

3.2. *Es ist* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{G}$.

Beweis. Es sei $h\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$, h' eine Majorante von h und $\varepsilon>0$. Zu jeder natürlichen Zahl i definieren wir eine $\mathfrak{A}$-meßbare Majorante h'_i von h in der folgenden Weise: $h'_i=+\infty\ [\{h=+\infty\}]$, $h'_i=h+\frac{1}{i}\ [\{-\infty<h<+\infty\}]$, $h'_i=-i\ [\{-\infty=h\}]$. Die Folge $(\{h'<h'_i\})$ konvergiert monoton fallend gegen O, und daher existiert ein Index n mit $\mu(\{h'<h'_n\})<\varepsilon$. Wegen $h\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ gilt $\mu(\{h'_n<f_\sigma\})<\varepsilon$ für terminal viele σ. Aus $\{h'<f_\sigma\}\leq\{h'<h'_n\}\vee\{h'_n<f_\sigma\}$ folgt daher $\mu(\{h'<f_\sigma\})<2\varepsilon$ für terminal viele σ, d.h. $h\in\mathfrak{H}$.

3.3. *Ist* $h\in\mathfrak{H}$, *so* $\boldsymbol{K}h\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$; *ist* $g\in\mathfrak{G}$, *so* $\boldsymbol{H}g\in\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$.

Beweis. Da die Transformation $\boldsymbol{A}f=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} f$ und ihre Inverse jede $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion auf eine $\mathfrak{A}$-meßbare abbilden und mit den Operationen $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}$ vertauschbar sind, so können wir auf Grund von 2.10 annehmen, daß alle Werte der Funktionen f_σ und h im Intervall $\langle -1, 1\rangle$ liegen. Ferner genügt es, endliche Majoranten zu betrachten. Es sei also h' eine $\mathfrak{A}$-meßbare endliche Majorante von $\boldsymbol{K}h$. Zu zeigen ist

$$\lim_\sigma \mu(\{h'<f_\sigma\})=0. \tag{3.4}$$

Wir bestimmen zunächst eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion h^* mit

$$\boldsymbol{K}h<h^*<h'. \tag{3.5}$$

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{K}\{h^*<h\}=O, \tag{3.6}$$

denn in $\boldsymbol{K}\{h^*<h\}$ müßte gelten $h^*<h$, also $h^*\leq\boldsymbol{K}h$. Sodann setzen wir $h''=h+h'-h^*$. Wegen (3.5) ist h'' eine Majorante von h. Ferner gilt $\{h'<h''\}=\{h^*<h\}$, also nach (3.6):

$$\boldsymbol{K}\{h'<h''\}=O. \tag{3.7}$$

Aus $h \in \mathfrak{H}$ erhalten wir $\lim_\sigma \mu(\{h'' < f_\sigma\}) = 0$ und somit wegen (3.7) und Lemma 3.1:

$$\lim_\sigma \mu\big(\boldsymbol{K}(\{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\})\big) = 0. \tag{3.8}$$

Nun ist aber $\{h' < f_\sigma\} \leq \{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\}$ und infolgedessen, da h' und f_σ beide $\mathfrak{A}$-meßbar sind, sogar $\{h' < f_\sigma\} \leq \boldsymbol{K}(\{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\})$. Dies zusammen mit (3.8) zieht die Behauptung (3.4) nach sich.

Aus 3.2 folgt $\wedge \mathfrak{H} \leq \wedge \mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}$ und aus 3.3 die entgegengesetzte Ungleichung. Ebenso bekommen wir $\vee \mathfrak{G} = \vee \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ und damit den

Satz 3.4. *Ist jedes f_σ eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion, so stimmen die in bezug auf $\mathfrak{B}$ gebildeten stochastischen Limites von (f_σ) mit denen in bezug auf $\mathfrak{A}$ überein. Insbesondere sind diese Limites ebenfalls $\mathfrak{A}$-meßbar.*

Ein ähnlicher Satz trifft auf die Einschränkungen auf ein Element C aus $\mathfrak{B}$ zu. Wir bezeichnen das System aller B aus $\mathfrak{B}$ mit $B \leq C$ durch $C\mathfrak{B}$ und die Einschränkung einer Funktion f aus $\mathfrak{F}$ auf C durch $\boldsymbol{C}f$.

3.5. *Es ist $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma) = \boldsymbol{C}\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und $\mathfrak{G}(\boldsymbol{C}f_\sigma) = \boldsymbol{C}\mathfrak{G}(f_\sigma)$.*

Beweis. Ist $h^* \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma)$, so gehört die folgende Funktion h zu $\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und es wird $h^* = \boldsymbol{C}h$: $h = h^*[C]$ und $h = +\infty\,[E - C]$. Ist andererseits $h \in \mathfrak{H}(f_\sigma)$, so gilt $\boldsymbol{C}h \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma)$, wie eine analoge Erweiterung auf E der Majoranten von $\boldsymbol{C}h$ zeigt.

Da die Operationen $\wedge$ und $\vee$ mit $\boldsymbol{C}$ vertauschbar sind, so erhalten wir aus 3.5 den

Satz 3.6. *Die stochastischen Limites der Folge der Einschränkungen der f_σ auf C, gebildet im Raum der $C\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen über C, sind gleich den Einschränkungen auf C der stochastischen Limites von (f_σ).*

§ 4. Stochastische und Ordnungslimites

Zur Unterscheidung von den stochastischen Limites wollen wir, wie üblich, den limes inferior und superior einer Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$, definiert durch

$$\liminf_\sigma f_\sigma = \bigvee_{\tau \in \Theta} \bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma, \qquad \limsup_\sigma f_\sigma = \bigwedge_{\tau \in \Theta} \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma,$$

als *Ordnungslimites* bezeichnen. Analog, oder charakteristische Funktionen betrachtend, erhalten wir Ordnungslimites in $\mathfrak{B}$. Es ist leicht, direkt zu zeigen, daß

$$\liminf_\sigma f_\sigma \leq s\liminf_\sigma f_\sigma \leq s\limsup_\sigma f_\sigma \leq \limsup_\sigma f_\sigma, \tag{4.1}$$

doch wollen wir dies aus einer Charakterisierung der Ordnungslimites ableiten, die der der stochastischen Limites analog ist und daher beide leicht zu vergleichen erlaubt.

Es sei $\hat{\mathfrak{H}}$ die Menge aller Funktionen h aus $\mathfrak{F}$ derart, daß für jede Majorante h' von h gilt $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, und entsprechend sei $\hat{\mathfrak{G}}$ definiert.

Satz 4.1. *Es ist* $\liminf_\sigma f_\sigma = \vee \hat{\mathfrak{G}}$ *und* $\limsup_\sigma f_\sigma = \wedge \hat{\mathfrak{H}}$.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $\hat{h} = \wedge \hat{\mathfrak{H}}$, $h^* = \limsup_\sigma f_\sigma$ und

$$g_\tau = \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma .$$

Ist h' eine Majorante von h^*, so haben wir $\lim_\tau \{h' < g_\tau\} = O$, also $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, d.h. $h^* \in \hat{\mathfrak{H}}$ und daher

$$\hat{h} \leq h^* . \tag{4.2}$$

Sodann sei $h \in \hat{\mathfrak{H}}$. Bildet h' eine Majorante von h, so wird $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, d.h. $\lim_\tau \{h' < g_\tau\} = O$ und somit $h^* \leq h'$. Da dies für jede Majorante h' von h gilt, so muß sogar $h^* \leq h$ sein. Dies trifft auf jedes h aus $\hat{\mathfrak{H}}$ zu, und daher $h^* \leq \hat{h}$. Hieraus und aus (4.2) folgt die zweite der Behauptungen, und ebenso ergibt sich die erste.

Die Mengen $\hat{\mathfrak{G}}$ und $\hat{\mathfrak{H}}$ haben ebenso wie $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die durch 2.4 und 2.5 ausgedrückten Eigenschaften, und der gerade geführte Beweis zeigt, daß auch 2.6 und die Sätze 2.7 und 2.8 gelten, wenn $\mathfrak{G}$ durch $\hat{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{H}$ durch $\hat{\mathfrak{H}}$ und die stochastischen Limites durch die Ordnungslimites ersetzt werden. Nach Satz 1.1 und wegen $\{h' < g_\tau\} = \bigvee_{\tau \ll \sigma} \{h' < f_\sigma\}$ konvergiert die Folge $(\{h' < f_\sigma\})$ dann und nur dann gegen O, wenn die Folge $(\{h' < g_\tau\})$ stochastisch gegen O strebt. Wir erhalten so eine der Definition der stochastischen Limites gleichlautende Erklärung der Ordnungslimites, indem wir f_σ durch g_σ ersetzen. Zugleich ergibt sich $\hat{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathfrak{H}$ und $\hat{\mathfrak{G}} \subseteqq \mathfrak{G}$, was (4.1) nach sich zieht. Insbesondere ist jede ordnungskonvergente Folge auch stochastisch konvergent. Hieraus und aus Satz 2.12 folgt der

Satz 4.2. *Gibt es eine Funktion f in $\mathfrak{F}$, so daß jede Teilfolge von (f_σ) eine gegen f ordnungskonvergente Teilfolge enthält, so konvergiert (f_σ) stochastisch gegen f.*

§ 5. Vertauschung von Integration und stochastischem Grenzübergang

In diesem Kapitel bedeute μ ein festes strikt positives und sigma-endliches Maß. Wir betrachten die folgende Bedingung über eine Folge (f_σ) hinsichtlich μ integrierbarer Funktionen.

S. *Für jede stochastisch gegen O konvergierende Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ gilt*

$$\lim_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu = 0 . \tag{5.1}$$

Ersetzen wir (5.1) durch $\limsup_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \leq 0$ oder $\liminf_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \geq 0$, so erhalten wir zwei Bedingungen, die wir durch $\mathbf{S}^+$ und $\mathbf{S}^-$ bezeichnen wollen. $\mathbf{S}$ ist die Konjunktion von $\mathbf{S}^+$ und $\mathbf{S}^-$. Aus $f_\sigma \leq f_\sigma^+$ und $\int_{A_\sigma} f_\sigma^+ d\mu = \int_{B_\sigma} f_\sigma \, d\mu$ mit $B_\sigma = A_\sigma \{0 \leq f_\sigma\}$ folgt, daß (f_σ) dann und nur dann $\mathbf{S}^+$ erfüllt, wenn (f_σ^+) die Bedingung $\mathbf{S}$ befriedigt, und entsprechend ist die Bedingung $\mathbf{S}^-$ über (f_σ) gleichwertig mit der Bedingung $\mathbf{S}$ über (f_σ^-). Dann und nur dann trifft die Bedingung $\mathbf{S}$ auf (f_σ) zu, wenn sie auf $(|f_\sigma|)$ zutrifft.

Satz 5.1. *Es sei (f_σ) eine Folge integrierbarer Funktionen, die die Bedingung S^+ erfüllt, und es sei auch $s\limsup_\sigma f_\sigma$ integrierbar. Dann gilt für jedes Element A aus $\mathfrak{B}$*

$$\limsup_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu \leq \int_A (s\limsup_\sigma f_\sigma)\, d\mu. \tag{5.2}$$

Analog gilt unter der Voraussetzung S^-, wenn $s\liminf_\sigma f_\sigma$ integrierbar ist,

$$\int_A (s\liminf_\sigma f_\sigma)\, d\mu \leq \liminf_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu. \tag{5.3}$$

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $A = E$ zu betrachten. Zur Abkürzung setzen wir $h = s\limsup_\sigma f_\sigma$ und nehmen zunächst an, daß

$$-\infty < \int_E h \, d\mu. \tag{5.4}$$

Dann ist insbesondere $-\infty < h$, und daher existiert zu gegebenem positivem ε eine integrierbare Majorante h' von h derart, daß

$$\int_B h' \, d\mu \leq \int_B h \, d\mu + \varepsilon \tag{5.5}$$

für jedes B aus $\mathfrak{B}$ gilt. Definieren wir $A_\sigma = \{h' < f_\sigma\}$ und $B_\sigma = E - A_\sigma = \{f_\sigma \leq h'\}$, so konvergiert (A_σ) nach Satz 2.8 stochastisch gegen O. Es gibt also gemäß S^+ einen Index τ_1, so daß $\int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu < \varepsilon$ für jedes σ mit $\tau_1 \ll \sigma$. Wegen (5.4) existiert ein Index τ_2, so daß aus $\tau_2 \ll \sigma$ folgt $-\varepsilon < \int_{A_\sigma} h \, d\mu$. Im Fall $\tau_1, \tau_2 \ll \sigma$ gilt dann wegen (5.5):

$$\int_E f_\sigma \, d\mu = \int_{B_\sigma} f_\sigma \, d\mu + \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \leq \int_{B_\sigma} h' \, d\mu + \varepsilon \leq \int_{B_\sigma} h \, d\mu + 2\varepsilon \leq \int_E h \, d\mu + 3\varepsilon,$$

womit (5.2) bewiesen ist.

Wir können nun die Voraussetzung (5.4) wie im Fall der Ordnungslimites durch das geläufige Verfahren beseitigen, das darin besteht, die Funktionen $f_\sigma \vee g_n$ zu betrachten, wobei (g_n) eine monoton fallend gegen $-\infty$ konvergierende Fréchetsche Folge summierbarer negativer Funktionen darstellt (vgl. z. B. [7], S. 230).

Ein Beispiel von AMERIO ([4], S. 14) zeigt, daß im Satz 5.1 die Voraussetzung, $s\limsup_\sigma f_\sigma$ sei integrierbar, sogar im Fall einer Fréchetschen Folge selbst dann nicht aus S abgeleitet werden kann, wenn die f_σ gleichmäßig beschränkte unbestimmte Integrale haben, d.h. wenn die Menge aller $\int_A f_\sigma \, d\mu$ mit $A \in \mathfrak{B}$ und $\sigma \in \Theta$ beschränkt ist. In diesem Beispiel ist $s\limsup_\sigma f_\sigma = \limsup_\sigma f_\sigma$. Ganz entsprechend dem Fall des Ordnungslimes und auf gleichem Wege mit Hilfe des Satzes 5.1 beweisbar (cf. [10], S. 445–446) gilt jedoch der

Satz 5.2. *Ist (f_σ) eine stochastisch konvergente Folge integrierbarer Funktionen und sind die unbestimmten Integrale der f_σ nach oben oder unten beschränkt, so wird $f = s\lim_\sigma f_\sigma$ gleichfalls integrierbar und $\int_E f \, d\mu < +\infty$ bzw. $-\infty < \int_E f \, d\mu$.*

Zum Vergleich wollen wir auch dem Satz 5.1 den entsprechenden Satz über Ordnungslimites gegenüberstellen. Wir sagen, die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen erfülle die Bedingung $\boldsymbol{T}$, wenn folgendes eintritt:

$\boldsymbol{T}$. *Für jede gegen O konvergierende Folge* (A_σ) *in* $\mathfrak{B}$ *gilt* (5.1).

Analog sind $\boldsymbol{T}^+$ und $\boldsymbol{T}^-$ definiert.

Mit Hilfe des Satzes 4.1 läßt sich nun der folgende Satz ebenso wie der Satz 5.1 beweisen.

Satz 5.3. *Es sei* (f_σ) *eine Folge integrierbarer Funktionen, die die Bedingung* $\boldsymbol{T}^+$ *erfüllt, und es sei auch* $\limsup_\sigma f_\sigma$ *integrierbar. Dann gilt für jedes Element A aus* $\mathfrak{B}$

$$\limsup_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu \leq \int_A (\limsup_\sigma f_\sigma) \, d\mu . \tag{5.6}$$

Analog gilt unter der Voraussetzung $\boldsymbol{T}^-$, *wenn* $\liminf_\sigma f_\sigma$ *integrierbar ist,*

$$\int_A (\liminf_\sigma f_\sigma) \, d\mu \leq \liminf_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu . \tag{5.7}$$

Offenbar folgt $\boldsymbol{T}^+$ aus $\boldsymbol{S}^+$ und $\boldsymbol{T}^-$ aus $\boldsymbol{S}^-$, der Tatsache entsprechend, daß (5.6) wegen (4.1) schwächer als (5.2) und (5.7) schwächer als (5.3) ist. Die Ungleichungen (5.6) und (5.7), seit langem im Fall Fréchetscher Folgen mit summierbaren Limites und gleichmäßig totalstetigen unbestimmten Integralen bekannt ([9], S. 199), wurden in [7], S. 229 für Moore-Smithsche Folgen (f_σ) mit integrierbaren Limites bewiesen, deren unbestimmte Integrale terminal gleichmäßig totalstetig sind, d.h., kurz ausgedrückt, $\lim_{A,\sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu = 0$ im Sinne eines doppelten Grenzwertes, wenn A stochastisch gegen O strebt. Diese Bedingung zieht $\boldsymbol{S}$ und damit auch $\boldsymbol{T}$ nach sich, doch gilt das Umgekehrte selbst dann nicht, wenn die unbestimmten Integrale der f_σ gleichmäßig beschränkt sind. In der Tat ist $\boldsymbol{S}$ trivialerweise immer dann erfüllt, wenn in jeder gegen Null konvergenten Folge $(\alpha_\sigma; \sigma \in \Theta)$ reeller Zahlen terminal viele α_σ verschwinden, wie z.B. im Fall einer linear geordneten Indexmenge Θ, die keine abzählbare konfinale Menge enthält. Das folgende Beispiel zeigt, daß selbst dann nicht jede Folge (f_σ) mit gleichmäßig beschränkten unbestimmten Integralen auch terminal gleichmäßig totalstetige unbestimmte Integrale zu haben braucht.

$\mathfrak{B}$ sei die Maßalgebra der im LEBESGUEschen Sinne meßbaren Teilmengen des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$ modulo der Nullmengen und μ das reduzierte LEBESGUEsche Maß auf $\mathfrak{B}$, doch werden wir der Bequemlichkeit halber die Reduktion modulo der Nullmengen nicht konsequent durchführen. Ψ bedeute eine linear geordnete Menge, in der es keine abzählbare konfinale Menge gibt, und für jedes ξ aus Ψ sei $\Theta_\xi = \langle 0, 1 \rangle$. Es bilde Θ die geordnete Summe der Θ_ξ, d.h. die Menge aller Paare (δ, ξ) mit $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$ und $\xi \in \Psi$, versehen mit der folgenden Ordnung: ist $\xi_1 = \xi_2$, so sei $(\delta_1, \xi_1) \ll (\delta_2, \xi_2)$ gleichbedeutend mit $\delta_1 \leq \delta_2$; ist $\xi_1 \ll \xi_2$, so gelte $(\delta_1, \xi_1) \ll (\delta_2, \xi_2)$ für jedes δ_1 und δ_2. Zu jedem $\sigma = (\delta, \xi)$ in Θ definieren wir $f_\sigma(x) = \delta^{-1}$, wenn $0 \leq x \leq \delta$, und $f_\sigma(x) = 0$, wenn $\delta < x \leq 1$. Dann ist $0 \leq \int_A f_\sigma \, d\mu = \delta^{-1} \mu(A\langle 0, \delta \rangle) \leq 1$, d.h. die f_σ haben

gleichmäßig beschränkte unbestimmte Integrale. Da in Θ keine abzählbare konfinale Menge existiert, ist auch S erfüllt. Hingegen gilt $\int_D f_\sigma \, d\mu = 1$ und $\mu(D) = \delta$ mit $D = \langle 0, \delta \rangle$ für jedes σ der Form (δ, ξ), und die Menge dieser Indizes ist bei festem δ konfinal in Θ, d.h. die unbestimmten Integrale der f_σ sind nicht terminal gleichmäßig totalstetig.

Übrigens sind im Fall einer Fréchetschen Folge summierbarer Funktionen f_n die Bedingungen S und T einander und der terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit, der gleichmäßigen Totalstetigkeit und der gleichmäßigen Additivität der Folge der unbestimmten Integrale der f_n äquivalent.

Wie bei den Ordnungslimites (cf. [8], 3.3 und 3.5) erhalten wir schließlich aus Satz 5.1 den

Satz 5.4. *Erfüllt die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen die Bedingung S^+, ist $s \lim\sup_\sigma f_\sigma$ summierbar und gilt in (5.2) das Gleichheitszeichen im Fall $A = E$, so gilt es mit jedem A aus $\mathfrak{B}$. Unter entsprechenden Voraussetzungen trifft in (5.3) stets das Gleichheitszeichen zu.*

Konvergiert die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen stochastisch gegen eine summierbare Funkion f und ist $\int_E |f| \, d\mu = \lim\inf_\sigma \int_E |f_\sigma| \, d\mu$, so wird $\int_A f^+ \, d\mu = \lim\inf_\sigma \int_A f_\sigma^+ \, d\mu$ und $\int_A f^- \, d\mu = \lim\inf_\sigma \int_A f_\sigma^- \, d\mu$ für jedes A aus $\mathfrak{B}$.

§ 6. Stochastische Konvergenz von Semimartingalen

Wiederum bedeute μ ein strikt positives und sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Es sei $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ eine monoton wachsende Folge von Booleschen sigma-Unteralgebren von $\mathfrak{B}$, d.h. $\tau \ll \sigma$ ziehe $\mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{B}_\sigma$ nach sich. Eine Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$ heiße ein *Semimartingal* mit der *Basis* $(\mathfrak{B}_\sigma)$[6]), wenn f_σ meßbar in bezug auf $\mathfrak{B}_\sigma$ und integrierbar über E ist und wenn aus $\tau \ll \sigma$ und $A \in \mathfrak{B}_\tau$ folgt $\int_A f_\tau \, d\mu \leq \int_A f_\sigma \, d\mu$. Gilt hier stets das Gleichheitszeichen, so nennen wir (f_σ) ein *Martingal* mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$. Wir werden jedoch den Zusatz „mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$" im folgenden meist fortlassen, weil wir fast immer nur eine feste Basis betrachten wollen. Eine Ordnungsrelation $(f_\sigma) \leq (g_\sigma)$ zwischen Semimartingalen ist dann durch „$f_\sigma \leq g_\sigma$ für jedes σ in Θ" definiert, entsprechend der Begriff eines positiven oder negativen Semimartingals durch $0 \leq f_\sigma$ oder $f_\sigma \leq 0$ für jedes σ, und die Summe von (f_σ) und (g_σ) durch $(f_\sigma + g_\sigma)$, soweit sinnvoll.

Ein Semimartingal (f_σ) heiße von *beschränkter Variation*, wenn es eine terminale Menge Δ in Θ gibt, so daß die Menge aller $\int_E |f_\sigma| \, d\mu$ mit $\sigma \in \Delta$ beschränkt bleibt. Ersetzen wir $|f_\sigma|$ durch f_σ^- oder f_σ^+, so erhalten wir die Definition eines Semimartingals von beschränkter Variation „nach unten" oder „nach oben". Im letzten Fall können wir übrigens stets $\Delta = \Theta$ wählen, und dies gilt in allen drei Fällen, wenn (f_σ) ein Martingal ist.

[6]) Die Bezeichnung „Basis", einem Vorschlag von Herrn CHR. PAUC folgend, in Analogie zu einer „Ableitungsbasis" in der Theorie der Differentiation.

Die beiden folgenden Sätze wurden in [8], 4.1 und 4.4 bewiesen.

Satz 6.1. *Es sei (f_σ) ein Semimartingal, und es gebe einen Index ϱ derart, daß $-\infty < \int_E f_\varrho \, d\mu$. Für jeden Index τ bedeute $\tilde{f}_\tau$ den $\mathfrak{B}_\tau$-meßbaren* RADON-NIKODÝMschen *Integranden der in $\mathfrak{B}_\tau$ durch $\lim_{\tau \ll \sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu = \bigvee_{\tau \ll \sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu$ definierten abzählbar additiven Funktion von A. Dann bildet $(\tilde{f}_\sigma)$ das kleinste unter allen Martingalen, die größer oder gleich (f_σ) sind. Ist (f_σ) von beschränkter Variation nach oben oder unten, so auch $(\tilde{f}_\sigma)$.*

Satz 6.2. *Jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder nach unten ist die Differenz zweier positiver Martingale.*

Dem Beweis des Konvergenzsatzes dienen die folgenden Lemmata.

Lemma 6.3. *Es sei $(-f_i; i = 1, \ldots, r)$ ein negatives Semimartingal, β eine endliche reelle Zahl und $K = \{\beta < \bigvee_{i=1}^{r} f_i\}$. Dann gilt $\beta \mu(K) \leq \int_E f_1 \, d\mu$.*

Im Fall summierbarer f_i folgt dieses Lemma aus [3], S. 314, (3.4''), und der Beweis, der sich auf [3], S. 300, Theorem 2.1 stützt, bleibt ebenso wie der Beweis dieses Theorems im Fall unendlicher Integrale der f_i unverändert.

Lemma 6.4. *Es sei $A \in \mathfrak{B}$, $\mu(A) < +\infty$, $\zeta \in \Theta$ und (K_σ) eine Folge in $\mathfrak{B}$ derart, daß für jedes B mit $0 < B \leq A$ gilt*

$$\limsup_\sigma \mu(B K_\sigma) > 0. \tag{6.1}$$

Dann gibt es eine Fréchetsche Folge (ξ_i) in Θ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \xi_3 \ll \cdots$ und $A \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}$.

Beweis (vgl. ähnliche Überlegungen in [5], S. 207). Für jedes B mit $B \leq A$ definieren wir $v(B) = \limsup_\sigma \mu(B K_\sigma)$. Aus $B \leq C \leq A$ folgt $v(B) \leq v(C)$, und voraussetzungsgemäß ist $v(B) = 0$ gleichwertig mit $B = O$. Sodann sei $B_1 = A$. Ist $B_1 = O$, so bleibt nichts zu beweisen. Andernfalls bestimmen wir einen Index ξ_1 mit $\zeta \ll \xi_1$ und $v(B_1) < 2\mu(B_1 K_{\xi_1})$. Die Folge (ξ_i) induktiv konstruierend nehmen wir nun an, Indizes $\xi_1, \ldots, \xi_r$ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \cdots \ll \xi_r$ seien gefunden derart, daß

$$v(B_i) < 2\mu(B_i K_{\xi_i}), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{6.2}$$

wobei $B_i = A - A(K_{\xi_1} \vee \cdots \vee K_{\xi_{i-1}})$. Es sei $B_{r+1} = A - A(K_{\xi_1} \vee \cdots \vee K_{\xi_r})$. Ist $B_{r+1} = O$, so sind wir bereits fertig; andernfalls gibt es einen Index ξ_{r+1} mit $\xi_r \ll \xi_{r+1}$ und $v(B_{r+1}) < 2\mu(B_{r+1} K_{\xi_{r+1}})$. Es bleibt der Fall zu betrachten, daß dieses Verfahren nicht abbricht. Da die Elemente $B_i K_{\xi_i}$ paarweise fremd und Teile von A sind, so folgt aus $\mu(A) < +\infty$, daß $\lim_i \mu(B_i K_{\xi_i}) = 0$, d.h. wegen (6.2) auch $\lim_i v(B_i) = 0$ und somit $v(\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$, also $\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i = O$ ist. Nun gilt aber $\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i = A - A \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}$, und damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 6.5. *Jedes Semimartingal von beschränkter Variation konvergiert stochastisch. Im Fall eines Martingals genügt bereits die Annahme beschränkter Variation nach oben oder unten.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 6.1 läßt sich jedes Semimartingal (f_σ) von beschränkter Variation für terminal viele σ in der Gestalt $f_\sigma = \tilde{f}_\sigma + (f_\sigma - \tilde{f}_\sigma)$ schreiben, wobei $\tilde{f}_\sigma$ ein Martingal von beschränkter Variation und $f_\sigma - \tilde{f}_\sigma$ ein negatives Semimartingal darstellt. Nach Satz 6.2 ist jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder nach unten die Differenz zweier positiver, also auch zweier negativer Martingale. Es genügt daher, die stochastische Konvergenz einer Folge (f_σ) mit $0 \leq f_\sigma$ zu beweisen, wobei $(-f_\sigma)$ ein Semimartingal darstellt.

Wir nehmen an, (f_σ) konvergiere nicht stochastisch. Es sei $\mathfrak{B}_\infty$ die kleinste Boolesche sigma-Unteralgebra von $\mathfrak{B}$, die jedes $\mathfrak{B}_\sigma$ enthält. Nach Satz 3.4 gibt es ein von O verschiedenes Element A aus $\mathfrak{B}_\infty$ mit $\mu(A) < +\infty$ und zwei positive endliche Zahlen α und β derart, daß $s\liminf_\sigma f_\sigma < \alpha < \beta < s\limsup_\sigma f_\sigma\ [A]$. Für jedes Element B mit $O < B \leq A$ ist dann nach 3.5:

$$\limsup_\sigma \mu(B\{f_\sigma < \alpha\}) > 0, \quad \limsup_\sigma \mu(B\{\beta < f_\sigma\}) > 0. \tag{6.3}$$

Insbesondere gilt

$$\eta = 2^{-1}\limsup_\sigma \mu(A\{f_\sigma < \alpha\}) > 0. \tag{6.4}$$

Es sei nun $0 < \varepsilon < 1$. Wegen $A \in \mathfrak{B}_\infty$ existieren ein Index ϱ und ein Element C aus $\mathfrak{B}_\varrho$ mit

$$\mu(A + C) < \varepsilon\eta, \tag{6.5}$$

wobei $+$ die symmetrische Differenz bedeutet. Sodann gibt es wegen (6.4) einen Index ζ mit $\varrho \ll \zeta$ und

$$\mu(A\{f_\zeta < \alpha\}) > \eta. \tag{6.6}$$

Definieren wir $L = C\{f_\zeta < \alpha\}$, so ist

$$L \in \mathfrak{B}_\zeta, \quad f_\zeta < \alpha\,[L]. \tag{6.7}$$

Ferner gilt

$$\mu(LA) > (1 - \varepsilon)\,\mu(L). \tag{6.8}$$

In der Tat: setzen wir $\delta = \mu(A\{f_\zeta < \alpha\})$, $\delta_1 = \mu\big((A - AC)\{f_\zeta < \alpha\}\big)$ und $\delta_2 = \mu\big((C - CA)\{f_\zeta < \alpha\}\big)$, so wird $\mu(L) = \delta - \delta_1 + \delta_2$ und $\mu(LA) = \delta - \delta_1$. Nach (6.5) und (6.6) ist $\delta_1 < \varepsilon\delta$ und $\delta_2 < \varepsilon\delta$, also

$$\frac{\delta - \delta_1 + \delta_2}{\delta - \delta_1} = 1 + \frac{\delta_2}{\delta - \delta_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

d.h. (6.8).

Aus der zweiten Ungleichung (6.3) und dem Lemma 6.4 ergibt sich nun die Existenz einer Fréchetschen Folge (ξ_i) in Θ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \xi_3 \ll \cdots$ und

$A \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} \{\beta < f_{\xi_i}\}$. Daher gibt es eine natürliche Zahl r derart, daß das Element

$$K = L \bigvee_{i=1}^{r} \{\beta < f_{\xi_i}\} = L\{\beta < \bigvee_{i=1}^{r} f_{\xi_i}\} \tag{6.9}$$

die Ungleichung $\mu(AL - AK) < \varepsilon\, \mu(AL)$ erfüllt. Zusammen mit (6.8) und $\mu(K) \geq \mu(AK)$ bedeutet dies

$$\mu(K) > (1-\varepsilon)^2 \mu(L). \tag{6.10}$$

Wegen (6.7) und $\zeta \ll \xi_1 \ll \cdots \ll \xi_r$ bilden die auf L eingeschränkten Funktionen $-f_{\xi_1}, \ldots, -f_{\xi_r}$ ein negatives Semimartingal. Aus dem Lemma 6.3 und aus (6.9) folgt daher $\beta\mu(K) \leq \int_L f_{\xi_1}\, d\mu$. Aus der Definition eines Semimartingals und aus $\zeta \ll \xi_1$ und (6.7) erhalten wir weiter

$$\int_L f_{\xi_1}\, d\mu \leq \int_L f_\zeta\, d\mu \leq \alpha\, \mu(L),$$

d.h. $\beta\mu(K) \leq \alpha\, \mu(L)$, also nach (6.10): $\beta(1-\varepsilon)^2 < \alpha$. Dies widerspricht $\alpha < \beta$, wenn ε hinreichend klein ist, und damit ist der Konvergenzsatz bewiesen.

Ein System gleichwertiger Bedingungen dafür, daß neben der stochastischen Konvergenz auch Konvergenz der unbestimmten Integrale vorliegt, läßt sich nun mit Hilfe der Sätze 5.1, 5.2 und 5.4 ganz ähnlich wie in [8], 8.2 und 8.3 aufstellen und beweisen, nach dem Muster des Falls der Fréchetschen Folgen in [3], S. 319 und 325. Die hiermit zusammenhängende Frage der Fortsetzbarkeit eines Martingals $(f_\sigma; \sigma \in \Theta)$ mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ zu einem Martingal $(f_\sigma; \sigma \in \Theta \cup \{\infty\})$ mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta \cup \{\infty\})$, wobei ∞ ein auf alle Elemente von Θ folgendes von ihnen verschiedenes Element und $\mathfrak{B}_\infty$ die kleinste alle $\mathfrak{B}_\sigma$ enthaltende Boolesche sigma-Algebra bedeute, wurde schon von BOCHNER ([1], S. 164) berührt. Das ebenfalls hierbei auftretende Problem der Konvergenz im Sinne des Raums L^p wurde von HELMS in [6] behandelt.

§ 7. Ordnungskonvergenz von Semimartingalen

In [8] wurde gezeigt, daß ein Martingal von beschränkter Variation nach oben oder unten nicht nur stochastisch, sondern sogar ordnungskonvergent ist, wenn die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ ein „Vitalisches" Axiom V_0 erfüllt. Im Fall der Semimartingale ließ sich nur eine schwächere Behauptung beweisen ([8], 9.1). Es führt jedoch eine geeignete Verschärfung von V_0 auch zur Ordnungskonvergenz von Semimartingalen.

Eine Folge $(K_\sigma; \sigma \in \Theta)$ in $\mathfrak{B}$ heiße wie in [8] eine *feine Überdeckung* eines Elementes A von $\mathfrak{B}$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

Für jedes σ gilt $K_\sigma \in \mathfrak{B}_\sigma$, und für jede terminale Menge Δ in Θ ist

$$A \leq \bigvee \{K_\sigma; \sigma \in \Delta\}.$$

Wir sagen, die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$ habe die Vitalische Eigenschaft V', wenn folgendes zutrifft:

V'. Bildet (K_σ) eine feine Überdeckung eines Elementes A endlichen Maßes und ε eine positive Zahl, so gibt es eine endliche Indexmenge $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ in Θ mit $\mathfrak{B}_{\xi_1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{B}_{\xi_r}$ und $\mu(A - A \bigvee_{i=1}^{r} K_{\xi_r}) < \varepsilon$.

Wie im Fall von V_0 läßt sich beweisen, daß sich an der Gültigkeit von V' beim Übergang von einem zu einem anderen strikt positiven sigma-endlichen Maß μ nichts ändert. Der Beweis des Satzes 6.2 in [8] zeigt unmittelbar, daß V_0 aus V' folgt und daß V' sicher dann eintritt, wenn die Menge aller $\mathfrak{B}_\sigma$ durch $\subseteq$ linear geordnet ist, wie z.B. in dem Fall, daß Θ durch $\ll$ linear geordnet ist. V' gilt ferner auch immer dann, wenn $\mathfrak{B}$ rein atomistisch ist[7]), und dies zeigt, daß die Bedingung, es gebe eine terminale Menge Δ in Θ, so daß die Menge aller $\mathfrak{B}_\sigma$ mit $\sigma \in \Delta$ durch $\subseteq$ linear geordnet sei, keineswegs notwendig für V'' ist.

Satz 7.1. *Erfüllt die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$ das Vitalische Axiom V'', so ist jedes Semimartingal von beschränkter Variation ordnungskonvergent.*

Der Beweis besteht in einer direkten Kombination des Beweises des Satzes 8.1 in [8] mit dem des Satzes 6.5 der vorliegenden Arbeit: Man beginne wie in [8], wende statt V_0 das Axiom V'' an und benutze schließlich wie im gegenwärtigen Satz 6.5 das DOOBsche Lemma 6.3.

Literatur

[1] BOCHNER, S.: Partial ordering in the theory of martingales. Ann. of Math., Ser. II **62**, 162—169 (1955). — [2] CARATHÉODORY, C.: Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs. Sitzgsber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1938**, 27—69. — [3] DOOB, J. L.: Stochastic processes. New York 1953. — [4] FICHERA, G.: Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale. Portugaliae Math. **4**, 1—20 (1943). — [5] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, III. 2. Aufl. Berlin 1955. — [6] HELMS, L. L.: Thesis. Purdue University, Lafayette, Ind., 1956. — [7] KRICKEBERG, K.: Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration. Sitzgsber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1955**, 217—279. — [8] KRICKEBERG, K.: Convergence of martingales with a directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 313—337 (1956). — [9] PICONE-VIOLA: Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione. Manuali Einaudi. 1952. — [10] DE LA VALLÉE POUSSIN, C.: Sur l'intégrale de Lebesgue. Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 435—501 (1915). — [11] WECKEN, F.: Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen. Math. Z. **45**, 377—404 (1939).

[7]) In diesem Fall folgt übrigens die Ordnungskonvergenz direkt aus der stochastischen.

Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, Wis. (USA)

(Eingegangen am 24. Juli 1956)

Bose, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 487—489 (1957)

A note concerning some properties of the Maximum Function of a Meromorphic Function

By
S. K. Bose

In a paper [1], I have stated the following theorems:

Theorem I. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, then*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_1(r)}{r^{\varrho}},$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ;

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_2(r)}{r^{\varrho}},$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ.

Theorem II. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(1<\varrho_1<\varrho<\infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=0,$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1.

Theorem III. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, and $f_1(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,0)}<\infty;$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ and $P(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Shah and Singh [2] have constructed counter-examples for each of the above theorems. The reason is that the conditions imposed on these theorems are not sufficient. In the proof of these theorems, I have assumed, under the conditions imposed on theorems I and III,

$$(\alpha)\qquad \frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)}\to 0 \quad \text{as } r\to\infty,$$

where $m_2(r)$ is the minimum modulus of $P(z)$ for $|z|=r$ and $M_1(r)=\max_{|z|=r}|f_1(z)|$.

In theorem II, I have assumed

$$(\beta)\qquad \frac{\log m_2(r)}{r^{\varrho}}\to 0 \quad \text{as } r\to\infty.$$

These steps are faulty, as can easily be seen from the results of Hayman [3], in the case of meromorphic functions of order ϱ, and $f_1(z)$ and $P(z)$ are also of order ϱ. But these steps do hold good, if we impose another set of conditions, and so I have re-enunciated these theorems as follows:

Theorem A. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(<\infty)$, then*

(i) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S^*(r)}{r^\varrho}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_1(r)}{r^\varrho},$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ and $P(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth.

(ii) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S^*(r)}{r^\varrho}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_2(r)}{r^\varrho},$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ and $f_1(z)$ is of regular growth and of order less than ϱ.

Theorem B. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(\varrho_1<\varrho<\infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{r^\varrho}=0,$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1, $P(z)$ is of regular growth and its genus is $\varrho-1$.

Theorem C. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(<\infty)$, $f_1(z)$ is also of order ϱ and $P(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,0)}<\infty.$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ, $P(z)$ is also of order ϱ, and $f_1(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Now, we can justify the step (α) as follows:

If $M_2(r)$ is the maximum modulus of $P(z)$, then [3]

$$\frac{\log m_2(r)}{\log M_2(r)}=\sigma(r),$$

and

$$\frac{\log M_1(r)}{\log M_2(r)}=\varphi(r)=O(r^\alpha),$$

$\alpha>0$, for $f_1(z)$ is of order greater than $P(z)$, and $M_1(r)=\max_{|z|=r}|f_1(z)|$, therefore

$$\frac{\sigma(r)}{\varphi(r)}=O(r^{-\alpha})\to 0 \quad \text{as } r\to\infty.$$

Steps similar to this can be justified in the proofs of Theorem I (ii) and Theorem III (i) and (ii) in the same manner.

In the proof of Theorem II, I have assumed

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log m_2(r)}{r^\varrho} = 0.$$

Now, this follows easily if we note the following: Under the new set of conditions imposed on the theorem, we have [3]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log m_2(r)}{\log M_2(r)} = k,$$

where k is a constant, and [4]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^\varrho} = 0,$$

if the genus of the canonical product $P(z)$ is $\varrho - 1$.

References

[1] Bose, S. K.: Math. Z. **56**, 223—226 (1952). — [2] Shah, S. M., and S. K. Singh: Mathematics Student **22**, 121—128 (1954). — [3] Hayman, W. K.: Proc. London Math. Soc. **2**, 469—512 (1952). — [4] Valiron, G.: Theory of Integral Functions, p. 56. 1923.

Lucknow (India), Department of Mathematics, Lucknow University

(Eingegangen am 21. Dezember 1954)

LOMNICKI, Z. A., and S. K. ZAREMBA
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 490—494 (1957)

A further instance of the Central Limit Theorem for dependent random variables

By

Z. A. LOMNICKI and S. K. ZAREMBA

The principal extension of the Central Limit Theorem to dependent variables obtained so far applies to systems of random variables which have been called m-dependent (cf. [4], [2], [6]). The present note is an attempt at a generalization going in a slightly different direction, and is based on a completely different method. The case treated here solves, in particular, a problem of Mathematical Statistics, and it is hoped that the device introduced in the proof of Proposition 2 may be helpful in proving other theorems of a similar character.

Proposition 1. Let $\xi_{i,k}$ $(i=1, 2, \ldots; k=i+1, i+2, \ldots)$ be random variables subject to the following conditions:

(i) If any two finite sets of variables $\xi_{i,k}$ have the property that no value taken by either index of any element of one set appears among the values of the indices of the elements of the other set, then these two sets are mutually independent;

(ii) $E(\xi_{i,k})=0$ and $E(\xi_{i,k}^2)=\mu_2$ $(i=1, 2, \ldots; k=i+1, i+2, \ldots)$, μ_2 being a constant;

(iii) $E(\xi_{i,k}\,\xi_{i,j}) = E(\xi_{i,j}\,\xi_{k,j}) = c$ $(i=1, 2, \ldots;\ k=i+1, i+2, \ldots;$ $j=k+1, k+2, \ldots)$, c being, again, a constant;

(iv) The random variables $\xi_{i,k}$ have collectively bounded moments up to some order m.

Furthermore, let

$$\bar{\xi}_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \xi_{i,k}.$$

Then assuming $n \leq m$,

$$\lim_{N\to\infty} N^{n/2} E(\bar{\xi}_N^n) = \begin{cases} 2^{n/2} \cdot n!\, c^{n/2}/(n/2)! & \text{when } n \text{ is even;} \\ 0 & \text{when } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{1}$$

Proof. It is convenient to make $\xi_{i,i}=0$ and $\xi_{i,k}=\xi_{k,i}$ for any i and k. Then

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{i,k},$$

and

$$N^{n/2}\bar{\xi}_N^n = \frac{1}{N^{n/2}(N-1)^n} \sum_{i(1),\ldots,i(n)=1}^{N} \sum_{k(1),\ldots,k(n)=1}^{N} \prod_{\nu=1}^{n} \xi_{i(\nu),k(\nu)}. \tag{2}$$

We can attempt to decompose each term of this multiple sum into as many independent factors as possible, and it is easy to see that the number of different values of the indices in any of these factors cannot exceed its degree in the ξ's by more than 1. Hence, if a term of (2) is decomposed into γ independent factors, it contains at most $n+\gamma$ different values of the indices. Therefore, the number of terms which cannot be decomposed into more than γ factors is $O(N^{n+\gamma})$, and since the expectations of these terms have a common upper and lower bound according to (iv), their total contribution to $N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n)$ is $O(N^{\gamma-n/2})$.

But whenever a term contains an independent factor composed of one ξ only, its expectation is 0 according to (ii). Thus only terms with $\gamma \leq n/2$ need to be considered. If n is odd, this entails $\gamma \leq (n-1)/2$, so that the whole sum is $O(N^{-\frac{1}{2}})$, which shows that the proposition holds when n is odd.

If n is even, the total contribution of all the terms with $\gamma < n/2$ is $O(N^{-1})$. Among the factors of the terms with $\gamma = n/2$, those which are squares of ξ's contain only two different values of the indices each, so that the number of terms containing squares is $O(N^{3n/2-1})$, and their total contribution to $N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n)$ is again $O(N^{-1})$.

Finally, we are left with products whose $n/2$ independent factors are each a product of two ξ's with exactly one index value in common. But, clearly, there are $n!/[(n/2)!\,2^{n/2}]$ ways of grouping n ξ's into $n/2$ pairs, while in each pair there can be 4 combined positions of the common index value. Thus the number of possible patterns of identification of the indices in the terms under consideration is

$$\frac{4^{n/2}\cdot n!}{(n/2)!\,2^{n/2}} = \frac{2^{n/2}\cdot n!}{(n/2)!}.$$

To any of these patterns there correspond $N^{[3n/2]}$ systems of values of the indices, and since the expectation of any of the terms under consideration is $c^{n/2}$, we find, in view of what was said of the other types of term in (2),

$$N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n) = \frac{N^{[3n/2]}}{N^{n/2}(N-1)^n} \cdot \frac{2^{n/2}\cdot n!\,c^{n/2}}{(n/2)!} + O(N^{-1})$$

when n is even. Hence the proposition holds in both cases.

Proposition 2. Under the assumptions (i), (ii) and (iii) of Proposition 1, if, moreover, the probability integrals representing $E(\xi_{i,k}^2)$ converge uniformly with respect to i and k, the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tends to a normal distribution with a zero mean and a variance $4c$.

Proof. If $\{\xi_{i,k}\}$ have collectively bounded moments of every order, this is an immediate consequence of the fact that, according to (1), all the moments of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tend, with $N\to\infty$, to those of the normal distribution specified above (cf. e.g. [8], [3]). The general case can be dealt with by means of the following device: Make

$$u_{i,k,N}=\begin{cases}\xi_{i,k} & \text{if } |\xi_{i,k}|\leq \log N;\\ 0 & \text{otherwise;}\end{cases}$$

and define $\eta_{i,k,N}$ and $\zeta_{i,k,N}$ by

$$(3)\qquad \begin{cases}\eta_{i,k,N}=u_{i,k,N}-E(u_{i,k,N});\\ \zeta_{i,k,N}=\xi_{i,k}-\eta_{i,k,N}.\end{cases}$$

According to these definitions, clearly

$$(4)\qquad E(\eta_{i,k,N})=E(\zeta_{i,k,N})=0 \qquad (N,\ i=1,2,\ldots;\ k=i+1,i+2,\ldots).$$

Moreover, as a result of the additional assumption introduced in Proposition 2,

$$(5)\qquad \lim_{N\to\infty}E(\eta_{i,k,N}^2)=\mu_2 \quad \text{and} \quad \lim_{N\to\infty}E(\zeta_{i,k,N}^2)=0,$$

both uniformly in i and k. In view of

$$E(\eta_{i,k,N}\eta_{i,j,N})=E(\xi_{i,k}\xi_{i,j})-E(\xi_{i,k}\zeta_{i,j,N})-E(\zeta_{i,k,N}\xi_{i,j})+E(\zeta_{i,k,N}\zeta_{i,j,N}),$$

and owing to the SCHWARZ Inequality, it follows that

$$(6)\qquad \lim_{N\to\infty}E(\eta_{i,k,N}\eta_{i,j,N})=c \ \text{ uniformly in } \ i,j,k \ \text{ for } \ k,j>i;\ k\neq j.$$

Finally, it should be noted that, for any given N, each of the two sets of random variables $\{\eta_{i,k,N}\}$ and $\{\zeta_{i,k,N}\}$ has the properties of independence corresponding to (i).

If

$$\bar{\eta}_N=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N}\eta_{i,k,N} \quad \text{and} \quad \bar{\zeta}_N=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N}\zeta_{i,k,N},$$

we have

$$(7)\qquad N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N=N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N+N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N,$$

and $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$ has finite moments of every order. These moments can be computed in the same way as those of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ in the proof of Proposition 1, the main difference being that the higher moments of $\eta_{i,k,N}$ are no longer independent of N. However, clearly,

$$|E(\eta_{i,k,N}^n)| \leq (2\log N)^n$$

for any i, k, N, and n, so that the terms which previously were $O(N^{-\frac{1}{2}})$ and $O(N^{-1})$ are now $O[(\log N)^n N^{-\frac{1}{2}}]$ and $O[(\log N)^n N^{-1}]$ respectively, and, therefore, still tend to 0 with $N \to \infty$. In the main parts of the even moments, the expectation of each term, while not exactly equal to $c^{n/2}$, tends uniformly to this value, owing to (6). Thus (1) still holds for every n if, in the left-hand side, $\bar{\eta}_N$ is substituted for $\bar{\xi}_N$. Hence the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$ tends to the required normal distribution when $N \to \infty$.

But var $N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N$ can be computed in the same way as var $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$, the only difference being that, for the terms whose expectation was c, we have to substitute terms whose expectation tends uniformly to 0 according to (5). Consequently,

$$\lim_{N\to\infty} N E(\bar{\zeta}_N^2) = 0,$$

so that

$$\mathrm{p}\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N = 0.$$

Owing to (7), and according to a theorem given by CRAMÉR ([1]; cf. Section 20.6), it follows that the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tends to the same limit as that of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$. Hence the proof is complete.

Given a random sample $x_1, \ldots, x_N$ of a population, the expression

$$g_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} |x_i - x_k|$$

is known as GINI's mean difference. If we make

$$|x_i - x_k| - E(|x_i - x_k|) = \xi_{i,k},$$

we have $g_N - E(g_N) = \bar{\xi}_N$, and if the x's have finite second moments, the conditions of Proposition 2 are obviously satisfied, so that g_N is asymptotically normally distributed. For the values of $E(g_N)$ and var g_N see [7], simplified in [5].

The authors are very grateful to Mr. J. D. NORTH, Chairman and Managing Director of their firm, for creating an atmosphere in which this kind of work was possible, and for giving his permission to publish the present note.

References

[1] CRAMÉR, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton: University Press 1946. — [2] DIANANDA, P. H.: Some probability limit theorems with statistical applications. Proc. Cambridge Philos. Soc. **49**, 239—246 (1953). — [3] FRÉCHET, M., and J. SHOHAT: A proof of the generalized second-limit theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 533—543 (1931). — [4] HOEFFDING, W., and H. ROBBINS: The central limit theorem for dependent variables. Duke Math. J. **15**, 773—780 (1948). — [5] LOMNICKI, Z. A.: The standard error of Gini's mean difference. Ann. of Math. Statist. **23**, 635—637 (1952). — [6] MARSAGLIA, G.: Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 987—991 (1954). — [7] NAIR, U. S.: The standard error of Gini's mean difference. Biometrika **28**, 428—436 (1936). — [8] USPENSKY, J. V.: Introduction to Mathematical Probability. New York and London: McGraw-Hill 1937.

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Eingegangen am 28. September 1956)